摄动法及其在力学中的应用

(二) 题解

李家春　　戴世强
凌国灿　　庄峰青

中国科学院力学研究所
一九八一年八月

序

本书是美国纽约大学柯朗数学研究所丁汝教授的"摄动法及其在力学中的应用"的续篇，本篇包括了该书每章所附全部习题的解答。

摄动法像其它任何一门学科一样，只有通过亲自动手演算习题，才能深入理解基本概念，掌握其要领和技巧，为在科学研究中，以摄动法为工具解决实际问题打下良好的基础。为此，在丁汝教授讲学期间，我们安排了约20学时的习题课。本书是根据习题课的内容集编成册，供读者学习时参考。

由于水平所限，错误疏漏之处在所难免，望读者批评、指正。

丁汝教授审阅了原稿，部分题解是在丁教授指导下得以完善的。在本书付印之际，我们仅向丁教授致以衷心的感谢。

六

目　录

第一册　概　论 …… 1

第一章　引言 …… 1
第二章　正则摄动法 …… 6
第三章　改进的摄动法 …… 14
第四章　匹配渐近展开法 …… 26
第五章　多重尺度法和均匀化方法 …… 41

第二册　应　用 …… 74

第二章　长波近似理论 …… 74
第三章　短波近似理论 …… 80
第四章　边界层理论 …… 98
第七章　平板后缘附近的不可压缩流动 …… 100
第八章　旋涡的运动与衰减 …… 109

摄动法考试习题 …… 114

目　录

第一册　概　论 …… 1

第一章　引言 …… 1
第二章　正则摄动法 …… 6
第三章　改进的摄动法 …… 14
第四章　匹配渐近展开法 …… 26
第五章　多重尺度法和均匀化方法 …… 41

第二册　应　用 …… 74

第二章　长波近似理论 …… 74
第三章　短波近似理论 …… 80
第四章　边界层理论 …… 98
第七章　平板后缘附近的不可压缩流动 …… 100
第八章　旋涡的运动与衰减 …… 109

摄动法考试习题 …… 114

第一册　概　论

第一章

1.1　试用简单函数（如幂函数，指数函数，对数函数）来表达当 $\varepsilon \to 0$ 时，下述函数的量阶。

〔解〕

(i) $\dfrac{1-\cos\varepsilon}{1+\cos\varepsilon} = O(\varepsilon^2)$ ；　(ii) $\dfrac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{1-\cos\varepsilon} = O(\varepsilon^{-\frac{3}{2}})$ ；

(iii) $\operatorname{Sech}^{-1}\varepsilon = \ln\left(\dfrac{1\pm\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\right) = O(\ln\varepsilon^{-1})$ ；

(iv) $\ln\left[1+\dfrac{\ln(1+2\varepsilon)}{1-2\varepsilon}\right] \sim \ln[1+2\varepsilon] = O(\varepsilon)$ ；

(v) $\ln\left[1+\dfrac{\ln\frac{1+2\varepsilon}{\varepsilon}}{1-2\varepsilon}\right] \sim \ln(1-\ln\varepsilon) = O(\ln\ln\varepsilon^{-1})$ ；

(vi) $e^{-\cosh(\frac{1}{\varepsilon})} = e^{-\left(\frac{e^{\frac{1}{\varepsilon}}+e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{2}\right)} = O\left(e^{-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{\varepsilon}}}\right)$ ；

(vii) $\int_0^{\varepsilon} e^{-s^2}ds = I(\epsilon)$

显然 $|I(\epsilon)| \leqslant \epsilon$

用洛毕达法则

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{I(\epsilon)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0} I'(\epsilon) = \lim_{\epsilon\to 0} e^{-\epsilon^2} = 1$$

$$\int_0^{\epsilon} e^{-s^2}ds = O(\epsilon)$$

1.2 对于小 ε，按量阶次序排列函数（从小到大）

[解]

$$e^{-\frac{1}{\varepsilon}},\ \varepsilon^2,\ \varepsilon^2\ln\varepsilon^{-1},\ \varepsilon^{\frac{3}{2}},\ \varepsilon,\ \varepsilon^{\frac{1}{2}},\ \varepsilon^{\frac{1}{2}}\ln\varepsilon^{-1},\ 1,$$

$$\ln(\ln\varepsilon^{-1}),\ \ln\varepsilon^{-1}$$

1.3 证明，对于大 x，$F(x)=\int_x^{\infty}\frac{\cos t}{t}dt$ 的渐近展开式为

$$F(x)\sim\left(-\frac{1}{x}+\frac{2!}{x^3}-\frac{4!}{x^5}+\cdots\right)\sin x+\left(\frac{1!}{x^2}-\frac{3!}{x^4}+\frac{5!}{x^6}-\cdots\right)\cos x$$

这个渐近级数收敛吗？求余项的上界，并证明它比渐近展开的末项更迅速地趋于零。

[证] $F(x)=\int_x^{\infty}\frac{\cos t}{t}dt$

$$=-\frac{\sin x}{x}+\int_x^{\infty}\frac{\sin t}{t^2}dt$$

$$=-\frac{\sin x}{x}+\frac{\cos x}{x^2}-2!\int_x^{\infty}\frac{\cos t}{t^3}dt$$

$$=\left(-\frac{0!}{x}+\frac{2!}{x^3}-\frac{4!}{x^5}+\cdots\right)\sin x+\left(\frac{1!}{x^2}-\frac{3!}{x^4}+\frac{5!}{x^6}-\cdots\right)\cos x+R_n$$

余项表达式为

$$R_n=\begin{cases}(2m-1)!\int_x^{\infty}\frac{\sin t}{t^{2m}}dt & n=2m-1\\ -(2m)i\int_x^{\infty}\frac{\cos t}{t^{2m+1}}dt & n=2m\end{cases}$$

故

$$|R_n|\leqslant n!\int_x^{\infty}\frac{dt}{t^{n+1}}=(n-1)!\frac{1}{x^n}$$

当 $n=2m-1$ 时

$$\lim_{x-\infty}\left|\frac{R_n}{\varphi_n}\right|=\lim_{x\to\infty}\left[(2m-1)\frac{\int_x^{\infty}\frac{\sin t}{t^{2m}}dt}{\frac{\sin x}{x^{2m-1}}}\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[(2m-1)\frac{\frac{\sin x}{x^{2m}}}{\frac{\cos x}{x^{2m-1}}-(2m-1)\frac{\sin x}{x^{2m}}}\right]$$

$$=0$$

即

$$R_n=o(\varphi_n)$$

对于 $n=2m$ 的情况上式不成立

所以

$$F(x)\sim\left(-\frac{0!}{x}+\frac{2!}{x^3}-\frac{4!}{x^5}+\cdots\right)\sin x+\left(\frac{1!}{x^2}-\frac{3!}{x^4}+\frac{5!}{x^6}-\cdots\right)\cos x$$

对于固定的 x，由于含有 $n!$ 为係数，所以级数的通项 φ_n 不

趋于零（当 $n\to\infty$ 时），级数发散。

1.4 求函数 $\Phi(x)=\int_x^\infty e^{-x^2}dx$ $(x>>1)$ 的渐近展开式，通过数值计算说明它的性质，并求最佳截断位置。（取 $x=2.3$）

〔解〕用分部积分法

$$\Phi(x)=\frac{e^{-x^2}}{2x}-\int_x^\infty\frac{e^{-x^2}}{2x^2}dx$$

$$=e^{-x^2}\left(\frac{1}{2x}-\frac{1}{4x^3}\right)+3\int_x^\infty\frac{e^{-x^2}}{4x^4}dx$$

$$=e^{-x^2}\left(\frac{1}{2x}-\frac{1}{4x^3}+\frac{3}{8x^5}\right)-(3.5)\int_x^\infty\frac{e^{-x^2}}{8x^6}dx$$

$$=e^{-x^2}\left(\frac{1}{2x}+\sum_{n=2}^{N}\frac{(-1)^{n-1}1.3\cdots(2n-3)}{2^n x^{2n-1}}\right)+R_N$$

$$R_N=(-1)^N 1.3\cdots(2N-1)\int_x^\infty\frac{e^{-x^2}}{2^N x^{2N}}dx$$

用上题方法，类似地有

$$\lim_{x\to\infty}\left|\frac{R_N}{\varphi_N}\right|=\lim_{x\to\infty}K\frac{\int_x^\infty\frac{e^{-x^2}}{x^{2N}}dx}{\frac{e^{-x^2}}{x^{2N-1}}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}K\frac{\frac{e^{-x^2}}{x^{2N}}}{e^{-x^2}\left(\frac{-2}{x^{2N-2}}-\frac{2N-1}{x^{2N}}\right)}=0$$

其中 K 为与 X 无关的常数。

$\therefore\ R_N = O(\varphi_N)$

所以

$$\Phi(x) \sim \frac{e^{-x^2}}{2x}\left[1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1\cdot 3}{(2x^2)^2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{(2x^2)^3} + \cdots\cdots\right]$$

$$= \frac{e^{-x^2}}{2x}\left[1 + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2x^2)^{n-1}}\right]$$

其中

$$(2n-3)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdots\cdots(2n-3)$$

由于 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \dfrac{2n-3}{2x^2} \geqslant 1$ 时，即 $n \geqslant x^2 + \dfrac{3}{2}$，渐近级的项开始增大，故最小项应为第 N 项 $N = [x^2 + \frac{3}{2}]$，[ ] 表示整数部分，最佳截断应取 $N = [x^2 + \frac{3}{2}]$，所以 $x = 2$ 时，取 $N = 5$，$x = 3$ 时，取 $N = 10$.

数 值 计 算 结 果

N \ X	2	3
1	0.004578909	0.000020568
2	0.004006545	0.000019425
3	0.004221181	0.000019616
4	0.004087034	0.000019563
5	0.004204413	0.000019583
6	0.004072361	0.000019573
7	0.004435503	0.000019579
8		0.000019575

9		0.000019578
10		0.000019575
11		0.000019579
12		0.000019574
13		0.0000 19580
精确值	0.004148 (误差1.35%)	0.000019579 (误差0.010%)

第 二 章

2.1 求代数方程的二阶摄动解

$$x = 1 + \varepsilon x^2 \qquad \varepsilon << 1$$

当 $x = 0.1, 0.01, 0.001$ 时同精确解作比较。

〔解〕 分两种情况

(i) 当 x 与 1 同阶时，取

$$x = 1 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \cdots\cdots$$

代入方程

$$1 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \cdots\cdots = 1 + \varepsilon(1 + 2a_1\varepsilon + \cdots\cdots)$$

由此可知 $a_1 = 1$， $a_2 = 2$

$$x = 1 + \varepsilon + 2\varepsilon^2 + \cdots\cdots \qquad (2.1.1)$$

(ii) 当 x 与 εx^2 项同阶时，取

$$x = \frac{1}{\varepsilon} + b_0 + b_1\varepsilon + \cdots\cdots$$

代入方程

$$\frac{1}{\varepsilon} + b_0 + b_1\varepsilon = 1 + \varepsilon\left(\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{2b_0}{\varepsilon} + b_0^2 + 2b_1 + \cdots\right)$$

由此得 $b_0 = -1$， $b_1 = -1$

$$x = \frac{1}{\varepsilon} - 1 - \varepsilon + \cdots\cdots \qquad (2.1.2)$$

显然解(2.1.1)(2.1.2)分别对应于代数方程的两个根

$$x_{1,2} = \frac{1 \mp \sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}$$

现在当 $\varepsilon = 0.1,\ 0.01,\ 0.0001$ 时把用两种方法计算的两个解进行比较

方法 \ x	0.1		0.01		0.0001	
	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2
摄动解	1.12	8.9	1.0102	98.99	1.0001002	998.999
精确解	1.127	8.873	1.0102	98.989	1.0001002	998.998998

2.2 若有如下微分方程的初值问题

$$y' + y = \varepsilon y^2, \quad y(0) = 1$$

(a) 对于小 ε，求三项展开式；(b) 证明其精确解为 $y = e^{-x}[1 + (e^{-x} - 1)]^{-1}$；

(c) 把上述表达式展开，并同(a)的结果比较；

(d) 上述展开式的选用范围是什么？

[解] 令 $y = y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \cdots\cdots$

逐级近似方程，边界条件为

$$y_0' + y_0 = 0 \qquad y_0(0) = 1 \qquad y_0(x) = e^{-x}$$

$$y_1' + y_1 = y_0^2 = e^{-2x} \qquad y_1(0) = 0 \qquad y_1(x) = e^{-x} - e^{-2x}$$

$$y_2' + y_2 = 2y_0 y_1 = 2(e^{-2x} - e^{-3x}) \qquad y_2(0) = 0$$

$$y_2(x) = e^{-x} - 2e^{-2x} + e^{-3x}$$

所以

$$y = e^{-x} + \varepsilon(e^{-x} - e^{-2x}) + \varepsilon^2(e^{-x} - 2e^{-2x} + e^{-3x})$$

$$= e^{-x}\left[1+\varepsilon(1-e^{-x})+\varepsilon^2(1-e^{-x})^2\right]$$

现在来求精确解，原方程化为

$$\frac{dy}{\varepsilon y^2-y} = dx$$

$$\ln\frac{\varepsilon y-1}{y} = x+c$$

由边界条件，$y(0)=1$ 可知 $c=\ln(\varepsilon-1)$，解出

$$y = e^{-x}\left[1+\varepsilon(e^{-x}-1)\right]^{-1}$$

$$= e^{-x}\left[1+\varepsilon(1-e^{-x})+\varepsilon^2(1-e^{-x})^2+\cdots\right]$$

它的三阶近似同摄动解是一致的

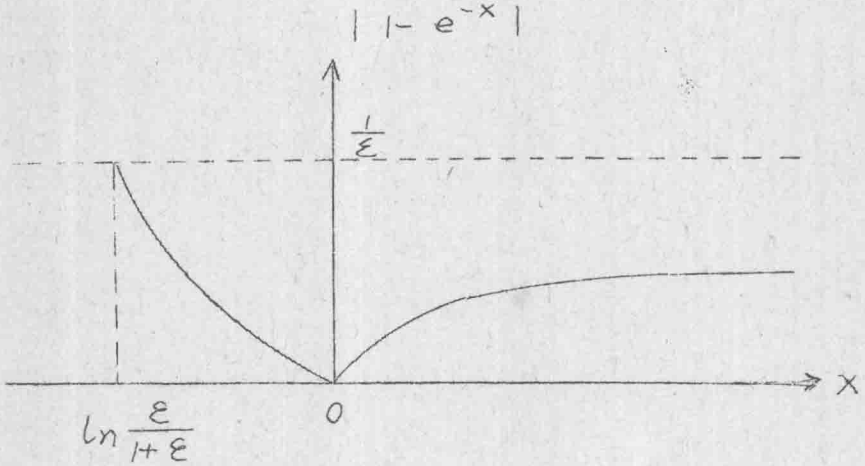
上述展开式成立的条件为

$$\varepsilon < |e^{-x}-1|^{-1}$$

如果ε固定，我们来求x适用范围

$x>0$ 时，有 $1-e^{-x}<\frac{1}{\varepsilon}$，这对于 $\varepsilon<1$ 总能成立，

$x<0$ 时，有 $e^{-x}-1<\frac{1}{\varepsilon}$，要求 $x>\ln\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$



2.3 试用势函数 φ 求解受微小变形圆柱的不可压缩绕流，柱体截面周线变形后的方程为 $r=a(1-\varepsilon\sin^2\theta)$，参数 $\varepsilon<<1$，a 为变形前的圆柱半径，由速度势的表达式，证明在物体表面的流体速度为

$$q_s = U[2\sin\theta + \varepsilon\sin 3\theta + \cdots]$$

〔解〕 显然，速度势 Φ 满足

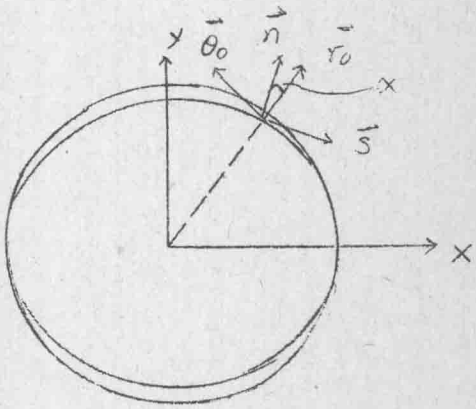
$$\begin{cases} \Delta\Phi = 0 \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \end{cases} \qquad (2.3.1)$$

令，$\Phi = \Phi_0(r,\theta) + \varepsilon\Phi_1(r,\theta) + \cdots$ (2.3.2)

依正则展开，逐级近似，$\Phi_i(r,\theta)$ 都满足 Laplace 方程，关键问题是如何写出边界条件，因为这时 $\vec{n}$ 方向同径向有一个小偏角 α

$$\frac{\partial}{\partial n} = \cos\alpha\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin\alpha}{r}\frac{\alpha}{\partial\theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial s} = \sin\alpha\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\cos\alpha}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} \qquad (2.3.3)$$



$\vec{r}_0$，$\vec{\theta}_0$，$\vec{n}$，$\vec{s}$ 等矢量的意义如图所示。

$$tg\alpha = -\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} = \frac{\varepsilon\sin 2\theta}{1-\varepsilon\sin^2\theta} \qquad (2.3.4)$$

当 α 很小时

$$tg\alpha = \alpha + \frac{\alpha^3}{3} + \frac{2}{15}\alpha^5 + \cdots\cdots \qquad (2.3.5)$$

所以，从上面两式可得 α 的展开式为

$$\alpha = \sin 2\theta \left[\varepsilon + \sin^2\theta\,\varepsilon^2 + \frac{\sin^2\theta}{3}(7\sin^2\theta - 4)\varepsilon^3 + \cdots\right] \tag{2.3.6}$$

于是在 $\left.\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right|_{r=a(1-\varepsilon\sin 2\theta)}$ 中令 $\varepsilon = 0$ 得

$$\left.\frac{\partial \Phi_0}{\partial r}\right|_{r=a} = 0 \tag{2.3.7}$$

所以，Φ_0 是圆柱绕流的解 $\Phi_0 = U\left(r + \frac{a^2}{r}\right)\cos\theta$ (2.3.8)

把 $\left(\cos\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin\alpha}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\Phi$ 对 ε 微商令 $\varepsilon = 0$，注意到 α 也是 ε 的函数，$\alpha(0) = 0$，$\dot{\alpha} = \sin 2\theta$，可得到

$$\left[\cos\alpha\frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial r} + \frac{\sin\alpha}{r}\frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial\theta} - \sin\alpha\,\dot{\alpha}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\cos\alpha\,\dot{\alpha}}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\Phi\right]_{\varepsilon=0}$$

$$= \left[-\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial r^2}a\sin^2\theta + \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \frac{\sin 2\theta}{r}\frac{\partial \Phi_0}{\partial\theta}\right]_{r=a}$$

$$= 0 \tag{2.3.9}$$

$$\left.\frac{\partial \Phi_1}{\partial r}\right|_{r=a} = \left[a\sin^2\theta\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial r^2} - \frac{\sin 2\theta}{r}\frac{\partial \Phi_0}{\partial\theta}\right]_{r=a}$$

$$= 3U\sin\theta\sin 2\theta$$

$$= \frac{3}{2}U(\cos\theta - \cos 3\theta) \tag{2.3.10}$$

由此可以猜测

$$\Phi_1 = \frac{3}{2}U\left[\frac{a^4\cos 3\theta}{3r^3} - \frac{a^2\cos\theta}{r}\right] \tag{2.3.11}$$

因为 $r^{-n}\cos n\theta$，$r^{-n}\sin n\theta$ 为调和函数，且满足上述边界条

件，显然

$$\psi_1 = \frac{3}{2}U\left[\frac{a^2\sin\theta}{r} - \frac{a^4\sin 3\theta}{3r^3}\right]$$，它是Φ_1的共轭调和函数，複势为

$$W_1 = \frac{3}{2}U\left[\frac{a^4}{3z^3} - \frac{a^2}{z}\right] \qquad (2.3.12)$$

现在求表面速度

$$\begin{aligned}
q_s &= \frac{\partial}{\partial s}\left[\varphi_0 + \varepsilon\varphi_1\right] \quad r = a(1-\varepsilon\sin^2\theta) \\
&= \left[-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \varepsilon\sin 2\theta\frac{\partial}{\partial r}\right](\varphi_0 + \varepsilon\varphi_1)\Big| \; r=a(1-\varepsilon\sin^2\theta) \\
&= -\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi_0}{\partial\theta}\Big|_{r=a} + \varepsilon\left[-\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\theta}\Big|_{r=a} + \sin 2\theta\frac{\partial\Phi_0}{\partial r}\Big|_{r=a}\right. \\
&\quad \left. + a\sin^2\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi_0}{\partial\theta}\right)\Big|\right]_{r=a} + O(\varepsilon^2) \\
&= U\left\{2\sin\theta + \varepsilon\left[\frac{3}{2}(\sin 3\theta - \sin\theta) + 2\sin^3\theta\right]\right. \\
&\quad \left. + O(\varepsilon^2)\right\} \\
&= U\left\{2\sin\theta + \varepsilon\sin 3\theta + O(\varepsilon^2)\right\} \qquad (2.3.13)
\end{aligned}$$

2.4 试求边界为受微小变形的圆膜在均布载荷作用下的平衡位移W，（注意位移为小量的物理条件），它满足无量纲方程

$$\Delta\widetilde{W} = 1 \qquad \text{在 } D \text{ 内}$$

$$\widetilde{W} = 0 \qquad \text{在 } \Gamma \text{ 上}$$

上式中 $\tilde{W}$ 为无量纲位移，Δ 为二维拉普拉斯算子，Γ 的方程为 $r=a(1+\varepsilon\sin 2\theta)$ D 为 Γ 所围的内部区域。

[解] 令 $\tilde{W}=\tilde{W}_0+\varepsilon\tilde{W}_1+\cdots\cdots$ (2.4.1)

零级近似方程为

$$\begin{cases}\Delta\tilde{W}_0=1\\ \tilde{W}_0(1,\theta)=0\end{cases}\qquad(2.4.2)$$

由于轴对称性可化为常微分方程：

$$\begin{cases}\dfrac{d^2\tilde{W}_0}{d\tilde{r}^2}+\dfrac{1}{\tilde{r}}\dfrac{d\tilde{W}_0}{d\tilde{r}}=1\\ \tilde{W}_0(1)=0\end{cases}\qquad(2.4.3)$$

要求在 $\tilde{r}=0$ 处无奇点，零级解为

$$\tilde{W}_0=\frac{1}{4}(\tilde{r}^2-1)\qquad(2.4.4)$$

一阶方程为

$$\frac{\partial^2\tilde{W}_1}{\partial\tilde{r}^2}+\frac{1}{\tilde{r}}\frac{\partial\tilde{W}_1}{\partial\tilde{r}}+\frac{1}{\tilde{r}^2}\frac{\partial^2\tilde{W}_1}{\partial\theta^2}=0\qquad(2.4.5)$$

边界条件为

$$\tilde{W}_1(1,\theta)=-\sin 2\theta\left(\frac{d\tilde{W}_0}{d\tilde{r}}\right)_{\tilde{r}=1}$$

$$=-\frac{1}{2}\sin 2\theta\qquad(2.4.6)$$

容易用分离变量法求解，令 $\tilde{W}_1=R_1(\tilde{r})\sin 2\theta$ 代入

$$D.E.\ \frac{d^2R_1}{d\tilde{r}^2}+\frac{1}{\tilde{r}}\frac{dR_1}{d\tilde{r}}-\frac{4}{\tilde{r}^2}R_1=0$$

$$B.C.\ R_1(1)=-\frac{1}{2}\qquad(2.4.7)$$

所以 $R_1=\dfrac{\tilde{r}^2}{2}$，$\tilde{W}_1=-\dfrac{\tilde{r}^2}{2}\sin 2\theta$ 故

$$W=\frac{F}{T}\left[\frac{1}{4}(r^2-a^2)-\frac{r^2}{2}\sin 2\theta\,\varepsilon+O(\varepsilon^2)\right] \quad (2.4.8)$$

在实际物理问题中，上述方程是在小挠度条件下成立的，有量纲方程为

$$T\Delta W=F$$

所以要 W/a 很小的条件是 Fa/T 很小，即载荷很小或张力很大的情况，题中 $\widetilde{W}=WT/Fa^2$，$\tilde{r}=r/a$.