精编高考复习丛书

第1轮复习

上海教育出版社
SHANGHAI
EDUCATION
PUBLISHING
HOUSE

数学高考

基础知识单元复习

» **近年高考数学的热点是什么？**
高考数学的命题有何新趋势？
求解高考数学中解答题的策略和方法有哪些？

本书将以全新的视角、全方位地为你扫描历年高考的精华，指点应对今年高考的迷津，是获取数学高分的**“金钥匙”**。

精编高考复习丛书

数学高考基础知识单元复习

本书编写组

上海教育出版社

精编高考复习丛书
数学高考基础知识单元复习
本书编写组
上海世纪出版股份有限公司
上海教育出版社 出版
易文网:www.ewen.cc
(上海永福路123号 邮政编码:200031)
上海新华书店发行 上海市北印刷集团有限公司印刷
开本 787×1092 1/16 印张 21
2006年8月第1版 2006年8月第1次印刷
印数 1-3,000本
ISBN 7-5444-0798-5/G·0641 定价:25.00元
(如发生质量问题,读者可向工厂调换)

《精编高考复习丛书》的出版说明

通过高考进入自己理想的高校，这是每个考生最大的心愿，而找到一套完整的、高质量的高考复习资料是考生最迫切的要求. 多年来，我社曾编辑出版了《高中数学复习》、《数学高考新模式》、《高考数学水平检测》等书籍，受到了广大师生的欢迎. 为了满足广大高中毕业生对高考复习的热切需要，我们特邀了一批上海市名牌高级中学高三年级的优秀特级教师和近几年承担过高考命题工作的老师，根据当前数学高考的特点和考纲要求，结合自己多年丰富的执教和命题经验，对历年的高考数学复习资料进行整合，精心策划和编撰了一套《精编高考复习丛书》，以帮助学生更好地做好迎考的复习准备. 考虑到每年高考的新要求，我们将对这套复习资料逐年加以修订和更新，使其成为广大师生真正满意的高考复习的品牌资料.

《精编高考复习丛书》的数学学科分三个系列编写，可供不同复习阶段的考生使用.

• 《数学高考基础知识单元复习》，可供学生在数学高考复习的第一阶段选用，着重于基础知识和基本方法、能力的复习和训练.

• 《数学高考综合能力专题训练》，可供学生在数学高考复习的第二阶段选用，着重于综合能力的训练与提高，所选的例题、试题和习题有一定的难度，相当于数学高考试卷中的第 17 到 22 题，以提高考生对解答题和综合题的解题能力，同时进一步检验考生对基础知识和基本方法、能力的掌握程度.

• 《数学高考仿真测试卷》，包含了十二份版式完全模拟高考形式的测试卷，便于高三老师测试学生与学生自测. 这些测试卷由一批有丰富教学经验、对命题有研究的资深教师编写，从总体上注重能力与素质的考查，特别是对应用能力与在新情景下解决问题的能力的考查.

前　言

在完成了高中阶段的数学学习之后，有必要对所学得的数学基础知识和基本思想方法作一次比较全面的、系统的梳理，以便于形成数学知识的结构体系，掌握各章节知识的内在联系，并能从宏观上把握数学学习的总体要求，从而进一步将所学得的知识内化为自身的一种能力，同时也为进一步的学习作必要的准备.

鉴于上述考虑，我们编写了《数学高考基础知识单元复习》，作为数学高考第一阶段复习的一份较为详尽的参考资料.

本书将现行的上海高中数学教材作了优化、归并、整合与重组的处理，以利于凸显高中数学知识的脉络，也有助于数学复习的组织与展开.

本书共有 9 章，每章又分为若干个单元，每单元都设有“复习目标”，“复习要点”等栏目，在每章的最后又设置了“方法指导”栏目.

“复习目标”，对本单元的知识目标、能力目标作了概括性的叙述，以利于读者掌握复习要求.

“复习要点”，对该单元的若干个重要知识点或难点，以及学生易犯的错误，结合例题作了简要的说明，并注重本单元知识的简单应用.

“方法指导”，总结和归纳了与本章知识点相关的某些数学思想方法，提出并解决了一部分与其他章节相联系的综合性问题.

配合“复习要点”，编制了一套“基础训练”题，配合“方法指导”，编制了一套“综合练习”题. 这些习题与复习要求相符，也与高考的基本要求相符，其中的一部分习题为近几年的高考数学试题. 在每章复习结束时，还设计了一套“单元评估”题，供读者检验复习的效果. 本书末附有有关练习、评估的答案，部分习题还给出提示与简解.

尽管我们作了很大的努力，但由于水平有限，编写的时间又比较仓促，因此一定会有一些不足之处，我们恳请读者给予批评指正，以便于今后的改进.

本书编写组

2006 年 7 月

目　录

第1章　集合、命题、不等式

一　集　合

【复习目标】

1. 理解集合的意义，会用“列举法”和“描述法”表示集合.

2. 理解子集(真子集)、集合相等等概念，能判断两个集合之间的包含关系或相等关系.

3. 理解交集、并集等概念，掌握集合的交、并运算，了解有关的基本运算性质.

4. 理解全集、补集的意义，并能求出已知集合的补集.

5. 掌握有关的术语和符号，并会用它们正确表示一些简单集合.

【复习要点】

1. 集合

(1) 集合的含义　把能够确切指定的对象看作一个整体，这个整体就是一个集合，通常用大写字母 A、B、C、…表示，确定的对象叫做集合的元素，通常用小写字母 a、b、c、…表示. 任何一个元素 a，对于某一集合 A 来说，或是属于该集合(即 $a\in A$)，或是不属于该集合(即 $a\notin A$).

(2) 集合中元素的性质　根据集合描述性定义，集合中元素具有：① 确定性；② 互异性；③ 无序性；④ 抽象性. 集合元素必须具有确定的性质，否则不构成集合，称为集合元素的确定性. 集合中元素各不相同，称为集合元素的互异性. 集合元素在集合中的位置与次序无关，称为集合元素的无序性. 集合元素可以表示任何对象，称为集合元素的抽象性. 集合元素抽象可以使集合有广泛的用途.

例1　若集合 $M=\{x,3,1\}$，$N=\{1,x^2\}$，且 $M\cup N=\{x,3,1\}$，则满足条件的实数 x 的个数有__________.

分析：$M\cup N=\{x,3,1\}=M$，故 $N\subseteq M$.

解　$\because$　$M\cup N=M$，　$\therefore$　$N\subseteq M$.

当 $x^2=x$ 时，$x=0$ 或 $x=1$. 由集合元素的互异性、无序性，得 $x=0$.

当 $x^2=3$ 时，$x=\pm\sqrt{3}$.

故满足条件的实数 x 有3个.

(3) 集合的分类　集合通常分为有限集，无限集，空集. 我们把由有限个元素组成的集合叫做有限集合；只有一个元素的集合又叫做单元素集. 反之，由无限个元素组成的集合叫做无限集合，如自然数集合、平面上点的集合等等都是无限集合. 没有元素的集合叫空集，记作$\varnothing$.

(4) 集合的表示方法　集合通常有四种表示方法：列举法，描述法，图示法，特殊字母表

示法.列举法是指把集合中的所有元素列举出来的表示方法.如方程 $x^2=1$ 的实数解集可以用列举法表示为$\{1,-1\}$.列举法表示集合的优点是十分直观,但无限集合不太适宜用列举法表示.描述法是指通过揭示集合元素共同性质来表示集合的方法.如全体自然数的平方数,可用描述法来表示为$\{x\mid x=n^2,n\in\mathbf{N}\}$.图示法即韦恩图法,通过用圆形图或方框图表示集合或集合之间的关系.数集是常见的集合,用特殊字母表示,中学阶段,我们常见的数集有:$\mathbf{N}$(自然数集),$\mathbf{Z}$(整数集),$\mathbf{N}^*$(不包括零的自然数集),$\mathbf{Q}$(有理数集),$\mathbf{R}$(实数集),$\mathbf{Q}^+$(正有理数集),$\mathbf{C}$(复数集)等.实数集(包括其子集)还常用区间表示.

例 2 已知集合 $A=\{y\mid |y|=x^2-1,x、y\in\mathbf{R}\}$,$B=\{x\mid |y|=x^2-1,x、y\in\mathbf{R}\}$,$C=\{(x,y)\mid |y|=x^2-1,x、y\in\mathbf{R}\}$,$D=\{x\mid |y|=x^2-1,x\in\mathbf{N}\}$,$E=\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 4,x、y\in\mathbf{R}\}$,$F=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 16,x、y\in\mathbf{R}\}$.

(1) 集合 A、B、C 是同一集合吗?

(2) 集合 B、D 是否是同一集合?

(3) 集合 E、F 是否是同一集合?

分析:要研究集合,首先要看集合元素的类型,其次看集合元素满足的性质,最后要看集合元素的范围.如果三者都相同,那么是同一个集合,否则就不是同一个集合.

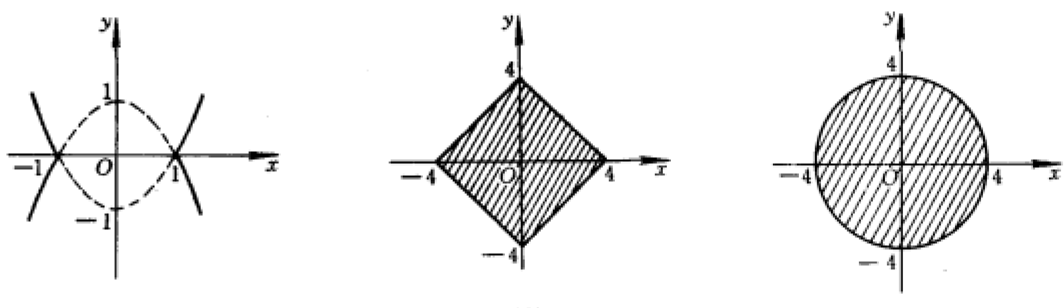
解 (1) $A=\{y\mid |y|\geqslant -1\}=\mathbf{R}$,

$$B=\{x\mid x^2=|y|+1,x、y\in\mathbf{R}\}=\{x\mid x^2\geqslant 1\}=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty).$$

所以,A、B 不是同一集合,且 $B\subsetneqq A$.

因为集合 C 是平面上一点集,其图形如图 1-1(1)所示,而 A、B 为数集,所以集合 A、B、C 不是同一集合.

(2) 集合 $D=\{x\mid x^2=|y|+1,x\in\mathbf{N}\}=\{x\mid x^2\geqslant 1,x\in\mathbf{N}\}=\mathbf{N}^*$,虽然集合 B、D 元素都是数,集合元素性质也相同,但它们的范围不同:集合 B 中 $x\in\mathbf{R}$,集合 D 中 $x\in\mathbf{N}^*$.所以,集合 B、D 不是同一个集合.



(1) (2) (3)

图 1-1

(3) 集合 E、F 尽管都是点集,但它们的性质不同,因此集合 E、F 不是同一集合.集合 F 的点集如图 1-1(2)所示,集合 F 的点集如图 1-1(3)所示,两者完全不同.

说明 数集主要用于研究元素的范围,而点集主要用于研究元素所构成的图形特征.

2. 集合与集合的关系

(1) 子集 对于两个集合 A 与 B,如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,那么集合 A 叫做集合 B 的子集,记作 $A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$),读作 A 包含于 B(或 B 包含 A).任何

集合是它本身的子集，空集是任何一个集合的子集.

(2) 真子集　如果 A 是 B 的子集，并且 B 中至少有一个元素不属于 A，那么集合 A 叫做 B 的真子集，记作 $A \subsetneqq B$(或 $B \supsetneqq A$)，读作 A 真包含于 B(或 B 真包含 A). 空集是任何一个非空集合的真子集.

(3) 两个集合相等　对于两个集合 A 与 B，如果 $A \subseteq B$，同时 $B \subseteq A$，那么就说这两个集合相等，记作 $A=B$.

例 3　设 P、Q 为两个非空集合，定义集合 $P+Q=\{a+b \mid a \in P, b \in Q\}$. 若 $P=\{0,2,5\}$，$Q=\{1,2,6\}$，则 $P+Q$ 的非空子集的个数为________.

分析：集合 $P+Q$ 的元素为一些数，应满足集合元素的四个性质.

解　因为 $a \in P, b \in Q$，所以 $a+b$ 等于 1,2,6,3,4,8,6,7,11.

根据集合元素的互异性，$P+Q=\{1,2,6,3,4,8,7,11\}$.

所以，$P+Q$ 的非空子集的个数为 $2^8-1=255$.

3. 集合的运算

关于集合的运算，高中阶段只要求掌握“交”、“并”、“补”三种.

(1) 交集　由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做集合 A 与 B 的交集，记作 $A \cap B$. 用数学语言表示为 $A \cap B=\{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$.

(2) 并集　由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做集合 A 与 B 的并集，记作 $A \cup B$. 用数学语言表示为 $A \cup B=\{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$.

上述两个定义仅一字之差，结果却完全不同，这就要求我们在审题和解题时注意语言的规范性. 值得注意的是：“且”有时可省略，但“或”不能省略.

(3) 补集　已知全集 U，$A \subseteq U$，由 U 中所有不属于 A 的元素所组成的集合，叫做集合 A 在全集 U 中的补集，记作 $\complement_U A$. 用数学语言表示为 $\complement_U A=\{x \mid x \in U, x \notin A\}$.

4. 集合运算的运算律及性质

(1) 集合运算的运算律

交换律：$A \cap B=B \cap A$，$A \cup B=B \cup A$.

结合律：$(A \cap B) \cap C=A \cap(B \cap C)$，$(A \cup B) \cup C=A \cup(B \cup C)$.

分配律：$A \cap(B \cup C)=(A \cap B) \cup(A \cap C)$，$A \cup(B \cap C)=(A \cup B) \cap(A \cup C)$.

(2) 集合运算性质

集合运算具有如下性质：

$$A \cap B \subseteq A,\quad A \cup B \supseteq A,\quad A \cap B \subseteq A \cup B,$$
$$\complement_U \varnothing=U,\quad \complement_U U=\varnothing,\quad \complement_U(\complement_U A)=A,\quad A \cap \complement_U A=\varnothing,\quad A \cup \complement_U A=U,$$
$$\complement_U(A \cap B)=\complement_U A \cup \complement_U B,\quad \complement_U(A \cup B)=\complement_U A \cap \complement_U B\text{，等等.}$$

例 4　已知全集 $U=\mathbf{R}$，$A=\{y \mid y=x^2+2x+2, x、y \in \mathbf{R}\}$，$B=\{x \mid x^2+2x-8 \geqslant 0\}$. 求：

(1) $A \cap B$；　(2) $A \cup B$；　(3) $A \cup \complement_U B$；　(4) $\complement_U A \cap \complement_U B$.

分析：集合 A、B 都是一个数集. 集合 A 的元素是 y，即求二次函数 $y=x^2+2x+2$ 的值域；集合 B 的元素是 x，即求不等式 $x^2+2x-8 \geqslant 0$ 的解集. 求两个集合的交、并，可借助数轴，以便能较直观地给出相关结果.

解　$\because$　$A=\{y \mid y=(x+1)^2+1, x、y \in \mathbf{R}\}=\{y \mid y \geqslant 1\}$，

$B=\{x|x^2+2x-8\geqslant 0\}=\{x|(x+4)(x-2)\geqslant 0\}=\{x|x\leqslant -4$ 或 $x\geqslant 2\}$,

$\therefore\quad \complement_U A=\{y|y<1\}$, $\complement_U B=\{x|-4<x<2\}$.

(1) $A\cap B=\{x|x\geqslant 2\}$.

(2) $A\cup B=\{x|x\leqslant -4$ 或 $x\geqslant 1\}$.

(3) $A\cup \complement_U B=\{x|x>-4\}$.

(4) $\complement_U A\cap \complement_U B=\{x|-4<x<1\}$.

例 5 指出集合 $A\cap B$ 与 $A\cup B$ 的关系,并说明理由.

分析:根据集合的交、并的定义,“$\cap$”即“且”,“$\cup$”即“或”,故“越交越小,越并越大”.可借助于子集的定义来说明理由.

解 $A\cap B\subseteq A\cup B$.

若任取 $x\in A\cap B$,则必有 $x\in A$. $\therefore\quad x\in A\cup B$.

$\therefore\quad A\cap B\subseteq A\cup B$.

若任取 $x\in A\cup B$,则 $x\in A$ 或 $x\in B$.当且仅当 $A=B$ 时,$x\in A\cap B$.

所以,当且仅当 $A=B$ 时,$A\cap B=A\cup B$.

例 6 已知集合 $A=\{x|x^2-3x-10\leqslant 0\}$,$B=\{x|p+1\leqslant x\leqslant 2p-1\}$.若 $B\subseteq A\cap B$,求实数 p 的取值范围.

解 因 $B\subseteq A\cap B$,又 $A\cap B\subseteq B$,故 $B=A\cap B$. $\therefore\quad B\subseteq A$.

$A=\{x|(x-5)(x+2)\leqslant 0\}=\{x|-2\leqslant x\leqslant 5\}$.

(ⅰ) 若 $B=\varnothing$,则 $p+1>2p-1$,得 $p<2$;

(ⅱ) 若 $B\neq\varnothing$,则

$$\begin{cases}p+1\leqslant 2p-1,\\ -2\leqslant p+1,\\ 2p-1\leqslant 5.\end{cases}\quad \text{解得}\quad 2\leqslant p\leqslant 3.$$

综上所述,$p\leqslant 3$.

例 7 已知 $A=\{x|x^2+(p-1)x+p+2=0, x\in\mathbf{R}\}$,且 $A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$,求实数 p 的取值范围.

分析:集合 A 的元素是一元二次方程的根,要学会把一元二次方程、二次函数、一元二次不等式三者结合起来,从几何、代数两个方面综合思维.

解 (ⅰ) 若 $A=\varnothing$,则 $\Delta=(p-1)^2-4(p+2)=p^2-6p-7<0$.

解得 $-1<p<7$.

(ⅱ) 若 $A\neq\varnothing$,设方程两根为 x_1、x_2,则 $x_1\leqslant 0$,$x_2\leqslant 0$.

$$\text{由}\begin{cases}\Delta=p^2-6p-7\geqslant 0,\\ x_1+x_2=-(p-1)\leqslant 0,\\ x_1x_2=p+2\geqslant 0,\end{cases}\quad \text{解得}\quad p\geqslant 7.$$

综上所述,$p>-1$.

说明 本例用代数方法求解,也可用数形结合的方法求解,读者不妨一试.

例 8 已知集合 $A=\left\{(x,y)\left|\dfrac{y-2}{x+1}=a+2, x、y\in\mathbf{R}\right.\right\}$,$B=\{(x,y)|(a^2-4)x+(a-2)y=16, x、y\in\mathbf{R}\}$.若 $A\cap B=\varnothing$,求实数 a.

分析：集合 A、B 都是点集，故可通过它们表示的图形来研究其关系. 集合 A 表示的点集是一直线(除去点$(-1,2)$)，集合 B 表示的点集可以是一条直线，也可以是空集.

解 $A=\{(x,y)\mid y=(a+2)x+a+4,x\neq-1,y\neq2,x、y\in\mathbf{R}\}$

(ⅰ) 若 $B=\varnothing$，则 $a=2$，满足题意.

(ⅱ) 若 $B\neq\varnothing$，即 $a\neq2$，则集合 B 为一条直线上的点集，即

$$B=\left\{(x,y)\left|\,y=-(a-2)x+\frac{16}{a-2},x、y\in\mathbf{R}\right.\right\}.$$

当两直线平行时，由$\begin{cases}a+2=-a-2,\\ a+4\neq\dfrac{16}{a-2},\end{cases}$ 解得 $a=-2$.

当两直线不平行且直线$(a^2-4)x+(a-2)y=16$ 过点$(-1,2)$时，也有 $A\cap B=\varnothing$.

于是得$-(a^2-4)+2(a-2)=16$.

化简得 $a^2-2a+16=0$，此方程无实数解.

综上所述，$a=\pm2$.

说明 本例用数形结合的方法求解，也可用代数方法求解，读者不妨一试.

【基础练习】

练 习 一

一、填空题：

1. 设全集 $U=\mathbf{R}$，若 $M=\{x\mid-2\leqslant x\leqslant2\}$，$N=\{x\mid x<1\}$，则 $\complement_{\mathbf{R}}M\cap N$ 等于________.

2. 若集合 $M=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1,x、y\in\mathbf{R}\}$，$N=\{(x,y)\mid x^2-y=0,x、y\in\mathbf{R}\}$，则集合 $M\cap N$ 中元素的个数是________.

3. 满足$\{0,1\}\subseteq P\subsetneqq\{0,1,2,3,4,5\}$的集合 P 的个数是________.

4. 若集合 $A=\left\{x\left|\,\dfrac{x+3}{x-2}<0\right.\right\}$，集合 $B=\{x\mid (x-1)^2>1\}$，则 $A\cup B=$________.

5. 已知 $A=\{x\mid |x-1|>1,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{y\mid y+a\geqslant0,y\in\mathbf{R}\}$，若 $A\cup B=\left\{t\left|\,\dfrac{t-1}{t}\geqslant0,t\in\mathbf{R}\right.\right\}$，则实数 $a=$________.

6. 已知 $A=\{y\mid y=x^2-4x+3,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{y\mid y=-x^2-2x+2,x\in\mathbf{R}\}$，则 $A\cap B=$________.

7. 若非空集合 $A=\{x\mid 2a+1\leqslant x\leqslant3a-5\}$，$B=\{x\mid 3\leqslant x\leqslant22\}$，则由能使 $A\subseteq B$ 成立的所有的 a 的取值所组成的集合为________.

二、选择题：

8. 若集合 $P=\{1,2,3,4,5,6\}$，$Q=\{x\mid 2\leqslant x\leqslant6,x\in\mathbf{R}\}$，则下列结论中正确的是(　　)

(A) $P\cap Q=P$；　(B) $P\cap Q\supsetneqq Q$；　(C) $P\cup Q=Q$；　(D) $P\cap Q\subsetneqq P$.

9. 若集合 $M=\{x\mid |x-1|\leqslant2,x\in\mathbf{R}\}$，$P=\left\{x\left|\,\dfrac{5}{x+1}\geqslant1,x\in\mathbf{Z}\right.\right\}$，则 $M\cap P$ 等于(　　)

(A) $\{x\mid 0<x\leqslant3,x\in\mathbf{Z}\}$；　(B) $\{x\mid 0\leqslant x\leqslant3,x\in\mathbf{Z}\}$；

(C) $\{x\mid -1\leqslant x\leqslant0,x\in\mathbf{Z}\}$；　(D) $\{x\mid -1\leqslant x<0,x\in\mathbf{Z}\}$.

10. 设 U 为全集，若集合 A、B、C 满足 $A\cup B=A\cup C$，则下列结论成立的是　　(　　)

(A) $B=C$；　　　(B) $A\cap B=A\cap C$；

(C) $A\cap \complement_U B=A\cap \complement_U C$；　　　(D) $\complement_U A\cap B=\complement_U A\cap C$.

11. 设 U 为全集，若 S_1、S_2、S_3 是 U 的三个非空子集，且 $S_1\cup S_2\cup S_3=U$，则下面论断正确的是　　(　　)

(A) $\complement_U S_1\cap(S_2\cup S_3)=\varnothing$；　　　(B) $S_1\subseteq(\complement_U S_2\cap \complement_U S_3)$；

(C) $(\complement_U S_1\cap \complement_U S_2)\cap \complement_U S_3=\varnothing$；　　　(D) $S_1\subseteq(\complement_U S_2\cup \complement_U S_3)$.

三、解答题：

12. 已知 $A=\{x|x^2-px-2=0\}$，$B=\{x|x^2+qx+r=0\}$. 若 $A\cup B=\{-2,1,5\}$，$A\cap B=\{-2\}$，求 p、q、r 的值.

13. 设全集 $U=\mathbf{R}$.

(1) 解关于 x 的不等式：$|x-1|+a-1>0(a\in\mathbf{R})$；

(2) 记 A 为(1)中的不等式的解集，集合 $B=\left\{x\left|\sin\left(\pi x-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\cos\left(\pi x-\frac{\pi}{3}\right)=0\right.\right\}$. 若 $\complement_U A\cap B$ 恰有 3 个元素，求实数 a 的取值范围.

14. 设 $a\geqslant -2$，集合 $A=\{x|-2\leqslant x\leqslant a\}$，$B=\{y|y=2x+3,x\in A\}$，$C=\{z|z=x^2,x\in A\}$. 若 $B\cap C=C$，求实数 a 的取值范围.

二　命题与充要条件

【复习目标】

1. 了解命题的概念和命题的构成，理解四种命题及其相互关系.
2. 理解充分条件、必要条件、充要条件的意义.

【复习要点】

1. **命题及命题的真假**

命题是指判断一件事情的语句，它由条件和结论两部分组成，缺一不可. 不是判断事情的语句就不是命题. 命题一般用“如果……，那么……”形式出现，也有省略了“如果”、“那么”的命题.

命题有真、假两种，要说明一个命题是真命题，就必须给出严格的证明过程；要说明一个命题是假命题，只要举出一个满足命题条件，而不满足命题结论的例子就可以了. 这在数学中称为反例. 举反例不但是一种重要的数学思想，也是证明一个命题是假命题的常用方法.

例 1　给出下列四个命题：

① 若 $a\geqslant b>-1$，则 $\frac{a}{1+a}\geqslant\frac{b}{1+b}$；

② 若全集为 U，则 $A\subsetneqq \complement_U B$ 是 $A\cap B=\varnothing$ 的充要条件；

③ 若正数 m 和 n 满足 $m\leqslant n$，则 $\sqrt{m(n-m)}\leqslant\frac{n}{2}$；

④ 设 $P(x_1,y_1)$ 为圆 O：$x^2+y^2=9$ 上任一点，圆 O_1 的圆心为 $Q(a,b)$，半径为 1，当 $(a-$

$x_1)^2+(b-y_1)^2=1$ 时，圆 O 与圆 O_1 相切.

其中假命题的个数为 ( )

(A) 0；　(B) 1；　(C) 2；　(D) 3.

分析：$\because\ a\geqslant b>-1$，$\therefore\ a+1\geqslant b+1>0$. 由不等式的倒数性质，得 $\frac{1}{a+1}\leqslant\frac{1}{b+1}$，即 $\frac{1}{a+1}-1\leqslant\frac{1}{b+1}-1$，$\frac{-a}{a+1}\leqslant\frac{-b}{b+1}$. 故有 $\frac{a}{a+1}\geqslant\frac{b}{1+b}$，得(1)为真命题. 若 $A=\varnothing$，$B=U$，有 $A\cap B=\varnothing$，但 $\varnothing=A$ 不真包含于 $\complement_U B=\varnothing$，故(2)为假命题.

$\because\ m\leqslant n$，$\therefore n-m\geqslant 0$. 所以，$\sqrt{m(n-m)}\leqslant\frac{m+(n-m)}{2}=\frac{n}{2}$，当且仅当 $m=n-m$，即 $2m=n$ 时等号成立. 故(3)为真命题.

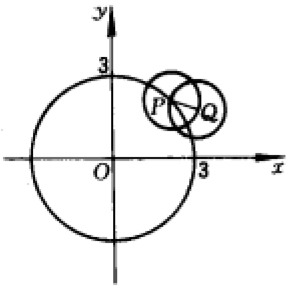


图 1－2

若 $(a-x_1)^2+(b-y_1)^2=1$，则 $|PQ|=1$. 以 P 为圆心、以 1 为半径的圆上任一点均可以是圆 O_1 的圆心 $Q(a,b)$（图 1－2），则以 $Q(a,b)$ 为圆心，作半径为 1 的圆 O_1，并不一定有圆 O 与圆 O_1 相切，故(4)为假命题.

解　选(C).

2. 四种命题形式

若将"如果 A，那么 B"(即 $A\Rightarrow B$)作为原命题，则它的逆命题是："如果 B，那么 A"(即 $B\Rightarrow A$)；

它的否命题是："如果 $\overline{A}$，那么 $\overline{B}$"(即 $\overline{A}\Rightarrow\overline{B}$)；

它的逆否命题是："如果 $\overline{B}$，那么 $\overline{A}$"(即 $\overline{B}\Rightarrow\overline{A}$).

等价命题：若甲乙两命题满足甲⇒乙，乙⇒甲，则称甲乙两命题是等价命题. 原命题与逆否命题是等价命题，逆命题与否命题也是等价命题. 两个等价命题具有相同的真假性.

另外，在写一个已知命题的否命题或逆否命题时，要把一个断语(α)正确地变更成它的否定断语($\overline{\alpha}$)，下面是一些常见断语的否定断语：

断语 α	大于(>)	是	都是	所有的是	任意一个是	至少一个	都不
否定断语 $\overline{\alpha}$	不大于(⩽)	不是	不都是	某些不是	存在一个不是	一个也没有	不都

例 2　设原命题为"若 a、b 都是偶数，则 $a+b$ 是偶数"，试写出它的逆命题、否命题和逆否命题，并分别判断它们的真假，给出证明.

分析：对于用"或"、"且"联结的复合命题的否命题，我们可根据 $\complement_U(A\cup B)=\complement_U A\cap\complement_U B$，$\complement_U(A\cap B)=\complement_U A\cup\complement_U B$ 完成复合命题的否命题. 即"或"变为"且"，"且"变为"或". 但"不是偶数"，不能写成"奇数"，因为还有可能是无理数等其他数.

解　逆命题：若 $a+b$ 是偶数，则 a、b 都是偶数；

否命题：若 a、b 不都是偶数，则 $a+b$ 不是偶数；

逆否命题：若 $a+b$ 不是偶数，则 a、b 不都是偶数.

原命题与逆否命题为真命题，逆命题与否命题为假命题. 由命题的等价性，只要证明原命题为真命题，逆命题为假命题. 设 $a=2m$，$b=2n$，m、$n\in\mathbf{Z}$，则 $a+b=2(m+n)$，$m+n\in\mathbf{Z}$，故 $a+b$ 为偶数，即原命题为真命题；若 $a=b=1$，则 $a+b=2$ 为偶数，但 a、b 都是奇数，故其逆命题为假命题.

3. **充分条件与必要条件**

若 A 成立，则 B 也成立，称 A 是 B 成立的充分条件，即若 $A\Rightarrow B$，则称 A 是 B 成立的充分条件. 反之，若 B 成立，则 A 成立，即若 $B\Rightarrow A$，则称 A 是 B 的必要条件. 若 A 既是 B 成立的充分条件，又是 B 成立的必要条件，即 $A\Leftrightarrow B$，则称 A 是 B 成立的充分必要条件（即充要条件）. 例如："$x>1$"是"$x^2>1$"的充分非必要条件；"$\frac{1}{x}<1$"是"$x>1$"的必要非充分条件；"$x^2>1$"是"$|x|>1$"的充要条件.

充分条件、必要条件的判别常有三种方法：

第一种方法是根据定义. 在用此法时，首先要分清什么是条件，什么是结论，是谁推导出谁，否则会发生错误.

第二种方法是根据集合关系. 若 $A\subsetneqq B$，则 A 是 B 成立的充分非必要条件；B 是 A 成立的必要非充分条件；若 $A=B$，则 A 是 B 成立的充要条件.

第三种方法是判别与其等价的逆否命题，即 $A\Rightarrow B$ 等价于 $\overline{B}\Rightarrow\overline{A}$.

例 3 已知 $P=\{x\,|\,|x-a|<4\}$，$Q=\{x\,|\,x^2-4x+3<0\}$，且 $x\in P$ 是 $x\in Q$ 的必要条件，求实数 a 的取值范围.

分析："$x\in P$ 是 $x\in Q$ 的必要条件"的充要条件是"$Q\subseteq P$".

解 $P=\{x\,|\,a-4<x<a+4\}$，$Q=\{x\,|\,1<x<3\}$，

因为 $x\in P$ 是 $x\in Q$ 的必要条件，即当 $x\in Q$ 时，有 $x\in P$，所以 $Q\subseteq P$.

$\therefore$ $a-4\leqslant 1<3\leqslant a+4$，$-1\leqslant a\leqslant 5$.

例 4 在 $M=\{x\,|\,|x+1|+|x-3|>8\}$，$P=\{x\,|\,x^2+(a-8)x-8a\leqslant 0\}$的前提下：

(1) 求 a 的一个值，使它成为 $M\cap P=\{x\,|\,5<x\leqslant 8\}$的一个充分非必要条件；

(2) 求 a 的一个取值范围，使它成为 $M\cap P=\{x\,|\,5<x\leqslant 8\}$的一个必要非充分条件.

分析：不等式 $|x+1|+|x-3|>8$ 可用分段讨论法，也可用两数差的绝对值的几何意义求解. 求解本例的关键在于正确理解 $M\cap P=\{x\,|\,5<x\leqslant 8\}$ 的含义；(1)、(2)的答案均不唯一.

解 $M=\{x\,|\,x<-3$ 或 $x>5\}$，$P=\{x\,|\,(x+a)(x-8)\leqslant 0\}$.

(1) 由图 1－3 可知：当 $-3\leqslant -a\leqslant 5$，即 $-5\leqslant a\leqslant 3$ 时，有 $M\cap P=\{x\,|\,5<x\leqslant 8\}$. 故可取 $a=0$.

而由 $M\cap P=\{x\,|\,5<x\leqslant 8\}\not\Rightarrow a=0$.

所以，$a=0$ 是 $M\cap P=\{x\,|\,5<x\leqslant 8\}$的一个充分非必要条件.

图 1－3

(2) 由(1)可知：$-5\leqslant a\leqslant 3\Leftrightarrow M\cap P=\{x\,|\,5<x\leqslant 8\}$. 所以，$a\leqslant 3$ 是 $M\cap P=\{x\,|\,5<x\leqslant 8\}$的一个必要非充分条件.

说明 $M\cap P=\{x\,|\,5<x\leqslant 8\}$的充要条件为 $-5\leqslant a\leqslant 3$. 集合 $\{a\,|\,-5\leqslant a\leqslant 3\}$ 的任何一个真子集，如 $\{a\,|\,a=0\}$，$\{a\,|\,a=1\}$ 等，都是 $M\cap P=\{x\,|\,5<x\leqslant 8\}$的充分非必要条件；而真包含集合 $\{x\,|\,-5\leqslant a\leqslant 3\}$ 的任一集合，如 $\{a\,|\,a\leqslant 3\}$，$\{a\,|\,a\leqslant 5\}$ 等都是 $M\cap P=\{x\,|\,5<x\leqslant 8\}$的必要非充分条件.

例 5 "$x\neq\frac{\pi}{4}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$"是"$\tan x\neq 1$"成立的 ( )

(A) 充分非必要条件；　　　　　　(B) 必要非充分条件；

(C) 充要条件；　　　　　　　　(D) 既非充分又非必要条件.

分析：如果条件与结论是以否定形式出现，一般可用第三种方法（等价命题）判别，即只须判别“$\tan x=1$”是“$x=\frac{\pi}{4}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$”成立的什么条件. 易知“$\tan x=1$”是“$x=\frac{\pi}{4}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$”成立的必要非充分条件.

解　选(B).

例 6　在解不等式组$\begin{cases}0<x-a<1,\\0<x+a<1\end{cases}$时，有位学生作如下解答：

第一步，两式相加，得　$0<2x<2$；

第二步，由除法性质，得　$0<x<1$；

第三步，得不等式组的解集为　$\{x|0<x<1\}$.

以上三步骤，有无错误？若错，错在哪一步？说明原因，并指出不等式组的解集与集合$\{x|0<x<1\}$的关系，写出正确的解题过程.

分析：求方程或不等式（组）的解（集）时，每一步骤要求是同解变形，即互为充要条件，否则会使解（集）扩大或缩小.

解　错在第一步，这是利用不等式的加法性质，即 $a>b, c>d\Rightarrow a+c>b+d$. 此性质是一个充分非必要条件，不是充要条件，故不等式组的解集是集合$\{x|0<x<1\}$的真子集. 正确的解题过程是：

原不等式组可化为$\begin{cases}a<x<1+a,\\-a<x<1-a.\end{cases}$

当 $1+a\leqslant -a$，即 $a\leqslant -\frac{1}{2}$ 时，原不等式组的解集为$\varnothing$；

当 $-a<1+a$，且 $-a>a$，即 $-\frac{1}{2}<a<0$ 时，原不等式组的解集为$\{x|-a<x<1+a\}$；

当 $-a\leqslant a$，且 $a<1-a$，即 $0\leqslant a<\frac{1}{2}$ 时，原不等式组的解集为$\{x|a<x<1-a\}$；

当 $1-a\leqslant a$，即 $a\geqslant \frac{1}{2}$ 时，原不等式组的解集为$\varnothing$.

综上所述，当 $a\leqslant -\frac{1}{2}$ 或 $a\geqslant \frac{1}{2}$ 时，原不等式组的解集为$\varnothing$；

当 $-\frac{1}{2}<a<0$ 时，原不等式组的解集为$\{x|-a<x<1+a\}$；

当 $0\leqslant a<\frac{1}{2}$ 时，原不等式组的解集为$\{x|a<x<1-a\}$.

【基础练习】

练　习　二

一、填空题：

1. “$x^2=1$”是“$x=1$”成立的__________条件.

2. 若集合 $M=\{x|x>2\}$，$N=\{x|x<3\}$，则“$x\in M$ 或 $x\in N$”是“$x\in M\cap N$”的______条件.

3. 若命题 p 为 $|2x-3|<1$，命题 q 为 $x(x-3)<0$，则 p 是 q 的__________条件.

4. “$a=0$”是“复数 $z=a+b\mathrm{i}(a、b\in\mathbf{R})$为纯虚数”的__________条件.

5. 若 A 是 B 的必要非充分条件，C 是 B 的充要条件，D 是 C 的充分非必要条件，则 D 是 A 的__________条件.

6. a、b、c 成等比数列是 $b^2=ac$ 的__________条件.

7. “a、b 都不是偶数”是“$a+b$ 不是偶数”的__________条件.

二、选择题：

8. “$\frac{1}{x}<1$”是“$x>1$”的 (　　)

(A) 充分非必要条件；　(B) 必要非充分条件；

(C) 充要条件；　(D) 既非充分又非必要条件.

9. 若 a、b 为实数，则“$a+b>2$ 且 $ab>1$”是“$a>1$ 且 $b>1$”成立的 (　　)

(A) 充分非必要条件；　(B) 必要非充分条件；

(C) 充要条件；　(D) 既非充分又非必要条件.

10. 若 a、b、c 为任意实数，则在下列命题中，真命题是 (　　)

(A) “$ac>bc$”是“$a>b$”的必要条件；　(B) “$ac=bc$”是“$a=b$”的必要条件；

(C) “$ac>bc$”是“$a>b$”的充分条件；　(D) “$ac=bc$”是“$a=b$”的充分条件.

11. 若 a_1、b_1、c_1、a_2、b_2、c_2 均为实数且都不为零，则“$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$”是“$a_1x^2+b_1x+c_1>0$ 与 $a_2x^2+b_2x+c_2>0$ 解集相同”的 (　　)

(A) 充分非必要条件；　(B) 必要非充分条件；

(C) 充要条件；　(D) 既非充分又非必要条件.

三、解答题：

12. 求关于 x 的方程 $ax^2+2x+1=0$ 至少有一个负实根的充要条件.

13. 设 $y=f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，求证：$x=a$ 是函数 $y=f(x)$ 图像的一条对称轴的充要条件是 $f(a+x)=f(a-x)(x\in\mathbf{R})$.

三　不等式的性质及解法

【复习目标】

1. 理解用两个实数差的符号来规定两个实数大小的意义，建立不等式研究的基础.

2. 通过类比等式的性质得到不等式的基本性质，并能加以证明.

3. 掌握用区间表示集合的方法，掌握一元二次不等式、分式不等式及含有绝对值的不等式的解法；会利用转化思想解不等式.

【复习要点】

1. 不等式的性质

不等式具有以下性质：

(1) 传递性　若 $a>b$，$b>c$，则 $a>c$.