中央

高等微積分

—原理及題解—

黃子琴　譯著

MURRAY R. SPIEGEL　原著

THEORY AND PROBLEMS of ADVANCED CALCULUS

中央圖書出版社出版

序

通常稱爲“高等微積分”的這個主題對於不同的人來說表示不同的事物。有些人認爲，實際上它是初等微積分加上定理的嚴密敍述與證明。而另一些人覺得，它是很重要但在初等課程中却無法包含的各種特殊高等課題。

本書已在這兩種想法間作了合理的折衷，以使其能適合各種讀者。書中前面幾章是將初等微積分中已有的基本觀念加以複習與延伸。這對於那些已忘記過去所學微積分而需要恢復記憶的人很有價值。它也可提供受過初等微積分中不同種類課程的讀者一個共同的基礎。以後幾章要提出一些對於未來想成爲專精於所學的科學家、工程師、與數學家是基本的特殊高等課題。

本書的設計是用作高等微積分正式課程的敎本或所有現有標準敎本的補充讀物。但它也證明對於接受物理、工程、或其它應用高等數學方法方面課程的學生很有用。

每一章開頭列出一些相關定義、原理、與定理的明晰扼要敍述，連同充份的實例與其它解說材料。隨後便是一系列精選分級的解答題以及補充題。解答題用來說明與擴大已述的理論，而將焦點放在那些可以消除學生疑慮不安的細微之處，以及重複對於有效學習十分重要的基本原理。解答題中也包含許多定理的證明與基本結果的導出。具有答案的補充題可用作每一章中材料的完整複習。

書中的課題包含一或多變數函數的微分與積分以及它們的應用。適於簡明記法與幾何上和物理上解釋的向量方法提出較早，以便每當它們有助於激發和了解時加以使用。特殊的課題有線與面積分和積分定理、無窮級數、瑕積分、加瑪與貝它函數，以及傅立葉級數。有關傅立葉積分、橢圓積分、與複變數函數諸章對於學習高等工程學、物理學、與數學證明極爲有用。

本書所包含的材料比大多數課程中的要多。這樣做的目的是要使本書的應用更具彈性，提供更有用的參考，以及進一步激發讀者對書中課題的興趣。

黃子琴 譯

中華民國七十六年十月

目　錄

第一章

數

集　合

數學中具有特定性質的一組物件，稱爲**集合**(Set)，如像所有實數的集合，平面內所有圓的集合，一已知方程式所有解的集合，以及英文中所有字母 A，B，C，D，…，Z 的集合等，這種集合的觀念即爲數學的基礎。集合的個別物件是稱爲**元素**(Member 或 Element)。集合的任何部份便稱爲已知集合的**子集合**(Subset)，例如 A，B，C 即爲 A，B，C，D，… Z 的子集合。不含任何元素的集合是稱爲**空集合**(Empty set)或**零集合**(Null set)。

實　數

下列幾種數都是學生所熟悉的。

1. 自然數 $1,2,3,4,\cdots$，也稱爲正整數，是用來將集合的元素計數的。任何兩個自然數 a 與 b 的和 $a+b$ 以及積 $a\cdot b$(或 ab)，也是自然數。換句話說，自然數的集合在加法與乘法運算下，是封閉的，或者說，此集合對於這些運算可滿足**封閉性**(Closure property)。
2. 負數 -1，-2，-3，… 與 0，爲方程式 $x+b=a$ 的解，式中 a 與 b 是任何自然數。這可得出減法運算或加法的逆運算，而可寫成 $x=a-b$。

   正整數，負整數，與零的集合，是稱爲整數集合。
3. 有理數或分數，如像 $\frac{2}{3}$，$-\frac{5}{4}$，…，爲方程式 $bx=a$ 的解，式中 a 與 b 是整數，但 $b\neq 0$。這可得出除法運算或乘法的逆運算，而可寫成 $x=a/b$。

   整數的集合爲有理數的子集合，因爲整數相當於此式在 $b=1$ 時的有理數。
4. 無理數，如像 $\sqrt{2}$ 和 π，是不能以 $\frac{a}{b}$ 表示的數，式中 a 與 b 爲整數，但 $b\neq 0$。

   有理數與無理數的集合，是稱爲實數的集合。

實數的小數表示

任何實數都可用小數形式表示，如像 $17/10=1.7$, $9/100=0.09$, $1/6=0.16666\ldots$ 等

。在有理數的情況中，小數展式爲有盡或無盡，當爲無盡時，展式中便有一個或一組數字最後不斷循環下去，例如 $\frac{1}{7}=0.142857\,142857\,142\ldots$ 。在無理數的情況中，如像 $\sqrt{2}=1.41423\ldots$ ，或 $\pi=3.14159\ldots$，便無這種循環現象發生。但小數展式永遠可當作是無盡的，因爲 1.375 是與 1.37500000... 或 1.3749999... 相同的。循環小數有時可在循環的數字上以點來表示，例如，$\frac{1}{7}=0.\dot{1}\dot{4}\dot{2}\dot{8}\dot{5}\dot{7}$, $\frac{19}{6}=3.1\dot{6}$ 。

十進數系統是使用十個數字 $0,1,2,\ldots,9$ 。但也可能設計含較多或較少數字的數字系統，如像二進數系統便只使用兩個數字 0 與 1（參看題 32 與 33）。

實數的幾何表示

實數在稱爲實軸的直線上以點的幾何表示(正如在下面圖中所顯示的)，學生也是熟知的。對於每一實數，便在直線上有一點(且只有一點)相對應，反過來也是一樣，換句話說，在實數集合與直線上的點集合間，有一對一對應。由於這點，故通常可把點與數交換使用。

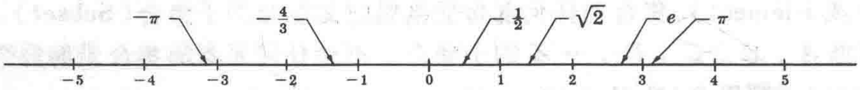

圖 1-1

0 右邊的實數集合，是稱爲正數集合； 0 左邊的實數集合，便稱爲負數集合，而 0 本身並非正或負。

在直線上任何兩個有理數(或無理數)間，有無窮多個有理數(或無理數)存在，因此，通常將有理數(或無理數)集合稱爲**遍密集合**（Everywhere dense set）。

實數運算

如果 a , b , c 是屬於實數集合 R 的，那麼

1.	$a+b$ 與 ab 便屬於 R	封閉定律
2.	$a+b=b+a$	加法交換率
3.	$a+(b+c)=(a+b)+c$	加法結合率
4.	$ab=ba$	乘法交換律
5.	$a(bc)=(ab)c$	乘法結合律
6.	$a(b+c)=ab+ac$	分配律

7. $a+0=0+a=a,\ 1\cdot a=a\cdot 1=a$

   故 0 是稱爲加法**單位元素**（Identity），1 是稱爲乘法單位元素。

8. 對於任何 a ，R 中有一數 x 使得 $x+a=0$ 。

   因此，x 是稱爲加法 a 的逆，而以 $-a$ 表示。

9. 對於任何 $a \neq 0$，R 中有一數 x 使得 $ax = 1$ 。

於是，x 是稱爲乘法 a 的逆，而以 a^{-1} 或 $1/a$ 來表示。

滿足這些關係的數，便可依照通常代數法則運算。一般來說，任何集合，如像 R，當其元素滿足上面各關係時，便稱爲場(Field)。

不等式

如果 $a-b$ 爲正數，便說 a 大於 b，或 b 小於 a，而可分別寫成 $a>b$ 或 $b<a$。但當 $a=b$ 的可能性也存在時，便寫成 $a \geqq b$ 或 $b \leqq a$。在幾何上，如果在實軸上 a 是在 b 的右邊，便 $a>b$ 。

例子：$3<5$ 或 $5>3$；$-2<-1$ 或 $-1>-2$；$x \leqq 3$ 表示 x 是等於 3 或小於 3 的實數。

如果 a，b，與 c 爲任何已知實數，那麼

1. $a>b$，$a=b$，或 $a<b$　　**三一律**(Trichotomy law)
2. 如果 $a>b$ 與 $b>c$，便 $a>c$　　**遞移律**(Transitivity law)
3. 如果 $a>b$，便 $a+c>b+c$
4. 如果 $a>b$ 與 $c>0$，便 $ac>bc$
5. 如果 $a>b$ 與 $c<0$，便 $ac<bc$

實數的絕對值

實數 a 的絕對值，以 $|a|$ 表示，當 $a>0$ 時，便定義爲 a，$a<0$ 時，便定義爲 $-a$，以及 $a=0$ 時，便爲 0 。

例子：$|-5|=5$, $|+2|=2$, $|-\frac{3}{4}|=\frac{3}{4}$, $|-\sqrt{2}|=\sqrt{2}$, $|0|=0$.

1. $|ab| = |a||b|$　　或　　$|abc\cdots m| = |a||b||c|\cdots|m|$
2. $|a+b| \leqq |a|+|b|$　　或　　$|a+b+c+\cdots+m| \leqq |a|+|b|+|c|+\cdots+|m|$
3. $|a-b| \geqq |a|-|b|$

在實軸上任何兩點(實數)間的距離爲 $|a-b|=|b-a|$ 。

指數與根

實數 a 以其本身 p 次的乘積 $a \cdot a \ldots a$，是以 a^p 表示，式中 p 稱爲指數，a 稱爲底。於是，下列法則適用。

1. $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$　　3. $(a^p)^r = a^{pr}$

2. $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$　　4. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^p = \dfrac{a^p}{b^p}$

這些式子只要是不以零除，便可擴展到任何實數。特別是利用式 2，分別以 $p=q$ 與 $p=0$，便可得到定義 $a^0=1$，$a^{-q}=1/a^q$。

如果 $a^p=N$，式中 p 爲正整數，便可將 a 稱爲 N 的 p 次根，寫成 $\sqrt[p]{N}$。但通常可能有 N 的一個以上的實 p 次根。例如，由於 $2^2=4$ 與 $(-2)^2=4$，因此，有 4 的兩個實平方根，即 2 與 -2。而正平方根以 $\sqrt{4}=2$ 表示，負平方根以 $-\sqrt{4}=-2$ 表示。如果 p 與 q 爲正整數，便可定義 $a^{p/q}=\sqrt[q]{a^p}$。

對　數

當 $a^p=N$ 時，p 便稱爲 N 對於底 a 的對數，寫成 $p=\log_a N$。如果 a 與 N 爲正，且 $a\neq 1$，p 便只有一個實值。故下列法則適用。

$$1.\ \log_a MN = \log_a M + \log_a N \qquad 2.\ \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$
$$3.\ \log_a M^r = r \log_a M$$

通常，實用的底有兩種，**布里格系**(Briggsian system)使用底 $a=10$，**訥丕而系**(Napierian system)使用自然底 $a=e=2.71828...$。

實數系的公理基礎

此數系在邏輯上可從一組基本**公理**(Axiom)或不證自明的眞理，如像實數運算中的敍述 1-9 開始，而予以建立。

如果假定自然數與加法和乘法的運算爲已知(當然還可進一步從集合觀念開始)，便可發現，以 R 爲自然數的集合時，實數運算中的敍述 1-6 是適用的，而 7-9 不適用。

把敍述 7-8 當作額外的需求，而將數 $-1, -2, -3, ...$ 與 0 納入。然後，從敍述 9，將有理數納入。

這些數的運算，可利用公理 1-6 來加以定義，而 R 現在爲整數集合。於是，便可得出 $(-2)(-3)=6$，$-(-4)=4$，$(0)(5)=0$ 等敍述的證明，這些結果在初等數學中通常都視爲當然。

此外，也可將整數的不等式與有理數的不等式納入。例如，如果 a, b, c, d 爲正整數，那麼只有當 $ad>bc$ 時才會 $a/b>c/d$，同樣地，也可擴展到負整數。

一旦有了有理數的集合與其不等式的法則，便可將它們在實軸上以點定出大小順序，正如在前面所表示的。於是，可顯示，在直線上有一些點，並不代表有理數(如像 $\sqrt{2}, \pi$ 等)。這些無理數可使用**狄地肯分割**(Dedekind cuts)的觀念(參看題 34)來加以定義。從此定義可證明，通常的代數法則可應用到無理數上，且不可能再有其它實數。

點集合，區間

位於實軸上的一組點(實數)，是稱爲一維點集合。使得 $a \leqq x \leqq b$ 的 x 點集合，稱爲**閉區間**(Closed interval)，而以 $[a, b]$ 表示。$a<x<b$ 集合是稱爲**開區間**(Open interval)，而以 (a, b) 表示。$a<x \leqq b$ 與 $a \leqq x<b$ 集合，稱爲半開或半閉區間，分別以 $(a, b]$ 與 $[a, b)$ 表示。

符號 x，可代表一集合的任何數或點，稱爲無數。已知數 a 或 b 是稱爲常數。

例子：使得 $|x|<4$，即 $-4<x<4$ 的所有 x 點集合，爲開區間，是以 $(-4,4)$ 表示。

$x>a$ 集合也可用 $a<x<\infty$ 表示，此種集合是稱爲無限區間或**無界區間**(Unbounded interval)。同樣地，$-\infty<x<\infty$ 代表所有的實數 x。

可數集合

一個集合，如果其元素可與自然素排列成 1-1 對應時，便稱爲**可數**(Countable 或 clenumerable)集合。

例子：偶自然數 2, 4, 6, 8, ... 爲可數集合，因爲它們可排成下面所顯示的 **1-1** 對應。

已知集合	2	4	6	8	...
	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	
自然數	1	2	3	4	...

一個集合，如果它可與其本身的子集合排列成 1-1 對應時，便稱爲無限集合。但當無限集合爲可數時，便稱爲可數無限集合。

有理數的集合即爲可數無限集合，而無理數或所有實數的集合便是非可數無限集合(參看題 17-20)。

集合中元素的數目，是稱爲其**基數**(Cardinal number)。可數無限集合是指定基數 $\aleph_0$(希伯來文字母**阿列夫零**(Aleph-null)。實數集合(或可排列成與此集合 1-1 對應的任何集合)是指定基數 C，稱爲**閉連集基數**(Cardinality of continuum)。

鄰　近

使得 $|x-a|<\delta$，$\delta>0$ 的所有 x 點集合，是稱爲 a 點的 δ **鄰近**(Neighborhood)。使得 $0<|x-a|<\delta$(不含 $x=a$)的所有 x 點集合，是稱爲去心的 a 點的 δ 鄰近。

極限點

一數集合的**極限點**(Limit point)或**聚點**(Accumulation point 或 cluster point)，是一數 l，使得每個去心的 l 的 δ 鄰近，都包含此集合的元素。換句話說，對於任何 $\delta>0$，不論多麼小，永遠可求得此集合中不等於 l，但使得 $|x-l|<\delta$ 的一元素 x。從逐步考慮 δ 的較小值便可看出，這樣的 x 值必定有無限多個。

有限集合不可能有極限點。無限集合可能有或可能無極限點。因此，自然數無極

限點，而有理數集合有無限多個極限點。

包含所有極限點的集合，是稱爲閉集合。有理數的集合不是閉集合，因爲如像極限點 $\sqrt{2}$，不是集合的元素(題 5)。不過，$0 \leqq x \leqq 1$ 集合是閉集合。

邊 界

如果對於一集合的所有數 x，有使得 $x \leqq M$ 的一數 M 存在，那麼，此集合便是**上方有界的**(Bounded above)，而 M 是稱爲**上界**(Upper bound)。同樣地，如果對於所有 x，有 $m \leqq x \leqq M$ 存在，此集合便稱爲**有界的**(Bounded)。

如果 $\underline{M}$ 是一數，使得集合無元素大於 $\underline{M}$，但至少有一元素對於每個 $\epsilon > 0$ 時，大於 $\underline{M} - \epsilon$，那麼，$\underline{M}$ 便稱爲集合的**最小上界**(Least upper bound, l.u.b.)。同樣地，如果集合無元素小於 $\overline{m}$，但至少有一元素對於每個 $\epsilon > 0$ 時，小於 $\overline{m} + \epsilon$，那麼，$\overline{m}$ 便稱爲集合的**最大下界**(Greatest lower bound, g.l.b.)。

瓦士曲士-波查諾定理

瓦士曲士-波查諾定理(Weierstrass-Bolzano theorem)表示，每個有界無限集合至少都有一個極限點。這將在第三章題 23 中加以證明。

代數數與超越數

當數 x 是多項式方程式

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0 \tag{1}$$

的解時，它便稱爲**代數數**(Algebraic number)，上式中 $a_0 \neq 0, a_1, a_2, \dots, a_n$ 都是整數，n 是正整數，稱爲方程式的次。當一數不能表示爲含整數係數的任何多項式方程式的解時，它便稱爲**超越數**(Transcendental number)。

例子： $\frac{2}{3}$ 與 $\sqrt{2}$ 分別是 $3x-2=0$ 與 $x^2-2=0$ 的解，故它們爲代數數。

數 π 與 e 可證明爲超越數。但如像 $e\pi$ 或 $e+\pi$ 的某些數還無法決定是否爲代數數。代數數的集合爲可數無限集合(參看題 23)，但超越數的集合爲非可數無限集合。

複數系

由於無實數 x 滿足多項式方程式 $x^2+1=0$ 或相似方程式，因此，採用複數的集合。

複數可當作是具有 $a+bi$ 的形式，式中 a 與 b 是實數，稱爲實部與虛部，$i=\sqrt{-1}$ 是稱爲虛數單元。兩個複數 $a+bi$ 與 $c+di$，只有當 $a=c$ 與 $b=d$ 時才相等。實數可當作是複數的集合以 $b=0$ 時的子集合。複數 $0+0i$ 是相當於實數 0。

$a+bi$ 的絕對值或模數(Modulus)，是定義爲 $|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$ 。$a+bi$ 的共軛複數(Complex conjugate)，是定義爲 $a-bi$ 。複數 z 的共軛複數通常是以 $\bar{z}$ 或 z^* 表示。

複數的集合也遵循實數運算中的法則1-9，因此，構成場。複數運算正如在實數的代數中一樣，當 i^2 發生時，便以 -1 代替。複數的不等式是無定義的。

從複數的公理基礎的觀點來看，需要把複數當作實數 a 與 b 的有序對(Ordered pair) (a,b) 處理，而遵循相當於實數運算中的那些法則。例如，定義 $(a,b)+(c,d) = (a+c,\ b+d)$, $(a,b)(c,d) = (ac-bd,\ ad+bc)$, $m(a,b) = (ma, mb)$, 等。於是，可求得 $(a,b) = a(1,0)+b(0,1)$ ，將此式與 $a+bi$ 相關聯，而 i 爲 $(0,1)$ 的符號。

複數的極式

如果在兩相互垂直的 $X'OX$ 與 $Y'OY$ 軸(即 x 與 y 軸)上，選擇實標度，正如下面圖1-2中所顯示的，便可在由這些直線所決定的平面內，以稱爲點的直角坐標的有序數對 (x,y) 定出任何點的位置。如像圖1-2中以 P, Q, R, S 與 T 所指示的各點的位置。

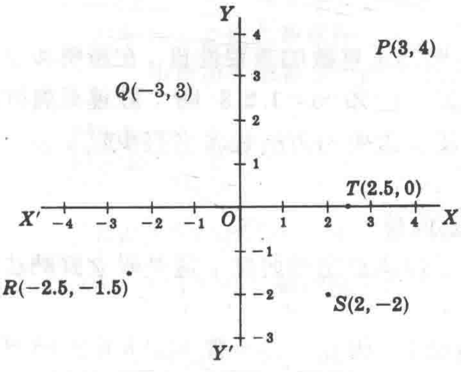

圖1-2

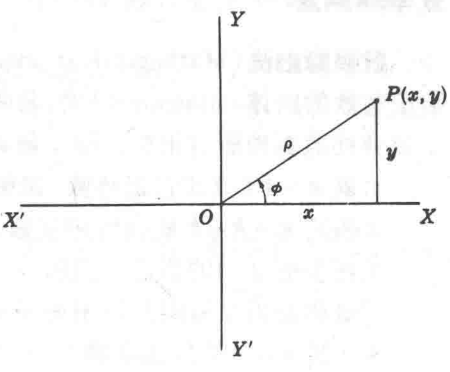

圖1-3

由於複數 $x+iy$ 可當作有序對 (x,y) 處理，故可將這些數在稱爲複平面或阿干圖示(Argand diagram)的 xy 平面內以點表示出來。從上面圖1-3可以看出，$x = \rho\cos\phi$，$y = \rho\sin\phi$，式中 $\rho = \sqrt{x^2+y^2} = |x+iy|$，$\phi$ 稱爲幅角(Amplitude 或 argument)，是直線 OP 與正 x 軸 OX 所成的角。於是，

$$z = x + iy = \rho(\cos\phi + i\sin\phi) \tag{2}$$

稱爲複數的極式(Polar form)，此式中 ρ 與 ϕ 是稱爲極坐標。有時，以 $\operatorname{cis}\phi$ 來代替 $\cos\phi + i\sin\phi$ 是很方便的。

如果 $z_1 = x_1+iy_1 = \rho_1(\cos\phi_1+i\sin\phi_1)$ 與 $z_2 = x_2+iy_2 = \rho_2(\cos\phi_2+i\sin\phi_2)$

便可證明

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2\{\cos(\phi_1+\phi_2) + i\sin(\phi_1+\phi_2)\} \tag{3}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\{\cos(\phi_1-\phi_2) + i\sin(\phi_1-\phi_2)\} \tag{4}$$

$$z^n = \{\rho(\cos\phi + i\sin\phi)\}^n = \rho^n(\cos n\phi + i\sin n\phi) \tag{5}$$

式中 n 爲任何實數 。方程式(5)有時是稱爲**棣馬佛定理**(De Moivre's theorem) 。此式可用來決定複數的根 。例如 ,如果 n 爲正整數 ,

$$\begin{aligned} z^{1/n} &= \{\rho(\cos\phi + i\sin\phi)\}^{1/n} \\ &= \rho^{1/n}\left\{\cos\left(\frac{\phi+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\phi+2k\pi}{n}\right)\right\} \qquad k=0,1,2,3,\ldots,n-1 \end{aligned} \tag{6}$$

從此式可以看出 ,一般地 , $z^{1/n}$ 有 n 個不同的值 。後面(第十一章)將證明 $e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$,式中 $e=2.71828\ldots$ 這式是稱爲**奧衣勒公式**(Euler's formula) 。

數學歸納法

數學歸納法(Mathematical induction)的原理爲正整數的重要性質 ,在證明涉及所有正整數的**敍述**(Statement)時,特別有用 ,例如 ,已知 $n=1,2,3$ 時 ,敍述是眞確的 ,但要知道對於所有正整數時 ,敍述是否爲眞確 。證明的方法包含下列步驟 。

1. 就 $n=1$ (或其它正整數)證明敍述 。
2. 假定 $n=k$ (k 是任何正整數)時 ,敍述爲眞確 。
3. 從步驟 2 中的假定 ,證明 $n=k+1$ 時 ,敍述必定爲眞確 。這是確立歸納法的證明部份 ,可能比較困難或不可能達成 。
4. 由於 $n=1$ 時敍述是眞確的[從步驟 1 得知] ,因此 ,從步驟 3 , $n=1+1=2$ 時 ,敍述必定爲眞確 ,於是 , $n=2+1=3$ 時 ,敍述必定爲眞確等 ,故對於所有正整數 ,敍述也必定爲眞確 。

解答題

數的運算

1. 如果 $x=4, y=15, z=-3, p=\frac{2}{3}, q=-\frac{1}{6}$,與 $r=\frac{3}{4}$,求 (a) $x+(y+z)$, (b) $(x+y)+z$ (c) $p(qr)$, (d) $(pq)r$, (e) $x(p+q)$ 的值 。

(a) $x+(y+z) = 4+[15+(-3)] = 4+12 = 16$

(*b*)　$(x+y)+z = (4+15)+(-3) = 19-3 = 16$

(*a*)與(*b*)是相等的事實顯示加法的結合律。

(*c*)　$p(qr) = \frac{2}{3}\{(-\frac{1}{6})(\frac{3}{4})\} = (\frac{2}{3})(-\frac{3}{24}) = (\frac{2}{3})(-\frac{1}{8}) = -\frac{2}{24} = -\frac{1}{12}$

(*d*)　$(pq)r = \{(\frac{2}{3})(-\frac{1}{6})\}(\frac{3}{4}) = (-\frac{2}{18})(\frac{3}{4}) = (-\frac{1}{9})(\frac{3}{4}) = -\frac{3}{36} = -\frac{1}{12}$

(*c*)與(*d*)是相等的事實顯示乘法的結合律。

(*e*)　$x(p+q) = 4(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}) = 4(\frac{4}{6}-\frac{1}{6}) = 4(\frac{3}{6}) = \frac{12}{6} = 2$

另一法： $x(p+q) = xp+xq = (4)(\frac{2}{3})+(4)(-\frac{1}{6}) = \frac{8}{3}-\frac{4}{6} = \frac{8}{3}-\frac{2}{3} = \frac{6}{3} = 2$，即使用分配律。

2. 說明爲何不能把 (*a*) $\frac{0}{0}$ (*b*) $\frac{1}{0}$ 當作數。

(*a*)　如果把 a/b 定義爲該數(當它存在時)，使得 $bx=a$，那麽，$0/0$ 便是該數 x，使得 $0x=0$。然而，這對所有數都是眞確的。而無 $0/0$ 可代表的唯一數，故把它當作是不定的。

(*b*)　正如在(*a*)中一樣，如果把 $1/0$ 定義爲該數 x(當它存在時)，使得 $0x=1$，那麽，便可結論，並無此數存在。

由於這些事實，因此，必須把除以零看成是無意義的。

3. 將 $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-2x-3}$ 簡化。

當消去的因式 $(x-3)$ 不爲零，即 $x\neq 3$ 時，$\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-2x-3} = \dfrac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x+1)} = \dfrac{x-2}{x+1}$。但當 $x=3$ 時，已知分數便是不定的。

有理數與無理數

4. 證明任何奇整數的平方都是奇整數。

任何奇整數都具有形式 $2m+1$，由於 $(2m+1)^2 = 4m^2+4m+1$ 是比偶整數多 1，故此結果眞確。

5. 證明無平方爲 2 的有理數。

以 p/q 是平方爲 2 的有理數，假定 p/q 爲最低項，即除了 ±1 以外，p 與 q 無整數公因數(有時將這些整數稱爲**互質**(Relatively prime))。

於是，$(p/q)^2=2,\ p^2=2q^2$，而 p^2 爲偶數。從題 4 可知，p 也爲偶數，因爲如果 p 是奇數，p^2 也會是奇數。故 $p=2m$。

將 $p=2m$ 代入 $p^2=2q^2$ 內，得出 $q^2=2m^2$，因此，q^2 爲偶數，q 也爲偶數。

結果，p 與 q 便具有公因數 2，而與它們無 ±1 以外的公因數的原來假定相反。由

於這個矛盾，故無平方為2的有理數。

6. 說明如何求得可使平方任意接近2的有理數。

假定限於正有理數。由於$(1)^2=1$與$(2)^2=4$，於是，選擇1與2間的有理數，如像1.1, 1.2, 1.3, . . . , 1.9 。

但$(1.4)^2=1.96$與$(1.5)^2=2.25$，可考慮1.4與1.5間的有理數，如像1.41, 1.42, . . . , 1.49 。

以此方式繼續下去，便可逐步得到較接近的有理近似，如像$(1.414213562)^2$是小於2，而$(1.414213563)^2$是大於2 。

7. 已知方程式 $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$，式中$a_0, a_1, \ldots, a_n$為整數，$a_0$和$a_n \neq 0$。證明如果要此方程式具有有理根$p/q$，那麼，$p$便必須整除$a_n$與$q$必須整除$a_0$。

由於p/q為一根，故代入已知方程式內並乘以q^n後，便得到

$$a_0p^n + a_1p^{n-1}q + a_2p^{n-2}q^2 + \cdots + a_{n-1}pq^{n-1} + a_nq^n = 0 \tag{1}$$

或除以p，

$$a_0p^{n-1} + a_1p^{n-2}q + \cdots + a_{n-1}q^{n-1} = -\frac{a_nq^n}{p} \tag{2}$$

但(2)的左邊是整數，右邊也必須是整數。並且，p與q為互質，於是，p不能整除q^n，因此，必定能整除a_n 。

相似地，將(1)的第一項移到右邊並除以q，便可證明q必定能整除a_0 。

8. 證明 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 不可能為有理數。

如果 $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$，那麼，$x^2=5+2\sqrt{6}$, $x^2-5=2\sqrt{6}$，平方，$x^4-10x^2+1=0$。根據題7，此方程式的僅有可能有理根為 ±1，但這些根並不滿足此方程式。因此，滿足此方程式的 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$，不可能為有理數。

9. 證明任何兩個有理數間，還有另一個有理數存在。

如果a與b為有理數，那麼，$\dfrac{a+b}{2}$便是a與b間的另個有理數。

要證明這點，假定 $a<b$。然後將兩邊加a，得出 $2a<a+b$，或 $a<\dfrac{a+b}{2}$ 。

同樣地，將兩邊加b，得到 $a+b<2b$，或 $\dfrac{a+b}{2}<b$ 。

於是，$a<\dfrac{a+b}{2}<b$ 。

要證明 $\dfrac{a+b}{2}$ 是有理數，以$a=\dfrac{p}{q}$與$b=\dfrac{r}{s}$，式中 p, q, r, s 為整數，且$q\neq0$, $s\neq0$。

因此，$\frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{q}+\frac{r}{s}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{ps}{qs}+\frac{qr}{qs}\right) = \frac{ps+qr}{2qs}$ 爲有理數。

不等式

10. $x+3(2-x) \geqq 4-x$ 時，x 的值爲何？

$x+3(2-x) \geqq 4-x$ 即 $x+6-3x \geqq 4-x$, $6-2x \geqq 4-x$, $6-4 \geqq 2x-x$, $2 \geqq x$, 或 $x \leqq 2$。

11. $x^2-3x-2 < 10-2x$ 時，x 的值爲何？

此不等式即

$$x^2-3x-2-10+2x < 0, \quad x^2-x-12 < 0 \quad 或 \quad (x-4)(x+3) < 0$$

最後一式只有在下列情況中成立。

情況 1：$x-4>0$ 與 $x+3<0$，即 $x>4$ 與 $x<-3$。這是不可能的，因爲 x 不可能大於 4 與小於 -3 兩者。

情況 2：$x-4<0$ 與 $x+3>0$，即 $x<4$ 與 $x>-3$，或 $-3<x<4$，這是可能的。

因此，對於 $-3<x<4$ 的所有 x 的集合，此不等式都眞確。

12. 如果 $a \geqq 0$ 與 $b \geqq 0$，證明 $\frac{1}{2}(a+b) \geqq \sqrt{ab}$。

通常一種證明的方法是，假定所求的結果爲眞確的，於是，執行有效的運算，直至得到已知爲眞確的結果爲止。再將這些步驟反過來(假定這是可能的)，便得到證明。

在此題中，以所求的結果開始，逐步得到 $a+b \geqq 2\sqrt{ab}$, $(a+b)^2 \geqq 4ab$ 或 $a^2-2ab+b^2 \geqq 0$，即 $(a-b)^2 \geqq 0$，此式已知爲眞確。再將這些步驟反過來，便證明了所求的結果。

另一法：由於 $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqq 0$，於是，$a-2\sqrt{ab}+b \geqq 0$，或 $\frac{1}{2}(a+b) \geqq \sqrt{ab}$。

此結果可推廣到 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$，式中 $a_1,\ldots,a_n$ 爲非負數。這式左邊與右邊分別稱爲 $a_1,\ldots,a_n$ 的算術平均與幾何平均。

13. 如果 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 與 $b_1,b_2,\ldots,b_n$ 爲任何實數，證明**席瓦茲不等式**(Schwarz's inguality)。

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2 \leqq (a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)$$

對於所有實數 λ，

$$(a_1\lambda+b_1)^2 + (a_2\lambda+b_2)^2 + \cdots + (a_n\lambda+b_n)^2 \geqq 0$$

將此式展開與集項，

$$A^2\lambda^2 + 2C\lambda + B^2 \geqq 0 \tag{1}$$

式中

$$A^2 = a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2, \quad B^2 = b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2, \quad C = a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n \tag{2}$$