查理斯密

小代數學

連江陳文譯

著者序言

本書之作　原爲取便於初學，務在以最簡單的方法，解釋代數學的原理　因此特別注意到原則運算的解釋　和法則方面的證明，所以積極避免當時流行各書的宿弊　而求闢一新的途徑　若有人說新法不易瞭解，那我是不敢相信的。

初等教科書的著述，原爲誘導學者學習的途徑　所以務在指明基礎的理法，而使其免除不注意的憂慮　假如務以簡略爲便　則大失其教育旨趣　吾則積極避免之。

爲欲完成適當而且完備的初等教科書，所以二項式定理，以正整指數爲限，至於由本式釋以求出的級數或展開式等，那是不屬於本書範圍以內的，故不列述。

吾將欲從速編出一極完善的代數書——大代數，但以本書爲先導。

本書所有例題　曾經愼[illegible]選，所以能解明或演一切的要理；更且就代數式的[illegible]而[illegible]；又因顧求得種種適當的利益，而參以近數年來在劍橋（[illegible]RIDGE）大學所課之一切試驗　並依當地方試驗長官許可，將[illegible]該地方試驗的題目凡合於問題之應用者，[illegible]行選擇列入　又雜題各例，在全書內的排列與放置　吾敢自信均甚善，無可批評。

分神代爲校閱論例，並與有助言之力者，爲余友某某諸氏　余不勝深感！而對於「白楊」女士，與大學「畢爾」君等，更是鳴謝不已。

奮理斯密識於「須德黎」專門學校

一千八百八十六年一月

目　次

查 理 斯 密

小 代 數 學

—————(〇)—————

第 一 編

定 義

1. 代數學 代數學是研究數理的學科.

算術是用數字表數，所以一個數字祇有一個值，其意義係以一種爲限. 如 1,2,3,4,5,6,7,8,9，其意義僅是一，二，三，四，五，六，七，八，九.

代數學則用數字及字母表數，數字的值，和算術相同，字母的值，可以是無論如何的數.

代數學所用的字母，是小寫的羅馬字母，即

a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,y,z,

二十六個字母，爲便利起見，常寫用草體，即

$a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,y,z,$

有時兼用大寫的羅馬字母，及小寫的希臘字母.

大寫的羅馬字母，如ABCDEFGHIJKLMNOPQRSUVWTXYZ

間，表示以右數乘左數.

如6×3，示以3乘6，同理，$a\times b$，示以b乘a 又$a\times b\times c$，表示以b乘a更以c乘其結果.

乘法的符號，在二文字之間或數字與字母之間者，常省略其號而並記之，也有用一點代替的.

如ab或a,b,其意義與$a\times b$同，又2abc或2,a,b,c,其意義與$2\times a\times b\times c$同.

6 除號 即÷,(讀作裨「by」，或讀被……除)放在兩數之間，表示左邊數被右邊數除.

如$6\div3$，是表示6被3除，同理，$a\div b$，表示a被b除，又$a\div b\times c$表示a被b除，更以c乘其結果.

除法的演算，常在被除數之下畫一橫線，並寫除數於其下，式表示之.

如$a\div b$，可代以$\frac{a}{b}$.

乘除的運算，也是始於左而次及於右

7 積及因數 諸數相乘的結果，叫作連乘積，或單稱之為積此諸數就叫作積的因數.

如 2abc 為積，而2,a,b,c，各為積的因數.

8 係數 分積的因數為二項，其中的一項，各為他一項的係數.

如3abx，3為abx的係數，又3a為bx的係數，又3ab為x的係數.

又積因數內的數字，稱為其他諸因數的數字係數.

如3abx，3就是abx的數字係數.

習 題 一

求以下各式的數值.

1. $7+6+4$, 2. $5-3+4$, 3. $11+7-12-6$.

4. $7\times6\times4$, 5. $5\div3\times4$, 6. $11\times7\div12\div6$.

設 $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=4$，求以下各式的數值.

7. $c-b$, 8. $d-a$.

9. $7a-3b$. 10. $10b-6c$.

11. $5a-2b+6c-4d$, 12. $13a-6b+7c-5d$.

13. $18b-3c-4d+9a$. 14. $20ab-3cd$.

15. $4da-2bc$ 16. $abc+bcd+cda+dab$.

設 $a=6$，$b=2$，$c=5$，$d=0$ 求以下各式的數值.

17. $3ac+2bc+ca$ 18. $7ad+9bc-3ca$.

19. $a\times c\div b$. 20. $a\div c\times b$.

21. $2c\div a\div b$. 22. $ad\div bc$.

23 有 $3x, 4bx, 5bcx, 16abcx$，問 x 的係數如何

24 有 $4xy, 5axy, 7abxy, 19abcxy$，問 xy 的係數如何，又數字係數如何.

9. 乘方 凡積由一因數多次自乘而成的，不論其次數如何均謂之此數的乘方，或單稱之爲方.

如 aa 爲 a 的 2 乘方，aaa 爲 a 的 3 乘方，$aaaa$ 爲 a 的 4 乘方，其餘類推.

又 aa 及 aaa 附以特名，即 aa 爲 a 的平方，aaa 爲 a 的立方

10 指數 aa, aaa 等，更有簡略的記法如次:

即 aa 記爲 a^2，aaa 記爲 a^3，$aaaa$ 記爲 a^4，$aaaa\cdots\cdots$ 記爲 a^n（但 $aaaa\cdots\cdots$ 是因數 a 自乘 n 次的乘方），a 的右肩上所記的小數字或小字母，就是表示的自乘次數.

如 $aaabb$ 記爲 a^3b^2，其他準此.

小數字及小字母，是指出因數次數的記號，所以叫作指數.

如a^m是指出因數a自乘n次，（即a的n乘方）所以n是指數.

因數a要是1次的，不必記爲a^1，但記爲a可矣.

11 方根 某數的平方等於a，則某數叫作a的平方根，用記號$\sqrt[2]{a}$記之，然$\sqrt[2]{a}$常略寫爲$\sqrt{a}$，而²字常從省略.

如2的平方等於4所以2爲$\sqrt{4}$.

某數的立方等於a則某數叫作a的立方根，用記號

$\sqrt[3]{a}$記之.

如$3=\sqrt[3]{27}$，因$3^3=27$故也.

簡單言之，某數的n方（但n是任意的整數）等於任意的數a則某數叫作a的n乘根，用$\sqrt[n]{a}$表示之.

符號$\sqrt{\ }$原係由臘丁文Radix的首字r變化而成，所以叫作根號.

不能詳求的根，叫作根數，或叫作無理數.

如$\sqrt{7}$及$\sqrt[3]{4}$就是根數，或無理數.

如根數$\sqrt{7}$，依算術求平方之法，雖能求其略近値，但在代數學中則不必求其略近値，因爲用$\sqrt{7}$自乘，就是7的緣故.

12. 等號及不等號 符號=（讀作Equal）或讀作等於）放在兩數之間，表示兩數相等.

如$5+7=12$，即5加7等於12.

符號>放在兩數之間，表示左數較比右數大.

如$a>b$即a較b大.

符號<放在兩數之間，表示左數較右數小.

如$a<b$即a較b小.

又符號∵爲"因爲"，或"因"字的略號.

符號∴爲"故"字，或"所以"的略號.

13. 代數式及項 用代數記號（即字母，數字及符號）集合之

的叫作代數式，或單稱之曰式.

代數式中用＋或－連結的各部分，叫作項.

如$2a-3bx+5cy^2$就是 $2a$，$-3bx$，及 $5cy^2$ 三項結合的代數式.

14. 同類項 兩項中所含的字母，彼此相同，並且各字母的乘方相等，這二項就叫作同類項.

如 $3ab^2x^3$ 與 $5ab^2x^3$爲同類項是也.

又 $3a^2bx^3$ 與 $7a^2b^2x^3$其二項中所含的字母，雖然彼此相同，但不是同類項，因爲二項中各字母的乘方，彼此不相同的緣故，

15. 單項式及多項式 僅含一項的代數式，叫作單項式，含二項以上之式，就叫作多項式.

如 $5ab^3cx$爲單項式，$a+b$ 爲多項式.

由二項所成之式，叫作二項式，由三項所成之式，叫作三項式.

單項式及多項式，有時稱爲單式及複式.

16. 括弧 取一代數式爲一項，則須用括弧括起來，演算的時候，須先計算括弧以內的各項，然後計算括弧以外的各項.

括弧有（ ），【 】，〔 〕三種，

又 $(a+b)c$ 爲加 b 於a，更以 c 乘其結果，又$(a+b)^3$ 爲加 b 於，a，而作其結果的立方.

又 $(a+2b)(c+3d)$ 爲加 2b 於 a，並加 3d於 c，而以第二的結果，與第一的結果.

有時在所括的數上，劃一線以代括弧，此線叫作括線.

如 $a+\overline{b-c}$與 $a+(b-c)$ 同，又$\sqrt{a+b}$與$\sqrt{(a+b)}$同，如果沒有括弧及括線時，則根號單屬於緊接其號的第一數.

如 $\sqrt{2}a$ 爲 a 乘 2 的平方根，而$\sqrt{2a}$即爲 2a 的平方根.

又 $\sqrt{a}+x$ 爲加 x 於 a 的平方根，而 $\sqrt{a+x}$即爲 a 與 x之和的平方根.

在分數內分子與分母間的線，其用途與括線相同，因 $\frac{a+b}{12}$ 與 $\frac{1}{12}(a+b)$ 相同的原故.

〔注意〕 一代數式的各項，和在一括弧內的各項相同，所以全體相加減時，爲學者應當注意.

如 $a+bc-d\div e+f$ 式，在加法前當先以 c 乘 b，在減法前，當先以 e 除 d，所以此式恰如 $a+(bc)-(d\div e)+f$

設 $a=4, b=3, c=1, d=0$，求以下四式的數值.

(1) $2a-bc+cd-6b\div a+\frac{2c}{a}$， (2) $(a+b)^3(2b-3c)^2$.

(3) $a^b+b^c+c^a$， (4) $\sqrt[3]{[7a^3+(b+c)^3+d^3]}$.

其演算如次.

(1) $2a-bc+cd-6b\div a+\frac{2c}{a}$

$$=2\times4-3\times1+1\times0-6\times3\div4+\frac{2\times1}{4}$$

$$=8-3+0-\frac{9}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

(2) $(a+b)^3(2b-3c)^2=(4+3)^3(2\times3-3\times1)^2=7^3\times3^2=343\times9$

$=3087$.

(3) $a^b+b^c+c^a=4^3+3^1+1^4=64+3+1=68$.

(4) $\sqrt[3]{[7a^3+(b+c)^3+d^3]}=\sqrt[3]{[7\times4^3+4^3+0^3]}$

$=\sqrt[3]{[7\times64+64+0]}=\sqrt[3]{(448+64)}$

$=\sqrt[3]{512}=8$.

習　題　二

1. 寫出 $2^4, 3^3, 4^3, 4^4$，$\sqrt{64}$，$\sqrt[3]{64}$，$\sqrt[4]{16}$，$\sqrt[3]{125}$，$\sqrt[4]{625}$，$\sqrt[5]{32}$ 的數值來.

若 $a=2$，$b=3$，$c=4$，$d=5$，求以下六式的數值.

2. a^2+b^2，　3. c^2+d^2　4. $6a^2-2d^2$.

5. $4b^2-c^2+5d^2$，6. $a^2b^2+c^2d^2$，7. $a^2b^2c^2-a^2bc$.

若 $a=2$，$b=3$，$c=4$，$d=5$，求以下五式的數值.

8. $\frac{d^2}{5}-\frac{c^3}{3}+\frac{a^2b^2}{27}$　9. $\frac{1}{9}bc+\frac{1}{8}ca+\frac{1}{7}ab$.

10. $10c^3d^3-16a^2b^2$.　11. $\frac{1}{3}a^2b^2c^3-\frac{1}{9}ab^2c^2d$.

12. $\frac{ab^3c^4}{16}-\frac{a^4bc^2d}{20}$.

若 $a=5$，$b=3$，$c=1$，$d=0$，求以下五式的數值.

13 $(2a+5b)(3b-6c)$.　14. $(a+2b)(c+2d)$

15. $(3a-4b)^2-2(3b-6c)^2+2(ad+4c)^2$

16. $4a^3+4b^3+4c^3-3(b+c)(c+a)(a+b)$.

17. $5(a+c)^2(b-c)^2-\frac{1}{25}(c-2d)^3(b+3c)^2$.

18 若 $x=2$ 又 $x=3$，證 x^2-5x+6 等於零.

19. 若 $x=2$ 又 $x=3$ 又 $x=\frac{1}{2}$，證 $2x^3-11x^2+17x-6$ 等於 0.

若 $a=5$，$b=4$，$c=\frac{1}{2}$，求以下七式的數值.

20. $\sqrt{a^2-b^2}$　21. $\sqrt{5a}$.

22. $\sqrt{2bc+3a}$　23. $\sqrt[3]{bc+a^2}$

24. $\sqrt[3]{2a^2+b^2-3c^2}$.　25. $\sqrt[3]{4a^2-\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}c-1}$

26. $\sqrt{(a+b)\sqrt[3]{3ab+2bc}}$.

27. 若 $x=5$，$y=3$，$a=6$，$b=4$.

求 $(a+b)^2(x+y)^2-4(ax+by)(bx+ay)$ 的數值.

28. 若 $a=9$，$b=12$，$c=15$ $s=18$，問下式的數值若何？

$$\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}.$$

29. 若 $a=9$，$b=12$，$c=15$，及 $2s=a+b+c$.

求$\sqrt{\frac{S(s-a)}{(S-b)(S-c)}}$的數值.

30. 若 $a=8$，$b=5$，$c=3$，問下式的數值若何.

$\sqrt{[2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4]}$.

31. (1) $a=6$，$b=3$，(2) $a=9$，$b=4$，(3) $a=12$，$b=7$
證 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

32. (1) $a=3$，$b=2$，(2) $a=6$，$b=3$，(3) $a=5$，$b=2$ 證 a^3-b^3 $(a-b)(a^2+ab+b^2)$. $(a-b)^3+3ab(a+b)$. 及 $(a+b)^3-3ab(a+b)-2b^3$都是相等.

第二編

正量和負量

17. **名數量** 無論何種的量，都是以同類單位的倍數計算，計算的時候，常有種種不同，如計算金額有收入，支出，又有利益，損失，如計算運動，一直線上，有相反對的二向，又如計算時刻有過去未來，又有特別之時前或時後，諸如此類，不勝枚舉，所以凡量必有相反對的二種類.

18. **數的性質** 凡名數量，無論是如何種類，$+4$，都表示牠的量增加四單位，又-4，則表示量減去四單位.

如計算人的財產，則 $+4$，爲其財產增四圓，即表示此人的所有金四圓，或貸金四圓，又 -4，爲其財產減四圓，即表示此人的負債金

四圓，換句話說，如計算人的負債，則 +4，爲增其負債，即表示此人的借債金四圓，又，−4，爲減其負債，即表示此人的所有金四圓，或貸金四圓．

又如計算人的利益，則 +4，爲增其全利益，即表示四單位的利益又 −4，爲減其全利益，即表示四單位的損失，換句話說，計算人的損失，則 +4，即表示四單位的損失，又 −4，則表示四單位的利益．

又由特定的點測量方向的距離，則 +4，爲表示正方向四單位的距離，又 −4 爲表示反對方向四單位的距離．

19 反對的種類 依上述諸列，+號和−號，原是用以區別量的正反對之種類的，即 +4，無論表示如何之量，而其 −4，必與之相反對，所以在代數學內，+號和−號，有全然不相同之二意義，即一爲原來表示加法或減法，演算的符號，一爲區別量的正反對之種類的符號．

20, 正號及負號 量前有+號的，叫作正量，量前有−號的，叫作負量，又+叫作正符號，−叫作負符號．

21. 性質之號 +號或−號，放在量前，以表示量的性質時常叫作性質的符號．

又+爲性質的符號時，常從省略，當某項之前無+及−時，則+已省略．

【注意】代數學所用的符號雖多，而符號的名稱，多指+或−二符號而言，如言某量的符號，即指在某量前的+號或−號，又言變某式的符號，即變某代數式中在各項前的符號+爲−，−爲+．

22. 絕對值 量的大小與符號+或−沒有關係的，叫作絕對值．

如昇4尺，降四尺，若不論上上的性質，其絕對值是相等的．

依同理 $+4$ 與 -4，若不論其符號如何，其絕對值也必相等.

加　　法

23.　**定義**　求二量或多量集合的結果，此法叫作加法，其結果稱之為和.

正量生加，負量生減，所以加一正量，則加其絕對值，加一負量，則減去絕對值.

如以 $+4$ 加於 $+6$，則得　$+6+4=+10$.

而以 -4 加於 $+6$，則得　$+6-4=+2$.

依同理，以 $+b$ 加於 a 則得：$a+b$，

如以 $-b$ 加於 a，則得　$a-b$.

即　$a+(+b)=a+b$，$a+(-b)=a-b$.

所以任意之項相加時，則有以下的法則.

【法則】加任意之項，其符號不變，但須記此項於被加式之次.

【例】如有人向前進 65 步，又由此向前進 -37 步，(即退後 37 步) 問此人距原處幾步？

所求的步數為代數學所謂二次步數之和，因為欲得所求之和，所以加 -37 於 65 而此演算，以 $65+(-37)$ 表之，由上文，得 $65-37=28$.

當 a 及 b 已有數時，$a+b$ 及 $a-b$ 的數值，自能求出，但必須先知 a 及 b 的數，然後方能求 $a+b$ 及 $a-b$ 的數，所以 $a+b$ 和 $a-b$ 不能先求，凡在代數學內，謂加 $+b$ 於 a，則單寫為 $a+b$ 若說加 $-b$ 於 a，則單寫為 $a-b$，於是加法就完全了.

24.　**負數的結果**　如 b 較 a 大，則 $a-b$ 不能作算術上的運算，因為無論如何的數，都不能從比這數小的數施減的原故.

設 $a=3$，$b=5$，則 $a-b$ 為 $3-5$，而 3 原不能減去 5，然減 5 與

減3又減2同，所以$3-5=3-3-2=-2$，這-2有兩種意義，(一)爲由他代數式中減去2之式，(一)爲表反對性質的兩個單位，但-2是演算最後所得的結果，却是屬於第二種的.

有時依着量的種類，而得負的結果，是無意義的.

如計算城市中的人口，若得負的結果，則與人口之理不合，得分數的結果，也是不合的.

習　題　三

求以下各數之和:

1. 4與-3　2. 3與-2　3. 6與-3
4. 7與-8　5. 3與-11　6. -3與-9
7. 6，-2與7　8. -3，-2與5　9. $2a$與$-3b$
10. $-3a$與$-2b$　11. $5a$，$-6b$與$2c$
12. $-3a$，$-4b$與$7c$.

25. 法則　依照加法的性質，則以上的代數式，不關於正負如何，所以知道加法無論用如何的次第相加，其結果常相等.

如計算人的家產，其家產的各種，(負債可以看作負家產)無論用如何的次第記之，其家產常相等.

又以代數式爲一全體而加之，與區分各項各別着加起來.是相同的而加任意之項，須附記於式之次，其符號常是不變的

因得以下的法則.

【法則】加二以上的代數式，將式的各項依次加之，其符號不變.

如$a+b$與$c+d$之和是$a+b+c+d$.

又$a-b+c$與$d-e+f$之和是$a-b+c+a-d+f$.

26. 運算　所加各項中如有同類項，則加法的演算終了後，當集爲一項，得三個例子如下: