

工業技術學校適用

材料力學

陰士懋著

新科學書店出版

上海(11)福州路606號(浙江路西)電話93223

目 次

第一章 牽應力與壓縮應力 1—16

1. 材料力學之定義 2. 應力 3. 牽應力及壓縮應力
4. 單位應力 5. 應變 6. 單位應變 7. 彈性限度
8. 虎克定律 9. 彈性係數 10. 應力應變圖, 屈服點, 極限應力
11. 延長百分率及面積減小百分率 12. 工作應力及安全因數
13. 溫度應力 14. 兩種材料桿體內之應力

第二章 剪應力與剪應變 17—22

15. 剪應力 16. 剪應變 17. 剪割彈性係數
18. 感應剪應力 19. 因剪力而生之牽力與壓縮力
20. 因牽力及壓縮力而生之剪力

第三章 梁之剪力及彎曲矩 23—45

21. 梁之種類 22. 載荷之種類 23. 梁支座之反作用
24. 梁之剪力 25. 剪力方程式及剪力圖 26. 梁之彎曲矩
27. 彎曲矩方程式及彎曲矩圖 28. 最大彎曲矩

第四章 平面形心及轉動慣量 46—55

29. 重心 30. 平面形心 31. 簡單平面圖形之形心 32. 集合截面之形心
33. 轉動慣量 34. 簡單圖形之轉動慣量
35. 轉變公式 36. 集中截面之轉動慣量 37. 環動半徑

第五章 梁內應力 56—70

38. 梁內牽應力及壓縮應力之分佈 39. 梁內牽應力及壓縮應力之計算
40. 中和軸之位置 41. 剖面模數

42. 梁之設計 43. 梁內剪應力之分佈與計算

第六章 軸內應力.....71—76

44. 圓軸內剪應力 45. 圓軸內剪應變 46. 軸所傳達之功率

47. 矩形軸內之剪應力

第七章 合成應力.....77—84

48. 撓曲應力及直接應力之合成 49. 偏心載荷

50. 剪應力及直接應力之合成

第八章 柱內應力.....85—93

51. 柱之種類 52. 郎肯氏之柱公式 53. 直線公式

54. 拋物線公式 55. 歐拉氏之柱公式

第九章 鉚釘接合及焊接合 94—111

56. 鉚釘搭頭接合 57. 鉚釘對頭接合 58. 鉚釘搭頭接合

- 之強度與效率 59. 鉚釘對頭接合之強度與效率

60. 薄圓柱體內之應力 61. 填焊接合 62. 對頭焊接合

第十章 固定梁及連梁.....112—123

63. 兩端固定之梁，均佈載荷 64. 兩端固定之梁，中點受有集

- 中載荷 65. 一端固定，一端支住之梁，均佈載荷

66. 一端固定，一端支住之梁，集中載荷 67. 連梁——三力矩

- 定理 68. 連梁反支力之解法 69. 較難之連梁計算題

70. 兩端固定之連梁

附錄：習題答案 123—126

材 料 力 學

第一章 牽應力與壓縮應力

§1. 材料力學之定義 材料力學(strength of materials)乃力學之一部,研究力作用於彈體上所生之效應者也。所謂彈體乃指當受外力作用時,形狀產生變化,而若將外力解除,多少可以復原之物體。機械材料及建築材料大都爲此類彈體。

§2. 應力 加外力於物體,該物體之一部,與其相鄰之一部間,必有一種內力相互作用,此種內力,名爲應力(stress)。

設一鋼桿,上端釘住,下端懸有重物 P ,則上端必生反作用,其數量亦爲 P ,而該桿得以平衡。今假想該桿在 xx' 剖面切斷,分此桿爲 A, B 兩段,則下段 A 之下端受有牽力 P 而使 A 有墮下之勢,然 A 並未墮下,則因實際 A, B 兩段互相連繫, B 對於 A 有牽力作用,此牽力分佈於剖面 xx' 上,其總

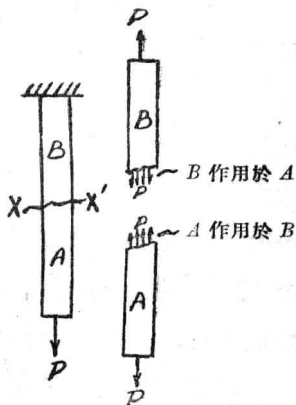


圖 1.

數必等於 P ，如是 A 段得以平衡。再以 B 段而論， B 對 A 既有牽力作用，則依反作用定律， A 對於 B 亦有牽力作用，其數量亦必為 P ，如是與 B 上端釘住處之反作用 P 恰得平衡。此等 B 作用於 A 及 A 作用於 B 之內力即為應力，其數量與外力 P 相等，當外力移去時，應力亦隨之消滅，當外力 P 過大以致所生應力超過限度時，該桿即生破裂，容後申論之。應力之單位與力相同即為公斤或磅。

§3. 牽應力及壓縮應力 上節內之鋼桿，兩端受有方向相反之兩力，數量均為 P ，此等力有使該桿延長之趨勢，名曰牽力或張力，而該桿稱為受牽力作用 (tension)，桿內所生之應力名曰牽應力 (tensile stress)。

再如左圖所示，
桿之兩端受有兩相等之力 P ，有將該
桿壓短之趨勢，此

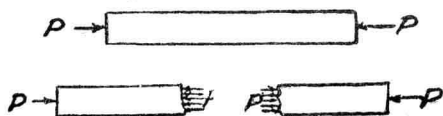


圖 2.

等力名曰壓縮力，而該桿稱為受壓縮作用 (compression)，桿內所生之應力名曰壓縮應力 (compressive stress)。除牽應力，壓縮應力外，尚有剪應力，彎曲應力，扭轉應力等，以後數章將分別討論之。

§4. 單位應力 設有 C, D 兩桿下端各懸重物， C 桿受 20,000 公斤而破裂， D 桿受 10,000 公斤而破裂，我人不可即言 C 桿

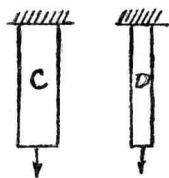


圖 3.

材料之強度較 D 桿材料為高，因兩桿受力剖面之面積未必相同也。若欲比較其強度，必須比較其作用於單位面積之應力，此單位面積所受之應力，名曰**單位應力** (unit stress)。

設 P 為全部應力， A 為此應力所作用之剖面積， S 為單位應力，

$$\text{則 } S = \frac{P}{A}, \text{ 或 } P = SA.$$

通常 P 以公斤(kg.)表示， A 以平方公分(cm^2)表示，則 S 以每平方公分公斤數表示之，簡寫為 kg./cm^2 。

在圖 3 之 C, D 兩桿，設 C 之剖面為 2 公分見方，即剖面面積為 4 cm^2 ，又 D 之剖面 1 公分見方，即剖面面積為 1 cm^2 ，

$$\text{則 } C \text{ 桿, } S_1 = \frac{20,000}{4} = 5,000 \text{ kg./cm}^2$$

$$D \text{ 桿, } S_2 = \frac{10,000}{1} = 10,000 \text{ kg/cm}^2$$

由此可見 C 桿之強度不如 D 桿。

在英制中， P 以磅(lb.)表示， A 以平方吋(in^2)表示，則 S 以每平方吋磅數表示之，簡寫為 lb./in^2 。

以嚴格而論，由 $S = P/A$ 所得之單位應力為一平均值，因分佈於剖面上之應力，有時並不均勻分佈，即各平方公分所受之應力並不絕對相同也。

若一桿直立於一水平底座上，除其本身重量外，並不負有任何載荷，則在任何水平剖面處之全部應力即為在該剖面以

上一部份桿之重量，若再以剖面面積除之即得此剖面處之單位應力。例圖 4 內，在 xx' 剖面處之單位應力

$$S = \frac{W}{A},$$

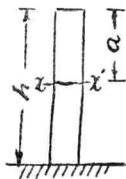


圖 4.

A 爲 xx' 剖面之面積， W 爲 xx' 剖面以上之桿重。

設 a 爲 xx' 剖面至桿上端之距離， w 爲該桿材料之密度，

則 $W = wAa$ ，

$$\text{代入上式} \quad S = \frac{wAa}{A} = wa$$

若在底座，則 $S' = wh$ 。

例：一鋼桿長 3 公尺，直立平地上，若鋼之密度爲每立方公分 0.00785 公斤，試求離桿頂 1.5 公尺處之單位應力及桿底之單位應力。

解：離桿頂 1.5 公尺處，1.5 公尺 = 150 cm.，

$$S = 0.00785 \times 150 = 1.18 \text{ kg./cm.}^2$$

桿底，3 公尺 = 300 cm.

$$S' = 0.00785 \times 300 = 2.35 \text{ kg./cm.}^2$$

設一桿上端固定，下端懸空，亦可以類似方法，計算各水平剖面所受之應力，即在任何剖面處之全部應力，爲該剖面以下之桿重是也，或用 $S = wa$ ，此處 a 代表剖面以下至懸空端之距離。

習 題 一

1. 一木塊 24 cm. $\times$ 40 cm. 負一載荷 81,600 kg., 計算單位應力。
2. 一桿之直徑為 3 cm. 受有單位應力 70 kg./cm.² 求其所負之載荷。
3. 一混凝土煙囪底座處之單位壓力為 14 kg./cm.², 若混凝土之密度為每立方公尺 2400 公斤, 問該混凝土煙囪之高為多少公尺?
4. 一短鋼管外徑 12.75 吋, 內徑 12 吋, 受有載荷 250,000 磅。計算單位應力。
5. 一鋼索長 800 呎, 係九根 0.148 吋直徑之鋼絲所合成, 下端懸一 2500 lb. 之重物。計算因本身重量所生之上端單位應力, 又因所懸重物而生之上端單位應力, (鋼每立方呎重 490 磅, 鋼絲之扭轉不計)。

§5. 應變 當物體受外力作用時, 此物體之形狀大小, 產生變動, 此種變動名曰應變 (strain)。如物體受牽力作用則變形為伸長 (elongation), 如受壓縮作用則變形為縮短 (shortening)。應變之量常用公分 (cm.) 表示之, 在英制則用吋 (in.)。

§6. 單位應變 比較材料之延性時, 不可比較其全部應變, 而須比較其單位應變 (unit strain)。單位應變者單位長度內所生之應變也。

設 l = 物體之原長, l' = 物體受力後之長,

D = 全部應變, δ = 單位應變,

則 $D = l' - l$, 而 $\delta = \frac{D}{l}$

上式中 D 及 l 必須以同一單位表示之。

如力之數量各點不同或受力之剖面並不全同, 則上式所

求得者爲平均單位應變。

§7. 彈性限度 物體受外力作用而產生應變，當外力移去，則應變常隨之消滅，即物體恢復原狀。但此種現象亦有一限度，即物體內因受外力而生之單位應力，不能超過某種限度，若超過此限度，物體不能完全恢復原狀，而有一部份“永久變形”(permanent set)。此限度隨各種材料之性質而異，稱曰**彈性限度**(elastic limit)。普通材料之平均彈性限度列於下表。

材 料	彈性限度 kg/cm^2		彈性限度 lb/in^2	
	牽 引	壓 縮	牽 引	壓 縮
混 凝 土		70		1,000
鋁	840		12,000	
銅	700		10,000	
鑄 鐵	420	1,750	6,000	25,000
鍛 鐵	1,890	1,890	27,000	27,000
鋼	2,450	2,450	35,000	35,000

§8. 虎克定律 在彈性限度以內，物體之應力與應變成正比例，此即虎克定律 (Hook's Law)。例如物體受力 1,000 公斤時所生之應變爲 0.01 cm，則在彈性限度以內，若力增加至 2,000 公斤時應變必增爲 0.02 cm。但若在彈性限度以外，則力同樣增加，而應變增加較多。

故彈性限度之另一定義爲應力與應變成正比例時之最大單位應力，若超過此單位應力，則應力與應變不成正比例。

§9. 彈性係數 上節所述在彈性限度內，物體之應力與應變成正比例，即單位應力與單位應變之比率為一常數，此常數名曰彈性係數(modulus of elasticity)。

設 S 表示單位應力， δ 表示單位應變， E 表示彈性係數，

$$\text{則} \quad E = \frac{S}{\delta}$$

E 之單位與 S 相同即 kg./cm.^2 或 lb./in.^2 。

例：一鋼桿直徑 1.2 cm，受有牽力 2,200 kg，在 20 cm 內延長 0.015 cm，試求 S ， δ 及 E 。

$$\text{解：} \quad S = \frac{2200}{\frac{\pi}{4} \times 1.2^2} = 1950 \text{ kg./cm.}^2$$

$$\delta = \frac{0.015}{20} = 0.00075$$

$$E = \frac{1950}{0.00075} = 2,600,000 \text{ kg./cm.}^2$$

普通材料之平均彈性係數列於下表：

材 料	平 均 彈 性 係 數	
	kg./cm. ²	lb./in. ²
混 凝 土	140,000	2,000,000
	770,000	11,000,000
	1,050,000	15,000,000
鑄 鐵	1,050,000	15,000,000
	1,900,000	27,000,000
	2,050,000	29,000,000

習 題 二

1. 一鉛桿上端定住，直懸空中，若上端之應力適為彈性限度，問該桿之長為多少公尺？(鉛之密度為每立方公分 0.00264 公斤)。
2. 一銅絲，懸在水中，若上端之應力為彈性限度之半，問該銅絲之長為多少呎？(銅之密度為每立方呎 556 磅)。
3. 一混凝土柱，直徑 8 in.，受有壓力 20,000 lb. 在 15 in. 內縮短 0.0032 in. 計算 E.
4. 一鋼絲直徑 0.5 cm. 長 225 公尺，已知 $E = 2,000,000 \text{ kg./cm.}^2$ 若欲將其拉長 5 cm. 問需力多少公斤？

§10. 應力應變圖，屈服點，極限應力，破斷應力 應力與應變之關係可用圖線表示之，此即應力應變圖 (stress-strain diagram)。欲繪此圖，須用一試驗機械作一實驗，一面將荷重逐漸增加，同時量出各荷重時之變形，由此可算出單位應力及

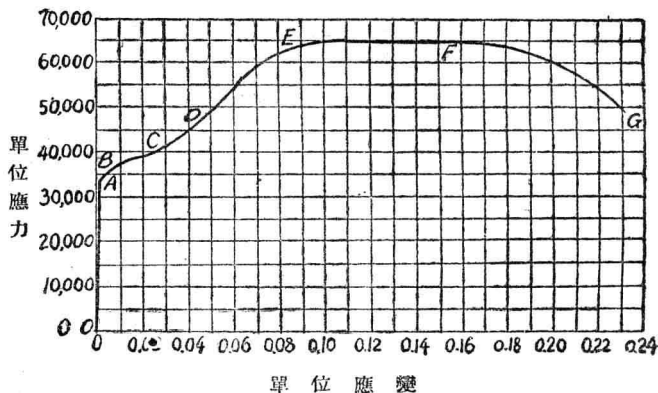


圖 5. 鋼的應力應變圖

其同時之單位應變。乃將此等數字在方格紙上繪出各點，其縱坐標表單位應力，橫坐標代表同時之單位應變。作一線連接此等點子即成應力應變圖。

圖 5 所示乃鋼之應力應變圖（延性材料大部如此圖。）至 A 點為止，應力與應變成正比例，故 A 點之單位應力即為彈性限度，當應力超過此限度時，應變較應力之增加為速，待到 B 點時，應變繼續增加而應力幾不增加。此時之單位應力名曰屈服點 (yield point)。因試驗桿之材料不能完全均勻，其剖面積亦不能完全相同，故各處之屈服點並不一致。待全部均過屈服點後，欲應變繼續增加，又須增加荷重，起先較緩，如圖 4 之 C 點處其後較速如 D 點處，後又緩慢如 E 點處，最後應變繼續增加，而應力又幾不增加。此時之荷重名曰**最大荷重**(maximum load)，此時之單位應力名曰**極限應力**(ultimate stress)，此後，變形集中於試驗桿之軟弱部份成一**頸形** (neck)，於是因截面突小荷重可減，而該桿破裂於一較最大荷重略小之荷重，此時之荷重名曰**破斷荷重** (rupture load)，此時之單位應力名曰**破斷應力**(rupture stress)。

現將普通材料之平均極限應力列表於下：

材 料	極限應力(kg./cm. ²)		極限應力 (lb./in. ²)	
	牽 引	壓 縮	牽 引	壓 縮
混 凝 土		175		2,500

	鋁	1,750		25,000	
	銅	2,450		35,000	
鑄	鐵	1,400	5,600	20,000	80,000
鍛	鐵	3,500	3,500	50,000	50,000
	鋼	4,550	4,550	65,000	65,000

除鋼外，其他材料之應力應變圖，繪列於下(見圖 6)：

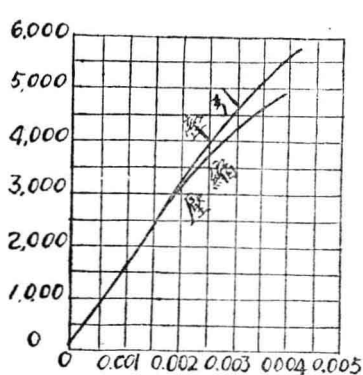


圖 6(a). 木材之應力應變圖。

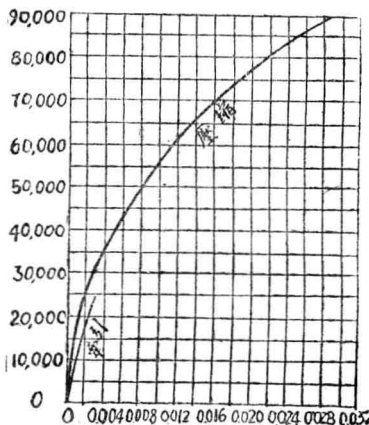


圖 6(b). 鑄鐵之應力應變圖。

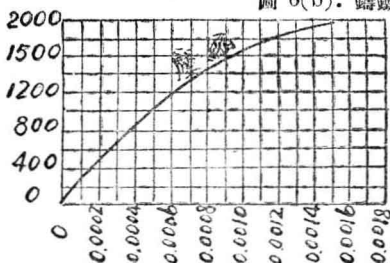


圖 6(c). 混凝土之應力應變圖。

§11. 延長百分率及面積減小百分率 在牽力試驗中，試驗桿延長之數量，及面積減小之數量，均可表示材料延性之高低。在某種建築物中，材料之延性極為重要，故常須計算其延長百分率 (percentage of elongation) 及面積減小百分率 (percentage of reduction of area)。其計算法則可以下列例題表明之。

一桿 $4 \text{ cm.} \times 1.5 \text{ cm.}$ 規長 (gage length) 20 cm. 作牽力試驗，其結果規長增為 24.2 cm. ，最小破斷面為 $2.6 \text{ cm} \times 0.9 \text{ cm.}$ ，

$$\text{則 延長百分率} = \left(\frac{24.2 - 20}{20} \right) \times 100 = 21$$

$$\text{面積減小百分率} = \frac{4 \times 1.5 - 2.6 \times 0.9}{4 \times 1.5} \times 100 = 61。$$

§12. 工作應力及安全因數 一材料作單次試驗所能忍受之最大單位應力為第 10 節所述之極限應力，但實際工程設計中之單位應力遠較極限應力為低，且較彈性限度為低。因實際機械或結構物所受之應力為重複性者，所受力雖不大，然多次重複作用，亦可使材料破損，故所受之應力必須遠較極限應力為低。同時須避免有永久變形，故所受之應力，必須較彈性限度為低。機械或結構物之任一部份實際所受之單位應力名曰工作應力 (working stress)，此工作應力常經主管工程機關核定不可超過某一限度，此限度即為許用應力 (allowable stress)。

上海市工務局所規定之許用應力列於下表：

	壓力 kg./cm. ²			牽力	壓力
	灰砂砌	黃砂水泥砌		kg./cm. ²	kg./cm. ²
土 密 磚	3	5	混凝土		40
機 製 磚	3	8	鑄 鐵	210	1,120
亂 石	4	5	鍛 鐵	720	720
整方塊石	20	40	鋼	1,120	1,100
		牽力 kg./cm. ²	壓力 kg./cm. ²		
杉 木	本 松	}	順木紋	逆木紋	
			65	15	
白 松	黃 松	85	110	25	
紅 松		60	85	23	
硬 木		85	100	100	

安全因數 (factor of safety) 者,即一物質之極限應力與工作應力之比率。例如一鋼桿之工作應力為 900 kg./cm.² (壓縮),則檢表得鋼之極限應力為 4550 kg./cm.²。

$$\text{故 安全因數 } E = \frac{4550}{900} = 5$$

前節已述過安全工作應力與極限應力並無一定關係,但選用安全因數之法,今仍常用之。

§13. 溫度應力 大多數材料,受熱之時必膨漲,冷卻之時必減縮。然若一桿體兩端固定,當加熱時,欲伸長而不能伸長,則其必受壓力。當冷卻時,欲縮短而不能縮短,則其必受牽力。此種因溫度變化,而產生之應力名曰**溫度應力** (temperature stress)。設 K 表示線膨漲係數,即溫度每升高一度單位長度內所伸長之數量, t 表示溫度之變化數,

則 單位應變 $\delta = Kt$

單位應力 $S = E\delta = EKt$

若溫度升高，所受者為壓力。若溫度降低，所受者為牽力。
線膨脹係數之值大約如下：

材 料	K	
	攝 氏 表	華 氏 表
鑄 鐵	0.0000108	0.0000060
鍛 鐵	0.0000121	0.0000067
鋼	0.0000117	0.0000065
銅	0.0000168	0.0000093
混 凝 土	0.0000143	0.0000079

例：一鋼繩直徑 0.4 cm. 兩端繫於樁上，在 20°C 時用螺旋旋緊，使此繩受有牽力 120 公斤，若溫度降至 -10°C，繩內之應力為多少？若溫度升至 50°C 時，繩內之應力為多少？

解：在 20°C 時，繩內之單位應力為

$$\frac{120}{\frac{\pi}{4} \times 0.4^2} = 955 \text{ kg./cm.}^2 \text{ (牽引)}$$

若溫度降至 -10°C 時，因溫度而生之單位應力為，

$$\begin{aligned} EKt &= 2,050,000 \times 0.0000117 \times 30 \\ &= 720 \text{ kg./cm.}^2 \text{ (牽引)} \end{aligned}$$

故在 -10°C 時，繩內之單位應力為，

$$955 + 720 = 1,675 \text{ kg./cm.}^2 \text{ (牽引)}$$

若溫度升至 50°C 時，因溫度而生之單位應力為

$$720 \text{ kg./cm.}^2 \text{ (壓縮)}$$

故在 50°C 時，繩內之單位應為

$$955 - 720 = 235 \text{ kg./cm.}^2 \text{ (牽引)}$$

§14 兩種材料桿體內之應力 設一桿體由兩種彈性係數不同之材料所合成，當受牽力或壓力作用時，因變形相同，故彈性係數較低之材料應力較小，彈性係數較高之材料應力較大。

設 $A_1 =$ 第一種材料之面積，
 $A_2 =$ 第二種材料之面積，
 $S_1 =$ 第一種材料之單位應力，
 $S_2 =$ 第二種材料之單位應力，
 $E_1 =$ 第一種材料之彈性係數，
 $E_2 =$ 第二種材料之彈性係數，
 $\delta_1 =$ 第一種材料之單位應變，
 $\delta_2 =$ 第二種材料之單位應變，

$$\text{則} \quad \delta_1 = \frac{S_1}{E_1}, \quad \delta_2 = \frac{S_2}{E_2}$$

因合成為同一桿體，故 $\delta_1 = \delta_2$ ，

$$\text{即} \quad \frac{S_1}{E_1} = \frac{S_2}{E_2}, \quad \text{或} \quad S_2 = \frac{E_2}{E_1} S_1$$

$$\text{設} \quad \frac{E_2}{E_1} = n, \quad \text{則} \quad S_2 = n S_1$$

$$\text{又} \quad P = A_1 S_1 + A_2 S_2 = A_1 S_1 + A_2 n S_1 = (A_1 + n A_2) S_1$$