21世纪高等学校教材

新编中学数学研究教程

第二册

张 雄 主编

陕西科学技术出版社

21世纪高等学校教材

新编

中学数学研究教程

第二册

主　　编　张　雄
本册主编　熊文井　陈宝安
本册副主编　乔希民　杨渭清
本册作者　（按姓氏音序排序）
安振平　陈宝安　杜　娟　黄云鹏
李善明　乔希民　王　辉　熊文井
余保民　张先叶　赵秀元

陕西科学技术出版社

图书在版编目(CIP数据)

新编中学数学研究课程. 第2册/张雄主编. —西安:
陕西科学技术出版社,2008.8

ISBN 978-7-5369-4528-9

Ⅰ.新… Ⅱ.张… Ⅲ.数学课—教学研究—中学 Ⅳ.
G633.602

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第112894号

出版者 陕西科学技术出版社
西安北大街131号 邮编:710003
电话:(029)87211894 传真:(029)87218236
http://www.snstp.com

发行者 陕西科学技术出版社
电话:(029)87212206 87260001

印 刷 陕西新胜印务有限责任公司

规 格 787mm×960mm 16开本

印 张 20.75

字 数 410千字

版 次 2008年9月第1版
2008年9月1次印刷

总定价 106.30元(二册 39.60元)

前 言

中学数学研究是高等师范院校数学系的一门专业课,它对于培养师范学生的专业素养和从业能力有着十分重要的意义。我国基础教育新课程改革使中学数学从教材内容到教学理念、教学设计、教学方式以及学生的学习方式等都发生了巨大变化,本套《新编中学数学研究教程》主要是为了适应这一新形势而编写的与中学数学新课程相衔接的高等师范院校教材,其内容涵盖了目前正在使用《义务教育阶段国家数学课程标准》和《普遍高中数学课程标准》中的初、高中数学教材内容。

本套教材的编写力求贯穿"一条主线"、"两个视角"、"三个任务"以及"两个特点",这些编写原则构成本书的特点。"一条主线"即紧扣中学数学新课程教材;"两个视角" 指从中学数学向上看,研究中学数学的高等背景,同时,从高等数学向下看,研究高观点下的中学数学;"三个任务"是指,本教材要对中学数学教材中处理不彻底、不严密的地方进行较彻底地严密化处理,给出中学数学只是运用不知道理的方法之理论基础,根据情况,要在数学思想方法(包括解题研究)、数学文化、数学史、数学知识的拓展、数学知识的本质与价值等方面进行适当的论述;"两个特点"即在内容上不求全面但求深刻,在研究风格上不求系统但求特色。

高中数学课程实行选修系列,内容较多,本套《新编中学数学研究教程》要全面涉及,所以内容量也较大,共分 3 册。第一册为代数部分,第二册为几何部分,第三册为微积分、概率统计及算法等。各院校在教学中可根据学时数做适当删减。

这套教材由主编张雄整体策划并提出编写的原则和思路要求。本册由熊文井、陈宝安主编并统稿,具体参加编写的有商洛学院乔希民(绪论、第 1 章)、商洛学院王粹(第 2 章)、榆林学院赵秀元(第 3 章)、咸阳师范学院陈宝安(第 4 章)、渭南师范学院张先叶(第 5 章)、陕西教育学院黄云鹏(第 6 章)、安康学院李善明(第 7 章)、咸阳师范学院安振平(第 8、9 章),陕西教育学院熊文井(第 10、11、12 章)、陕西教育学院杜娟(第 13 章)、渭南师范学院余保民(第 14)章。

本书的编写参考了大量的文献资料,我们对其作者和同行表示感谢并尽可能地列出参考书目。由于编写时间较短和水平所限,本书一定还有不少缺点和错误,恳请读者和同行在使用中提出批评指正,以便修订完善。

编 者

2008 年 6 月

目　录

第二编　解析几何学专题研究

第三编　中学数学中的非欧几何学

绪论　几何学的起源与发展

几何学概念和几何知识可以追溯到史前时代.

据考古文献资料知:10万年前的"河套人"已在骨器上刻有菱形的花纹,石器时代的各种工具也都具有一定的几何形状.

殷代以前(公元前3000多年)的陶器上已有许多几何图案,殷代甲骨文已经有"规"、"矩"二字,中国战国时期的《墨经》中给出了一些几何名词的定义和几何命题.

《算数书》是西汉初年(约公元前150年左右)的竹简算书,是中国现已发现的最古老的一部算书.《算数书》共有竹简200余支(其中完整者185支)总字数约7000字.经研究,它和《九章算术》一样,也采用了"问题集"的形式.已清理出来的小标题有60多个,如"方田"、"税田"、"金价"、"合分"、"经分"、"少广"、"程禾"等,涉及面积计算、开方、分数运算及各种与当时社会有关的计算数学的内容.

《周髀算经》(公元前4世纪)中包括丰富的几何知识(如勾股定理),其中特别提到:古代夏禹治服洪水,引导它按一定河道东流入海,需要测量地势和地形高低,这就导致了几何知识的产生.司马迁的《史记·夏本纪》中也提到:相传禹治水时左准绳,右规矩,即一手拿画方圆的工具,一手拿定平直的工具,来进行测量和设计工作.

比《周髀算经》稍晚的古算书《九章算术》——《方田》章是讲田亩面积计算,《章功》——体积计算,如各种形状的粮仓及建筑土方计算.《勾股》——勾股定理的应用及相似形比例关系的计算,全是直接为当时的生产实践服务的.

在积累新的几何知识的同时,需要把大量零星片断的、凭经验归纳得来的许多个别法则整理成为演绎的系统——由一些几何原理导出另一些几何原理的逻辑系统.

由此历经几代人的智慧发挥,渐渐形成了几何定理及其证明的概念.

那些用以导出其他几何原理的基本原理,就成为公理(不用证明),用以解释其他几何概念的基本概念,就成为原始概念.它们的性质只用公理来制约.

这种方法就是所谓的演绎法或公理法.把这种方法称之为数学上最伟大的成就之一,如欧几里得《几何原本》.

1. 作为经验科学的几何学——现实空间的直接反映

从人类生存的现实空间,本质上是一个物质世界,在认识这个物质世界的过

程中，有时需要撇开物质的物理、化学等属性，抽象地考察它的形状、大小、位置. 例如，建造埃及金字塔时，人们就已懂得了不少几何知识；《莱因德纸草书》上已有专门的几何计算问题，如圆面积的计算方法；巴比伦人的泥板中已有矩形、直角三角形、梯形等图形的面积计算法，还有平行六面体、柱体的体积计算问题；“希腊几何学”的先驱泰勒斯曾利用两个三角形相似的性质测量了金字塔的高，并开始了命题的证明.

2. 作为思维科学的几何学——开创公理化的先河

欧几里得是希腊几何学的集大成者，他编写的《几何原本》将公元前7世纪以来希腊几何积累起来的丰富成果整理在严密的逻辑体系中，使几何学成为一门独立的演绎推理的科学. 当然亚里士多德的形式逻辑推理必不可少，从而开创了公理化思想体系的先河.

3. 解析几何学的诞生——数与形的完美结合

1637年法国数学家笛卡儿发表了《几何》，他在书中论述了数与形之间存在的密切关系，在空间设立坐标后图形可用数量之间的关系来表示，反之，数量之间的关系也可以用图形来表示，这样利用坐标就能把图形的问题转化为数量之间的问题，用代数的方法加以处理，从而诞生了解析几何学.

此外，射影几何学、罗氏几何学、球面几何学分形几何学、拓扑学、代数几何学、计算几何学也在蓬勃发展. 同时，我们期待着新的几何学理论的再一次诞生.

第一编

欧几里得几何学

第 1 章　几何基础

1.1　欧氏几何的公理化体系

公元前 7 世纪以前的几何学，都只限于一些具体问题的解答，并且是十分粗糙和单凭经验的. 后来当积累起来的几何知识相当丰富时，把这一领域的材料系统地加以整理，并阐明它们的相互关系，就显得尤为迫切了. 又因为几何学本来的对象是图形，所以研究它必然要借助于空间的直观性. 然而直观性也有不可靠(不符合客观)的时候，因而在明确地规定了定义和公理的基础上，排除直观性，建立合乎逻辑的几何学体系的思想，在古希腊时代已经开始，欧几里得《几何原本》的几何体系就是受到亚里士多德形式逻辑思想的影响，他认为公理是不证自明的命题，而公设是几何学中假设成立的事项. 假设必须大家承认，所谓定义就是几何学中用的词语的意义. 欧几里得在《几何原本》中把量和量之间的关系作为公理，把几何图形中大家公认的一些性质作为公设，在公理、公设的基础上，建立起几何的公理化体系. 全书共十三卷，每卷都是从定义出发，根据公设、公理及已经证明的命题(称为定理)按逻辑推理来证明一系列命题.

主要内容如下：

第一卷首先提出 23 个定义、5 个公设和 5 个公理. 其中主要的定义有：

(1) 点是没有大小的；

(2) 线有长度而没有宽度；

(3) 线的界限是点；

(4) 直线是同其中各点看齐的线；

(5) 面只有长度和宽度；

(6) 面的界限是线；

(7) 平面是与其上直线看齐的面；

(8) 平面的角是在一个平面上的两条相交直线的相互倾斜度；

(9) 当形成一角的两线是一直线时，这个角叫做平角.

定义(10)～(22)是关于直角和垂线、钝角和锐角、圆、圆的中心、直线形、三角形、四边形、等边三角形、等腰三角形、不等边三角形、正方形、直角三角形、菱形等的定义.(略)

(23) 平行直线是在同一平面上，而且往两个方向无限延长后在两个方向都

不会相交的直线.

上面所列的定义按现在的几何术语来说，就是给出了点、直线、曲线、曲面、平面、角、圆、圆心、平行线等基本几何图形的定义.

5个公设是：

(1) 从每个点到每个别的点必定可以引直线；

(2) 每条直线都可以无限延长；

(3) 以任意点为中心可以用任意半径作圆周；

(4) 所有直角都相等；

(5) 若一直线与另外两条直线相交，当有一侧的两个同侧内角之和小于两直角时，则这两条直线就在这一侧相交(称之为第五公设).

5个公理是：

(1) 等于同一量的量相等；

(2) 等量加等量，总量仍相等；

(3) 等量减等量，余量仍相等；

(4) 彼此重合的图形是全等的；

(5) 整体大于部分.

本卷从定义、公设、公理开始，接着用48个命题讨论了关于直线和由直线构成的平面图形——三角形的边、角关系、全等及垂线、平行线、平行四边形、多边形和面积等.

第二卷由14个命题组成，其主要内容为线段计算的有关公式、黄金分割、勾股定理的推广等.

第三卷是圆的命题，涉及圆心角、圆周角、切线、割线理论和圆定理等共计37个命题.

第四卷共有15个命题，阐述了圆的内接和外切多边形的性质及正五边形、正六边形、正十边形的作图.

第五卷用25个命题介绍了比例论.

第六卷由33个命题组成，包含平行截割定理、三角形的平分线定理、相似三角形定理、比例线段的作图等.

第七卷～第九卷为数论初步.

第十一卷～第十三卷(立体几何)分别由40、18、19个命题组成，包含直线与平面的相关位置、多面角、棱柱体、相似体积之比及正多面体等定理.

由此可见，欧几里得《几何原本》曾经是两千多年间一直被公认为用严格的逻辑结构来叙述学科的典范(如牛顿的《自然哲学的数学原理》、杰弗逊的《独立宣言》、马克思的《资本论》、爱因斯坦的《狭义相对论与广义相对论》等). 然而，用现代数学严谨观点来看《几何原本》，大致有如下几点不足：① 有些定义中含有需

要定义的概念. ② 有些定义是多余的. ③ 在有些定理的证明过程中,依靠了图形的直观,而这种直观自明性并未列入公理或公设中.

正是由于对欧几里得《几何原本》的讨论,尤其是非欧几何学的诞生,在数学界产生了巨大的反响. 如何改造欧几里得的几何公理系统,使之有严密的逻辑基础,怎样在一组定义、公理的基础上建立几何学的逻辑结构,它们应该满足一些什么样的基本条件、又怎样解释欧氏几何学、罗氏几何学和黎氏几何学这样一些互相矛盾,而本身又是符合逻辑规律的几何现象? 这些是 19 世纪中、下叶数学界的热门话题,并逐渐形成一门新的几何学分支——几何基础.

对几何基础贡献最大的是德国数学家希尔伯特(Hilbert). 1899 年,其经典著作《几何基础》出版. 书中对《几何原本》的缺点进行了全面的修正. 他在概念上推出不定义的几何基本对象和基本关系,并对《几何原本》的公理进行补充、归纳、分类,提出若干组不用证明的公理,以此为基础建构欧几里得几何学的严密的逻辑体系. 在他的几何体系中,基本对象和基本关系只有逻辑上的意义,不必特指某种直观的形式,只要满足公理的要求即可. 例如:他针对欧几里得几何提出三个不定义的基本对象为点、直线、平面,其可以是我们通常所理解的点、直线、平面,也可以是任何别的东西. 公理体系可以多样化,同一种几何学可以有不同的公理体系,而且在一个公理体系中变换其中部分公理,只要这些公理不是互相矛盾的,就可以建立起不同于原来几何学的新几何学. 什么样的公理体系才是严格的、科学的,应当依照什么原则建立公理体系呢? 希尔伯特在书中提出公理体系的三个基本问题:即公理体系的相容性、独立性和完备性. 相容性又称和谐性,这是公理体系最基本的要求,它要求公理之间互不矛盾,推出的命题也不能互相矛盾. 独立性是指公理体系中的每一个公理都是独立存在的,与其他公理不相关,也就是说任何一个公理不能从其他的公理推导出来,或者说在保留同样多的推论的前提下,公理体系所含公理的个数最少. 独立性是重要的,但有时为了推导方便起见,允许不独立的公理存在. 在中学几何教材中,把若干证明繁琐的定理扩大为公理,正是如此. 完备性是指公理的数目不能少.《几何原本》的公理体系不完备,没有顺序公理和连续公理,结合公理和合同公理也不完善,因此造成后续定理证明的不严密.

希尔伯特在其名著《几何基础》中所阐述的公理法思想很快得到数学界的普遍认可. 经其修订的《几何基础》是几何基本理论的优秀教材,公认的数学经典名著.

经希尔伯特改造的欧氏几何学是逻辑严密的典范,其构思可用下表表示. 希尔伯特公理化体系纲要:

- 希尔伯特公理体系
  - 基本概念
    - 基本元素（原始概念）
      - 点
      - 直线
      - 平面
    - 基本关系
      - 结合关系
        - 点在直线上
        - 点在平面上
      - 顺序关系：点介于两点之间
      - 合同关系
        - 两条线段相等
        - 两个角相等
    - 用于定义所有的几何概念和几何关系
  - 公理
    - 结合公理（$\mathrm{I}_1 \sim I_8$）
    - 顺序公理（$\mathrm{II}_1 \sim \mathrm{II}_4$）
    - 合理公理（$\mathrm{III}_1 \sim \mathrm{III}_5$）
    - 平行公理（IV_1）
    - 连续公理（$\mathrm{V}_1 \sim \mathrm{V}_2$）
    - 据此逻辑推理所有的几何定理

点、直线、平面是不定义的基本对象.

不定义的基本关系有："点结合直线"、"点结合平面"、"一点在另两点之间"、"线段合同"和"角合同".

公理有五组：

Ⅰ. 结合公理

"结合"是不定义的关系，上面所提到的两个基本的结合关系就是我们通常所说的点在直线上或直线通过点；点在平面上或平面通过点.点不结合直线，就是点不在直线上，或直线不通过点，点不结合平面亦可类似解释.

结合公理共有10个：

(1) 过两点的直线至少有一条；

(2) 过两点的直线至多有一条；

(3) 直线上至少有两点；

(4) 至少有三点不共线；

(5) 通过不共线三点，至少有一平面；

(6) 通过不共线三点，至多有一平面；

(7) 一平面上至少有一点；

(8) 若一直线上两点在一平面上，则这一直线上的每一点都在这一平面上；

(9) 若两平面有一公共点，则至少还有一公共点；

(10) 至少有四点不共面.

直接从以上公理可以推出我们熟悉的命题：

两点确定一直线；

两直线最多有一个公共点；

不共线三点确定一平面；

两相交直线确定一平面；

一直线和直线外一点确定一平面；

存在不共面的两直线；

……

Ⅱ. 顺序公理

所谓“顺序”也是基本对象的不定义的关系，就是我们通常所说的“在……之间”或“介于”. 基本顺序关系只有一个，公理有4个：

(1) 若 C 在 A、B 之间，则 A、B、C 三点共线且 C 在 B、A 之间；

(2) 对于两点 A、B，至少存在点 C，使 C 点在 A、B 之间；

(3) 在共线三点中，至多有一点在其余两点之间；

(4) (巴士公理)若直线 l 与 $\triangle ABC$ 共面，且不过其顶点而交其一边，则 l 必交另两边之一.

运用顺序公理可推出下面的结论：

对于两点 A、B，至少存在一点 C，使得 C 在 A、B 之间.

共线三点中恰有一点在其余两点之间.

一直线不过三角形顶点，不可能与三角形的三边都相交.

A、B、C、D 四点共线，且 D 在 B、C 之间，D 在 A、B 之间，D 在 A、C 之间恰有一个成立.

……

Ⅲ. 合同公理

“合同是不定义的基本元素之间的关系. 有两点、两直线、两线段、两角及两平面的合同. 对于两线段、两角即为通常意义上的相等.”(用“=”表示). 点、线、面的合同为通常的重合. 而后续可定义两三角形的合同，即为通常意义上的全等. 基本的合同关系为线段的合同和角合同. 合同关系满足下面5个公理：

(1) 若 A、B 为 l 上的点，A' 是 l' 的一侧，则在 l' 上 A' 的一侧，恰有一点 B'，使得 $AB=A'B'$；

(2) 若 $AB=A'B'$，$A''B''=A'B'$，则 $AB=A''B''$；

(3) 若 B 在 A、C 之间，B' 在 A'、C' 之间，并且有 $AB=A'B'$，$BC=B'C'$，则 $AC=A'C'$；

(4) $\angle AOB$ 在平面 α 内，射线 $O'A'$ 是平面 α' 内的射线，则在 α' 上以 $O'A'$ 为边缘的半平面内恰有一射线 $O'B'$，使得 $\angle A'O'B'=\angle AOB$. 特别地，有 $\angle AOB=\angle AOB$；

(5) 在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C$ 中，有 $AB=A'B'$，$AC=A'C'$，$\angle BAC=\angle B'A'C'$，则 $\angle ACB=\angle A'C'B'$，$BC=B'C'$.

从合同公理可推出下面的定理或推论：

对于线段的合同有：

定理 $AB=AB$（自反性）；

若 $AB=A'B'$，则 $A'B'=AB$ （对称性）；

若 $AB=A'B'$，$A'B'=A''B''$，则 $AB=A''B''$ （传递性）.

在定义三角形合同的基础上有：

定理 在$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$中，若 $AB=A'B'$，$AC=A'C'$，$\angle A=\angle A'$，则 $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C$.

定理 在$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$中，若 $AB=A'B'$，$\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$，则 $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

定理 在$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$中，若 $AB=A'B'$，$AC=A'C'$，$BC=B'C'$，则 $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

Ⅳ. 连续公理及其推论.

连续公理有两套，一套是戴得金(Dedekind)连续性命题，还有一套是阿基米得(Archimedes)和康托(Cantor)两人从不同角度建立的. 两套命题互为等价命题.

以戴得金命题作为公理，则阿基米得命题和康托命题作为定理.

连续定理 若线段 AB 的内点和端点能被分为满足下列性质的两类：

(1) A 属第一类，B 属第二类，每点恰属一类；

(2) 第一类中异于 A 的点在 A 和第二类之间，则存在一点 C，使 AC 上的点都属于第一类，CB 上的点都属于第二类.

点 C 称为戴得金点.

根据连续公理可推出一系列关于线段、角的分割定理以及如下熟悉的命题：

“通过圆内一点的直线与圆交于两点.”

“若圆 O 过另一圆 O' 的一个内点和一个外点，则两圆交于两点.”

Ⅴ. 平行公理及其推论

过直线外一点至多可引一条直线平行于该直线.

该公理即为《几何原本》中第五公设的等价命题，表述简单、明确，称为平行公理. 根据平行公理，在给出平行线的定义的前提下可推出如下定理：

“过直线外一点有唯一一条直线与已知直线平行.”

“两平行直线被第三条直线截得的同位角和内错角相等.”

“三角形的内角和等于两直角.”

……

以上就是在希尔伯特严密的公理体系下欧氏几何的逻辑框架，其中列出部分命题，主要是为了与中学几何的逻辑结构进行对比.