21世纪高等学校教材

新编
中学数学研究教程

第一册

张 雄 主编

陕西科学技术出版社

21世纪高等学校教材

新编
中学数学研究教程

第一册

主　　编　张　雄

本册主编　陈焕斌　赵临龙

本册副主编　于鸿丽　刘晓民　程　华

本册作者　（按姓氏音序排序）

安海龙　陈焕斌　程　华　洪　洁

黄云鹏　刘晓民　刘　燚　薛社教

于鸿丽　张　琳　赵临龙

陕西科学技术出版社

图书在版编目(CIP数据)

新编中学数学研究课程. 第1册/张雄主编. —西安:
陕西科学技术出版社,2008.8
ISBN 978-7-5369-4528-9

Ⅰ.新… Ⅱ.张… Ⅲ.数学课—教学研究—中学 Ⅳ.
G633.602

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第112892号

出版者	陕西科学技术出版社 西安北大街131号 邮编:710003 电话:(029)87211894 传真:(029)87218236 http://www.snstp.com
发行者	陕西科学技术出版社 电话:(029)87212206 87260001
印刷	陕西新胜印务有限责任公司
规格	787mm×960mm 16开本
印张	19.5
字数	375千字
版次	2008年9月第1版 2008年9月1次印刷
总定价	106.30元(一册 36.80元)

前　言

中学数学研究是高等师范院校数学系的一门专业课，它对于培养师范学生的专业素养和从业能力有着十分重要的意义. 我国基础教育新课程改革使中学数学从教材内容到教学理念、教学设计、教学方式以及学生的学习方式等都发生了巨大变化. 本套《新编中学数学研究教程》主要是为了适应这一新形势而编写的与中学数学新课程相衔接的高等师范院校教材，其内容涵盖了目前正在使用的《义务教育阶段国家数学课程标准》和《普通高中数学课程标准》中的初、高中数学教材内容.

本套教材的编写力求贯穿"一条主线""两个视角""三个任务"以及"两个特点"，这些编写原则构成本书的特点. "一条主线"即紧扣中学数学新课程教材；"两个视角"指从中学数学向上看，研究中学数学的高等背景，同时，从高等数学向下看，研究高观点下的中学数学；"三个任务"是指，本教材要对中学数学教材中处理不彻底、不严密的地方进行较彻底的严密化处理，给出中学数学只用不说的方法之理论基础，根据情况，要在数学思想方法(包括解题研究)、数学文化、数学史、数学知识的拓展、数学知识的本质与价值等方面进行适当的论述；"两个特点"即在内容上不求全面但求深刻，在研究风格上不求系统但求特色.

与传统中学数学课程相比，新课程增添了大量新内容(其中，多数正在高中选修系列中)，内容较多，本套《新编中学数学研究教程》要全面涉及，所以容量也较大，共分 3 册. 第一册为代数部分，第二册为几何部分，第三册为微积分、概率统计及算法等. 各院校在教学中可根据学时数做适当删减.

这套教材由主编张雄整体策划并提出编写的原则和思路要求. 本册由陈焕斌、赵临龙主编，陈焕斌同志完成了审稿、统稿工作，具体参加编写的有商洛学院的刘晓民(第 1 章及附录 1、2、3)、安康学院的赵临龙(第 2 章)、咸阳师范学院的程华(第 3 章)、西安文理学院的于鸿丽(第 4 章)、陕西教育学院的陈焕斌(第 5 章)、宝鸡文理学院的安海龙(第 6 章)、刘燚(第 7 章)、陕西理工学院的洪洁、张琳(第 8 章)、陕西教育学院的黄云鹏(第 9 章)、渭南师范学院的薛社教(附录 4)等同志.

本书的编写参考了大量的文献资料，我们对其作者和同行表示感谢并尽可能地列出参考书目. 受我们的水平所限，并且编写时间较短，本书一定还有不少缺点和错误，恳请读者和同行在使用中提出批评指正，以便将来进一步修订、完善.

编　者

2008 年 6 月

目录

绪论

《初等代数研究》是高师院校数学教育专业体现师范特色的课程之一. 通过本课程的学习，旨在使未来的中学数学教师不仅能够很好地把握并处理代数教材内容，而且知道中学代数中不严格定义的概念将如何给出精确定义，未给出严格证明的命题将如何给出证明，并了解常用的数学方法的理论依据. 本课程重视培养学生发现问题、解决问题的能力，重视思想方法，从而可以居高临下地把握中学代数教学.

因此，本课程的意义在于：第一，系统地学习初等代数课程，利于全面准确地掌握初等代数知识，为将来从事中学数学教学打下扎实的理论基础；第二，开展初等代数研究，利于科研意识和能力的形成，为将来在中学数学教学中开展创新能力培养做好心理准备；第三，与新课改结合，利于学以致用，为将来胜任中学数学教学提供实践平台；另外，加强初等数学与高等数学的联系，利于初等数学的进一步认识，并对高等数学的学习提供根本保证.

一、代数发展史

《初等代数研究》成为高师范院校数学教育专业的一门课程，历史并不长. 但"代数"一词，大约出现在公元 820 年. 当时，阿拉伯人阿尔·花拉子模著了一本《代数学》，1140 年左右罗伯特把它译成了拉丁文，书名是《al—jabr w'al mu-quabal-ah》，这里 al-jabr 的意思是"还原"或"移项".

1856 年，我国清代数学家李善兰和英国人伟烈亚力合译了《代数学》. 李善兰根据这门学科以字母代数的特点，恰当地把书名译为《代数学》.

大约在公元前 2000 年，巴比伦算术已经演化成为一种用文字表述的代数学. 他们既能用相当于代入一般公式的方法，又能用配方法来解二次方程，还讨论了某些三次方程和双二次方程.

约公元 50 年，《九章算术》成书.《九章算术》是中国流传至今最古老的一部数学专著之一. 在这本书里有许多代数问题，"方程"一词也源于《九章算术》.

大约公元 820 年，前面提到的花拉子模的代数学诞生. 这本代数学没有多大的独创性. 书中解释了四种基本运算，解出了线性方程和二次方程，后者既用了算术方法，又用了几何方法. 这部书还包括一些几何测量和一些关于遗产继承的问题.

作为研究方程理论的代数的进一步发展，按其需要首先应该研究数的概念

的扩充，其次，对于解方程所做的必要的计算，自然希望能够比较简单、比较直观以及容易描述，这样就导致代数符号的产生：不仅用文字来表示未知数，而且也用它来表示已知数值；逐渐地引入表示各种数学运算和关系的符号.

代数上的进步是引用了较好的符号体系. 正因为如此，代数才有可能成为一门科学. 16 世纪法国数学家韦达是第一个有意识地、系统地使用字母符号的人. 他的《分析方法入门》这本著作对符号代数学的发展有不少贡献. 他不仅用字母表示未知量和未知量的乘幂，而且用它来表示一般的系数. 韦达认为，代数是施行于事物的类或形式的运算方法，算术只是同数打交道的. 所以，当时人们把代数看成是关于字母的计算、关于由字母表示的公式的变换以及关于解代数方程等的科学. 或者概括地说，当时的代数是以代数方程的根的计算与分布为其研究中心的. 我们称这种代数为古典代数学.

继韦达之后，数学家笛卡儿对推动字母符号的使用，也作出了积极的贡献. 笛卡儿确立了用 26 个字母的前几个字母代表已知数，用最后的几个字母代表未知数的习惯用法. 他还引进了我们现在的指数系统（例如，a^3，a^4 等），比起韦达表示幂的方法有很大改进. 他还认识到，字母可以表示任何量：正的或负的.

笛卡儿一方面把代数主要当作进行几何问题研究的方便工具，另一方面，他也有足够的远见，能看到代数有它自身的生命力和意义. 他把代数看成是进行推理的有力工具，特别是对抽象的和未知的量进行推理的有力工具. 他认为代数使数学机械化，因而使思考和运算步骤变得简单，而无需花很大的脑力. 笛卡儿认为代数是逻辑的引申，是处理量的一门有用的学科. 这使他想到有可能创立一门范围较广的代数科学，能概括量及其他概念，并能用于研讨一切问题，甚至逻辑上的原理和方法也可能用符号来表达，而整个体系则可用之于使一切推理过程机械化. 笛卡儿虽然没有创造出这样的代数学，但他毕竟是第一个提出科学的代数学含义的人，以后的历史事实完全证实了这一点.

17 世纪以来，数学家们对一元 n 次方程 $x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ 的研究几乎没有中断过，特别是对于高次代数方程是否可以用根式来解的问题进行了研究. 19 世纪初数学家阿贝尔在其早年的论文中证明了用根式解一般五次方程的不可能性. 特别应当提出的是，年青的数学家伽罗瓦创立了包含关于群论和方程的所谓伽罗瓦理论. 伽罗瓦理论奠定了群论的基础，提供了用欧几里得工具解几何作图题的可能性和用根式解代数方程的可能性的判别准则. 伽罗瓦彻底解决了高次代数方程是否可以用根式来解的问题. 在代数中，群的概念成为一个综合的基本结构，成为抽象代数在 20 世纪兴起的重要因素. 伽罗瓦可以说是抽象代数学的创始者. 从那时起，抽象代数学由萌芽开始成长而发展.

大概从 19 世纪末叶开始，群以及与之紧密相联系的不变量的概念，在几何、分析以及在理论物理等领域，都发生了重大的影响. 这时，代数学呈现出崭新的

面貌,它所研究的对象扩大了.它是以研究数字、文字和更一般元素的代数运算的规律及各种代数结构——群、环、域、代数、格等——的性质为其中心问题的.这时,代数学从以研究方程为中心的古典代数转变为以研究各种代数结构的性质为中心的抽象代数学.

二、代数研究的思想方法

所谓数学思想是指现实世界的空间形式的数量关系反映在人的意识再经过思维活动而产生的结果,是对数学知识发生过程的提炼、抽象、概括和升华,是对数学规律的理性认识,是数学思维的结晶,并直接支配数学的实践活动,是解决数学问题的灵魂.

所谓数学方法,就是数学思想的表现形式,是指在数学思想的指导下,为数学活动提供思路和逻辑手段,以及具体操作原则的方法,是解决数学问题的根本策略和程序.数学方法是以数学为工具进行的方法,即用数学语言表达事物的状态、关系和过程,经过推导、运算和分析,以形成解释、判断和预言的方法.

数学思想和数学方法既有联系又有区别,数学思想是数学方法的理论基础和精神实质,数学方法是实施有关数学思想的技术手段.一般说来,数学思想具有概括性和普遍性,带有理论特征,如符号化思想、集合对应思想、转化思想等.而数学方法具有可操作性和具体性,具有实践倾向,如消元法、换元法、配方法、待定系数法等.思想比方法在抽象程度上处于更高的层次.因此,对于学习者来说,思想和方法都是其思维活动的载体,运用数学方法解决问题的过程就是感性认识不断积累的过程,当这种积累达到一定程度就会产生质的飞跃,从而上升为数学思想,一旦数学思想形成之后,便对数学方法起着指导作用.因此,人们通常将数学思想与方法看成一个整体概念——数学思想方法.

一般认为,数学思想方法从接受的难易程度可分为三个层次:第一,是基本具体的数学方法,如配方法、换元法、待定系数法、归纳法与演绎法等;第二,是科学的逻辑方法,如观察、归纳、类比、抽象概括等方法,以及分析法、综合法与反证法等逻辑方法;第三,是数学思想,如数形结合的思想、函数与方程的思想、分类讨论的思想及化归与转化的思想等.

1. 代数研究的思想

数学思想属于科学思想,但科学思想未必就单单是数学思想.例如,分类思想是各门科学都要运用的思想,它不是单由数学给予的.只有将分类思想应用于空间形式和数量关系时,才能成为数学思想.

在数学思想中,有一类思想是体现或应该体现于基础数学中的具有奠基性和总结性的思维成果,这些思想可以称之为基本数学思想.基本数学思想含有传统数学思想的精华和近现代数学思想的基本特征,并且也是历史地形成和发展

着的.基本数学思想包括:符号与变元表示的思想、集合思想、对应思想、公理化与结构思想、数形结合的思想、化归的思想、对立统一的思想、整体思想、函数与方程的思想、抽样统计思想、极限思想(或称无限逼近思想)等.

基本数学思想有两大“基石”——符号与变元表示的思想和集合思想,又有两大“支柱”——对应思想和公理化与结构思想.有些基本数学思想是从“基石”和“支柱”衍生出来的,例如“函数与方程的思想”衍生于符号与变元表示的思想(函数式或方程式)、集合思想(函数的定义域或方程中字母的取值范围)和对应思想(函数的对应法则或方程中已知数、未知数的值的对应关系).所以我们说基本数学思想是体现或应该体现于“基础数学”(而不是说“初等数学”)的具有奠基性和总结性的思维成果.基本数学思想及其衍生的数学思想,形成了一个结构性很强的网络.中学数学教育、教学中传授的数学思想,应该都属于基本数学思想.

代数研究的符号与变元表示的思想,对数学学科的形成和人类理性素养的养成起着至关重要的作用.正是“变元”的思想,人们才能从静态的“算术”过渡到动态的“代数”,也才能从“常量数学”(经过笛卡儿的解析几何)发展为初等的“变量数学”(再经过牛顿的微积分)上升为近代的“高等数学”,以至成为人类社会进步必不可少的重要的基础学科——数学学科;同时,又是“符号”的出现,才使欧氏几何得以创立,使它成为训练人们理性思维的不朽科学.

由此将从另一个侧面告诉人们:为什么西方人重“理性”,而我们国民重“感情”;为什么西方人以“真理”为上,而我们却以“官”为上;为什么现代西方人科技发达,而我们却落后……这些都在一定程度上说明,我们的汉字(缺少“字母”表示事物)影响了“符号”数学的建立(明朝的徐光启最早翻译《几何原本》),使数学未能成为构建文明社会的重要理性思想.因此,今天的数学,在培养人们的“理性”“诚信”“创新”等素养方面,将发挥更加重要的作用.

2. 代数研究的方法

数学方法在科学技术研究中具有举足轻重的地位和作用:一是提供简洁精确的形式化语言,二是提供数量分析及计算的方法,三是提供逻辑推理的工具.现代科学技术特别是电脑的发展,与数学方法的地位和作用的强化正好是相辅相成的.

宏观的数学方法包括:模型方法、变换方法、对称方法、无穷小方法、公理化方法、结构方法、实验方法.

微观的且在代数研究中常用的基本数学方法大致可以分为以下三类:

(1) 逻辑学中的方法.例如分析法(包括逆证法)、综合法、反证法、归纳法、穷举法(要求分类讨论)等.这些方法既要遵从逻辑学中的基本规律和法则,又因运用于数学之中而具有数学的特色.

(2) 数学中的一般方法.例如建模法、消元法、降次法、代入法、图像法(也称

坐标法.代数中常用图像法,解析几何中常用坐标法)、向量法、比较法(数学中主要是指比较大小,这与逻辑学中的多方位比较不同)、放缩法、同一法、数学归纳法(这与逻辑学中的不完全归纳法不同)等.这些方法极为重要,应用也很广泛.

(3) 数学中的特殊方法.例如配方法、待定系数法、加减法、公式法、换元法(也称之为中间变量法)、拆项补项法(含有添加辅助元素实现化归的数学思想)、因式分解法等方法.这些方法在解决某些数学问题时起着重要作用,不可等闲视之.

值得一提的是,数学模型方法已成为解决实际问题的主要方法.随着科学技术的发展,高科技与数学的关系日益密切,产生了许多与数学相结合的新学科,如数学化学、数学生物学、数学地质学、数学社会科学,等等,加之当代计算机科学的发展和广泛运用,使得数学模型方法如虎添翼,加速了数学向各个学科的渗透,使数学由过去的后台服务直接跃到前台,成为一种数学技术.

因此,今天的数学,已由过去传统的工具性上升为普适性的技术,成为人们就业和谋生的必备素养.

3. 中学数学思想方法教学注意的问题

中学数学教学内容可以分为两个层次:一个称为表层知识,另一个称为深层知识.表层知识包括概念、性质、法则、公式、公理、定理等数学的基本知识和基本技能,深层知识主要指数学思想和数学方法.表层知识是深层知识的基础,是教学大纲中明确规定的、教材中明确给出的、具有较强操作性的知识.

数学思想方法与数学基础知识相比较,具有较高的地位和层次.数学知识是数学内容,可以用文字和符号来记录和描述,随着时间的推移,记忆力的减退,将来可能会忘记.而数学思想方法则是一种数学意识,只能够领会和运用,属于思维的范畴,用以对数学问题的认识、处理和解决,掌握数学思想方法,不是受用一阵子,而是受用一辈子,即使数学知识忘记了,数学思想方法仍然发挥着作用.

学生只有通过对教材的学习,在掌握和理解了一定的表层知识后,才能进一步地学习和领悟相关的数学思想方法.数学思想方法蕴含于表层知识之中,是数学的精髓,它支撑和统帅着表层知识.教师在讲授表层知识的过程中,必须深挖表层知识中所蕴含的数学思想方法,并将它不断地渗透在相关的表层知识教学中,让学生在掌握表层知识的同时,领悟到数学思想方法的美妙,才能使学生的表层知识达到一个质的"飞跃",使其更富有朝气和创造性.

那种只重视讲授表层知识,而不注重渗透数学思想、方法的教学,是不完备的教学,它不利于学生对所学知识的真正理解和掌握,使学生的知识水平永远停留在一个初级阶段,难以提高;反之,如果单纯强调数学思想和方法,而忽略表层知识的教学,就会使教学流于形式,成为无源之水、无本之木,学生也难以领略到深层知识的真谛.

数学思想方法中，数学基本方法是数学思想的体现，是数学的行为，具有模式化与可操作性的特征，可以转化为解题的具体手段. 数学思想是数学的灵魂，它与数学基本方法常常在学习、掌握数学知识的同时获得. 可以说，“知识”是基础，“方法”是手段，“思想”是深化. 因此，数学思想、方法的教学应与整个表层知识的讲授融为一体，使学生逐步掌握有关的深层知识，提高数学能力，形成良好的数学素质.

第1章 数 系

客观世界的空间形式及数量关系是数学研究的基本对象.而数系又是研究数量关系的起点,同时它也是数学大厦的基石.这一事实决定了数的概念是现代数学的基本概念,也是中小学数学教学的重要概念之一.

在中学,对于数的概念的学习,学生在开始学习代数前的小学义务教育阶段里,已经掌握了自然数、零和简单的正分数的基本知识;初中义务教育阶段是在算术数的基础上通过引进负数建立有理数,进而又在有理数的基础上添加无理数建立实数.至此,与人们日常生活密切相关的数的概念,学生在义务教育阶段就建立起来了.到了高中教育阶段,则是在实数的基础上构造出虚数,从而将实数集扩充为复数集.由此可以看到,数的学习和认识过程始终贯穿于中小学数学教学的整个过程.同时,数的学习也是学生学好其他数学知识的坚实基础,如解析式、方程、不等式、函数、数列、概率与统计初步等.

长期以来,数系的内容在中小学数学教学中占有较大的比重,但由于过分强调科学性和系统性,过分追求“形式化”,忽视了与实际生活的联系,有关计算和推导过于繁琐,从而使学生无法很好地理解问题的本质,看不到数学的用处,体会不到数学的价值,更无法用学到的知识去解决问题,让学生失去了对数学学习的兴趣和信心.

新课程的数学教学理念是:让学生亲近数学、了解数学、用数学,学会“用数学的眼光去认识自己所生活的环境与社会”,学会“做数学”和“数学地思考”,发展学生的理性精神、创新意识和实践能力,培养学生克服困难的意志力,建立自信心等.正是基于此种情形的考虑,新课程标准第一次明确地把数感作为数学学习的内容提了出来.数感是一种主动地、自觉地或自动化地理解数和运用数的态度与意识.它是人的一种基本的数学素养.数感主要表现在:理解数的意义;能用多种方法来表示数;能在具体的情境中把握数的相对大小关系;能用数来表达和交流信息;能为解决问题而选择适当的算法;能估计运算的结果,并对结果的合理性作出解释.

从数的概念出发发展出了算术、代数以及庞大的分析系统.并且数与数系的每一次扩展,都伴随着数学思想的重大变革.因此,从某种程度上讲,让学生学习数系的扩展,就是让学生了解数学的发展,进而培养和发展学生的理性精神,帮助学生学会“数学地思考”.这些也正是中学数学课程现代化的要求.

因此,本章在集合论的基础上,根据数的扩展原则,运用构造法和添加元素

法,将数系从自然数系扩充到了复数域.并结合现代数学的特点,简单讲述集合与关系,以及几个常见而重要的代数系统——群、环、域的理论.

1.1 数的产生与发展

人们对数的认识和扩展经历了一个漫长而曲折的过程.实际上,在人类社会发展活动过程中,人的生产和日常生活的需要直接推动了数的产生和发展.但是这些推动得以实现,却是通过数学自身矛盾,如运算的封闭性、算法的合理性、逻辑的严密性等的不断解决来完成的.这些,在中小学数学教学内容中都有清晰的反映.另外,数的产生和扩展历程,在一定程度上反映了数学的发展.因此,了解数的发展历史和数系扩展的相关理论,除了使我们从整体上掌握数的概念、运算和性质,还可以让我们更好地理解数学的思想方法,以及数学的文化价值.

1.1.1 数的形成与发展

最先被人们认识和运用的数是自然数.在早先的远古时代,人类在采集野果、狩猎和捕鱼等劳动中,有时有收获,有时却没有收获.这样,逐渐形成了“有”与“无”的概念;有了收获后,各种劳动成果在不同劳动群体间的分配,便形成了“多”与“少”的概念.同时,对于不断增加的劳动成果,人们就有了计数的需要.人类最初的计数活动,起始于清点猎物和猛兽等活动过程的用手指数数.从而把手指头一个一个地与猎物对应起来,以认识捕获猎物的“多少”.这种数数的过程,实际上,就是在要数的物体的集合与手指的集合之间建立起了一个一一对应,这就是我们现在熟知的映射思想.如果他的手指头不够用,他就采用“记账”的手段,例如,刻骨、结绳等办法.这样,在不知不觉中,他已经不受“十”这个数的限制了.这个时期作为与具体事物无关的数与具体事物还没有完全分离,例如,用一只手表示数“5”,用双手表示数“10”.人们经过长期的反复实践,认识到在作标记的过程中,究竟牵涉的是哪种物体并不是很重要的,只要能够表明物体集合的某些整体性质,即数量的多少,就达到了标记的目的.至此,才把一一对应的集合间的共同特征抽象为数(自然数),并产生了代表它的符号,于是便形成了自然数的概念.

创立了自然数的符号后,遇到的第一个问题就是计数法和进位制.目前采用的是10进位值制,可以方便清楚地将一切自然数表示出来.关于10进制,公元前4世纪的哲学家亚里士多德曾指出:10进制的广泛使用,是由绝大多数人生有10个手指和10个脚趾这一生理特征决定的.中国是最早发明和使用10进位值制的文明古国.“10进位值制”,即在一个数里,其中一个数码表示什么数要看它所在的位置而定.古埃及人发现的10进制虽然是世界上最早的,但它采用的是

累计值而不是位值制. 马克思在他的《数学手稿》中称赞中国的10进位值制是"最妙的发明之一". 但是目前使用的记数法却是印度与阿拉伯人引进的. 记数法与10进制的诞生是自然数发展史上的一次飞跃. 我们仅仅需要1,2,…,9,0这有限的10个符号,就可以完成将无穷无尽的自然数方便、清晰地表示出来的任务.

随着生产、生活的不断丰富和发展,人们发现仅有自然数还是不能满足需要. 譬如,在土地测量等过程中,常常会发生度量不尽的情况;如果要更精确地度量,就必然产生自然数不够用的矛盾. 另外,在进行猎物的分配时,也时常会发生猎物少而人数多的不够分配的情形. 于是,正分数就应运而生. 这是人类对数的概念的第一次扩展(约在公元前1700年). 3000多年前的古埃及纸草书中,就已经记有分子是1的分数(单位分数)的诸多性质,后人称之为埃及分数.

在小学数学课程中,把"0"的引入作为数的第一次扩展. 实际上,历史上"0"的引入比正分数晚很多. 表示零的符号"0",在数学史上曾被公认为是划时代的一个进步符号. 它的出现,直接来源于位值制记数法. 大约在公元6世纪,印度数学家发明了用符号"0"表示零. 我国古代筹算中,是用空位的方法来表示零的. 引进数0,从而完成了数的概念的第二次扩充. 自然数,0,正分数合在一起组成了算术数集,这就构成了小学数学的数的集合.

为了表示具有相反意义量的需要,引入负数,完成了人类对数的第三次扩展. 中国是世界上首先发现与认识负数的国家. 公元前1世纪的《九章算术》中不仅有正负数意义及其加减运算的法则,而且后来刘徽在《九章算术注》中还给出了运用算筹表示负数的方法:"正算赤,负算黑."印度是我国以外最早使用负数的国家. 公元7世纪,印度数学的鼻祖婆罗摩笈多(Brahmagupta,公元598－665年以后,印度)在将代数学运用于天文学时,首先发现了负数的运算法则,并给出了相关的记法,但未对负数的意义进行解释. 至于欧洲等西方国家对负数的认识,则落后于中国1500年左右. 他们普遍存在不承认负数(由于负数不能实际测量),但又使用负数(在一些没有实际含义的问题中)的矛盾,而且许多大名鼎鼎的数学家都处在这种认识中. 从而展开了长时间的争论,最后归结于方程有没有负根. 直至19世纪,在整数运算的逻辑基础上建立了负数的理论后,负数才得到广泛而彻底的承认.

无理数的引入是与量的度量分不开的. 古希腊毕达哥拉斯(Pythagoras,约公元前580－前500年,古希腊)学派认为,数皆可表示为两整数比的形式. 但在公元前5世纪,该学派成员希帕索斯却发现单位正方形的对角线长无法用分数表示. 这就说明确实存在着不可公度的量. 这一发现导致了无理数的产生. 不过,当时人们只能用几何的形式来说明无理数的存在. 直到19世纪70年代,戴德金(R. Dedekind,1831－1916,德国)、康托尔(G. F. Cantor,1845－1918,德国)和魏尔斯特拉斯(K. Weierstrass,1815－1894,德国)等数学家运用现代数学观点,分

别用不同的方法，建立起了等价的、严格的实数的科学理论.

引进无理数，形成实数集，是数的概念的第四次扩展.

早在实数理论建立之前，虚数的概念就产生了. 虚数的产生与前几次新数的引入不同，它不是源自记数或实际测量的结果，而是由于数学自身的需要. 16 世纪前半叶，意大利数学家卡尔达诺在《大术》中大胆地引用了负数开平方这种被称为“虚数单位”的新数，给出了三次方程的求根公式，虚数便被创造出来了. 但在以后的两百多年间，许多数学家都不承认虚数的合理性. 直到 18 世纪后期著名数学家欧拉(Euler，1707－1783，瑞士)建议用符号“i”来表示这个数，于是有了 $\sqrt{-1}=\mathrm{i}$，之后，高斯(K. F. Gauss，1777－1855，德国)运用笛卡儿坐标系对其作出了合理解释，并与欧拉建立了比较系统的复数理论，至此，虚数才得到广泛承认.

高斯使用笛卡儿坐标系，将水平方向的 x 轴指定为实数轴，除去原点的 y 轴叫做虚轴，以 i 为虚数单位. 实轴上的每一个点都是纯实数，虚轴上的每一个点都是纯虚数(用实数乘 i 表示). 于是，复平面上的每一个点都能找到一个有序实数对与其一一对应，即坐标系上每个点都可用两个数 a 和 b 表示. 这两个数定义了一个复数 $a+b\mathrm{i}$，其中 a 是它的实数部分，b 是它的虚数部分. 高斯用这种方法定义了复数，实数只是复数的一个子集，是虚部为 0 的复数. 这是数的第五次扩充.

由于虚数和复数表示的量在现实生活中长期得不到应用，使人们感到虚数有些“虚无缥缈”. 这就是“虚数”名称的来源. 随着科学的发展，虚数在水力学、地图学、航空学等领域有了广泛的应用，从此，虚数不再“虚”了.

当数的概念发展到复数以后，在很长一段时间内，数学家们普遍认为数的概念已经十分完善了. 1828 年，哈密尔顿(W. R. Hamilton，1805－1865，爱尔兰)开始考虑将复数的思想推广到三维空间. 但长时间内没有进展，直到 1843 年 10 月 16 日，他终于提出了“四元数”的概念，所谓四元数，就是一种形如 $n+xi+yj+zk$ 的实数四元数组. 它是由一个标量(实数)和一个向量 $xi+yj+zk$(其中 x,y,z 为实数)组成的，且有下列等式成立：

$$\boldsymbol{i}^2=\boldsymbol{j}^2=\boldsymbol{k}^2=-1,$$

$$\boldsymbol{ij}=-\boldsymbol{ji}=\boldsymbol{k},\boldsymbol{jk}=-\boldsymbol{kj}=\boldsymbol{i},\boldsymbol{ki}=-\boldsymbol{ik}=\boldsymbol{j},\boldsymbol{ijk}=-1.$$

哈密尔顿的四元数使代数学家认识到，通过适当改变代数中的基本运算规则，可以拓展得出新的数. 因此，四元数理论标志着现代抽象代数的开始.

数系的发展并没有到此结束，由于科学技术发展的需要，向量、张量、矩阵、群、环、域等概念不断产生，把数系研究推向一个又一个新的高峰，尽管人们对数的归类方法还有分歧，但在承认数的概念还会不断发展这一点上是完全一致的.

通过上面对数的概念发展历史的简单回顾，我们发现，数的概念的产生与发展是交错进行的. 说它交错进行是指它们不同于科学的数系的逻辑顺序，也不同于中小学数学教学中的数的顺序. 例如，在人们引进负数之前，早就知道了无理

数的存在；在实数理论还未完全建立时，已经能够运用虚数解一元高次方程了.

1.1.2　科学的数系扩展的方式与原则

数系通常是指对某种运算封闭的具有特定结构的数集. 如自然数集 **N**、整数集 **Z**、有理数集 **Q**、实数集 **R** 以及复数集 **C** 等都是数系.

近代数学关于数系的理论，是在总结数的历史发展基础上建立起来的. 从 19 世纪中叶开始，人们开始认真研究整个数系的逻辑结构，经过皮亚诺(G. Peano，1855－1932，意大利)、康托尔(G. Cantor，1845－1918，德国)、戴德金、魏尔斯特拉斯等数学家的不懈努力，运用代数结构的观点和严格的公理化系统，首先建立起自然数系，然后再逐步加以扩展. 一般采用的扩展过程是：

N(自然数系)$\longrightarrow$**Z**(整数环)$\longrightarrow$**Q**(有理数域)$\longrightarrow$**R**(实数域)$\longrightarrow$**C**(复数域).

1. 数系扩展的方式

(1) 添加元素法：即把新元素添加到已建立的数系中去，形成新的数系. 历史上数系扩展的方式大致如此.

(2) 构造法：这是按照代数结构的观点和比较严格的公理系统扩展数系的方法. 一般是先从理论上构造一个数的集合，然后指出这个数的集合的某个真子集与已知数系是同构的.

作为中小学数学教学中的数系扩展，由于考虑到中小学生的年龄特征、认知能力与智力水平，主要是适当渗透近代数学观点，采用添加元素法，并用强调运算方法来取代抽象的公理化体系扩展数系的概念，每一次数系的扩展均未作严格而详尽的论证. 其扩展过程是：

自然数集$\xrightarrow{\text{添零}}$扩大的自然数集$\xrightarrow{\text{添正分数}}$算术数集$\xrightarrow{\text{添负数}}$有理数集$\xrightarrow{\text{添无理数}}$实数集$\xrightarrow{\text{添虚数}}$复数集.

2. 数系扩展的原则

把一个数系 A 扩展到新数系 B，不论哪种方法，都应遵循：

(1) A 是 B 的真子集，即 $A\subset B$；

(2) A 的元素间所定义的一些运算或基本关系，在 B 中被重新定义，而且对于 A 的元素来说，重新定义的运算和关系与 A 中无矛盾，意义完全一致，并保持它们在数集 A 中的一些主要性质；

(3) 在 A 中不能总是施行的某种运算，在 B 中总能施行；

(4) 在同构意义下，B 应当是 A 的满足上述三条的最小扩展，而且由 A 唯一确定(如把自然数系扩展到整数系，而不是立即就扩展到实数系).

几点说明：