



“十二五”职业教育
国家规划教材
经全国职业教育教材
审定委员会审定

经济数学

(第二版)

主编 陈笑缘

高等教育出版社

贵州大学规划教材

贵州大学教材建设委员会审核批准



国际税收(双语版)
**INTERNATIONAL
TAXATION**

(Bilingual Edition)

贵州大学出版社
Guizhou University Press

内容提要

本书是“十二五”职业教育国家规划教材；也是国家级精品资源共享课立项课程“经济数学”的配套教材。本书是在第一版《经济数学》基础上，结合“经济数学”国家级精品资源共享课程建设与课程改革的理念修订的。

全书内容分公共基础模块、专业应用模块与数学实验模块三大部分，主要包括微积分、线性代数及其应用、线性规划及其应用、概率统计初步等。编排由浅入深，通俗易懂，既考虑学生的知识基础，又顾及学生的接受能力，特别设置了带“+”号与带“*”号的内容。带“+”号的内容是提高型内容，学生在掌握已有知识的基础上，经过学习可进一步提升能力；带“*”号的内容是拓展型内容，经过学习进一步培养学生的创新思维，学生可根据自身的能力进行选学。每章后有内容小结、习题、自测题等，每节后有同步训练。同时，本书结合数学知识讲授，安排了相应的 MATLAB 数学实验、数学建模案例、数学文化知识等。

本书使用者可通过访问国家精品开放课程共享平台（爱课程网，<http://www.icourses.cn>）上的资源共享课“经济数学”在线学习相关资源，亦可按照“郑重声明”页的资源服务提示获取其他资源服务。

本书可作为高职高专院校经济管理类专业经济数学课程教材，也可作为民办高校、继续教育学院经济数学课程教材，以及有关人员学习经济数学知识的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

经济数学/陈笑缘主编.--2版.--北京:高等教育出版社,2014.8

ISBN 978-7-04-039305-7

I. ①经… II. ①陈… III. ①经济数学-高等职业教育-教材 IV. ①F224

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 015106 号

策划编辑 王玲玲

责任编辑 王玲玲

封面设计 杨立新

版式设计 王莹

插图绘制 尹文军

责任校对 刁丽丽

责任印制 赵义民

出版发行 高等教育出版社

社址 北京市西城区德外大街4号

邮政编码 100120

印刷 大厂益利印刷有限公司

开本 787mm×1092mm 1/16

印张 20.5

字数 510千字

购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598

网 址 <http://www.hep.edu.cn>

<http://www.hep.com.cn>

网上订购 <http://www.landaco.com>

<http://www.landaco.com.cn>

版 次 2009年9月第1版

2014年8月第2版

印 次 2014年8月第1次印刷

定 价 31.90元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物料号 39305-00

| 出版说明 |

教材是教学过程的重要载体,加强教材建设是深化职业教育教学改革的有效途径,推进人才培养模式改革的重要条件,也是推动中高职协调发展的基础性工程,对促进现代职业教育体系建设,切实提高职业教育人才培养质量具有十分重要的作用。

为了认真贯彻《教育部关于“十二五”职业教育教材建设的若干意见》(教职成〔2012〕9号),2012年12月,教育部职业教育与成人教育司启动了“十二五”职业教育国家规划教材(高等职业教育部分)的选题立项工作。作为全国最大的职业教育教材出版基地,我社按照“统筹规划,优化结构,锤炼精品,鼓励创新”的原则,完成了立项选题的论证遴选与申报工作。在教育部职业教育与成人教育司随后组织的选题评审中,由我社申报的1338种选题被确定为“十二五”职业教育国家规划教材立项选题。现在,这批选题相继完成了编写工作,并由全国职业教育教材审定委员会审定通过后,陆续出版。

这批规划教材中,部分为修订版,其前身多为普通高等教育“十一五”国家级规划教材(高职高专)或普通高等教育“十五”国家级规划教材(高职高专),在高等职业教育教学改革进程中不断吐故纳新,在长期的教学实践中接受检验并修改完善,是“锤炼精品”的基础与传承创新的硕果;部分为新编教材,反映了近年来高职院校教学内容与课程体系改革的成果,并对接新的职业标准和新的产业需求,反映新知识、新技术、新工艺和新方法,具有鲜明的时代特色和职教特色。无论是修订版,还是新编版,我社都将发挥自身在数字化教学资源建设方面的优势,为规划教材开发配备数字化教学资源,实现教材的一体化服务。

这批规划教材立项之时,也是国家职业教育专业教学资源库建设项目及国家精品资源共享课建设项目深入开展之际,而专业、课程、教材之间的紧密联系,无疑为融通教改项目、整合优质资源、打造精品力作奠定了基础。我社作为国家专业教学资源库平台建设和资源运营机构及国家精品开放课程项目组织实施单位,将建设成果以系列教材的形式成功申报立项,并在审定通过后陆续推出。这两个系列的规划教材,具有作者队伍强大、教改基础深厚、示范效应显著、配套资源丰富、纸质教材与在线资源一体化设计的鲜明特点,将是职业教育信息化条件下,扩展教学手段和范围,推动教学方式方法变革的重要媒介与典型代表。

教学改革无止境,精品教材永追求。我社将在今后一到两年内,集中优势力量,全力以赴,出版好、推广好这批规划教材,力促优质教材进校园、精品资源进课堂,从而更好地服务于高等职业教育教学改革,更好地服务于现代职教体系建设,更好地服务于青年成才。

高等教育出版社

2014年7月

第二版前言

本书自2009年9月由高等教育出版社首次出版发行以来,被许多高职高专院校作为教材或参考书选用。为了适应高职高专教育不断发展与人才培养工作改革的需要,编者结合数年的教学实践与研究,根据高素质技能型人才培养要求,在首版基础上提出以下修订方案:

1. 以“结合专业、注重能力、突出应用”的思想为指导,注重中高职衔接,进行教学内容“模块化”、“分层次”设计。

以经济管理类专业人才培养目标为依据,根据经济管理类专业特点与学生生源差异,以“结合专业、注重能力、突出应用”的思想为指导,注重中高职衔接,进行教学内容“模块化”、“分层次”设计。适当调整原有章节,将《经济数学》内容分为“公共基础模块”与“专业应用模块”。“公共基础模块”为经济管理类各专业必学的内容;“专业应用模块”为经济管理类各专业根据需要选学的内容。内容编写上兼顾中高职衔接,充分考虑学生生源的多样性与基础情况,力求内容通俗有趣,例题与习题由浅入深,满足不同专业各层次学生多样化学习的需要。

2. 深化“问题导向、案例驱动”的教学设计,满足学生认知规律与职业发展规律的需要。

本书将在概念的引入上更加突出“问题导向”,增加应用案例,使教材显得自然、亲切,让学生感到知识的发展水到渠成,有利于学生认识数学内容的实际背景和应用价值,使学生能较深刻地理解,同时能感受数学源自生产、生活实际。在知识与技能的运用上,强调数学应用意识的培养,以“案例驱动”的方式突出数学内容与专业学习结合;通过剖析专业应用案例,帮助学生学会用数学知识与方法分析、解释或解决经济与生活中的现象与问题,培养学生应用数学的思想。在处理定理与公式推导方面,避免逢理必证或逢理不证的极端现象,而是本着量力而行的原则,结合图形描述直观形象地加以适当解释、推理,使数学课程的学习由抽象、烦琐、索然无味变成形象、简单、生动有趣。

3. 融入建模思想与实验方法,进一步渗透“数学应用与素质教育”并重的理念。

根据学生的接受能力,结合理论知识,介绍数学实验与数学建模实例,使数学知识、建模思想与实验方法有机融合,形成“教、学、用”融为一体的教学模式,让学生在解决实际问题中学习,培养创新思维与应用能力,激发学生学习兴趣。同时,结合教学内容将数学故事、数学史与数学家等文化知识编进教材,渗透数学文化思想,发挥数学教育功能。

4. 以国家级精品资源共享课程为平台,进一步丰富提升配套数字化资源,优化教学。

通过国家级精品资源共享课程“经济数学”平台建设,加强与教材配套的电子授课教案(整体教学设计、学习单元设计、教学实施方案设计)、电子教学课件、课程学习指导、自测题库、全程教学录像等教学资源的建设与更新。另外,不断丰富动画库、案例库等配套数字化资源,优化课堂教学。

全书内容包括:微积分、线性代数及其应用、线性规划及其应用、概率统计初步等内容。

内容上由浅入深,通俗易懂。既从学生知识基础出发,又从学生接受能力出发,特别设置了带“+”号与带“*”号的内容。带“+”号的内容是提高型内容,学生在掌握已有知识的基础上,经过学习可进一步提升能力;带“*”号的内容是拓展型内容,经过学习进一步培养学生的创新思维,学生可根据自身的能力进行选学。为了巩固知识与提升能力,每章后有内容小结、习题、自测题等,每节后有同步训练。小结梳理本章的知识点,突出重点与难点,搞清知识间的联系;同步训练、习题、自测题可供学生进行综合训练及自行检测分析问题与解决问题的能力。同时结合数学知识,安排了相应的 MATLAB 数学实验、数学建模案例、数学文化知识等。

与本书相配套的有多媒体课件、案例汇编、习题与自测题解答等资源,供学生学习与教师教学使用。

全书由陈笑缘教授任主编,并统稿以及定稿。刘莹副教授、姬天富副教授、张天鹤副教授、王君丽副教授任副主编。第 1、2、3、4、5、6、10 章由陈笑缘编写,第 7 章由王君丽副教授与陈笑缘教授编写,第 8 章由刘莹副教授编写,第 9 章由姬天富副教授与张天鹤副教授编写。

在编写过程中得到了浙江商业职业技术学院、连云港职业技术学院、无锡商业职业技术学院、台州科技职业学院、山东英才学院、山东交通职业技术学院与高等教育出版社的指导和帮助,在此表示衷心感谢。

由于编者水平有限,书中不妥之处在所难免,敬请广大读者批评指正,若有建议请发送至邮箱:cxy5988@sina.com。

编 者

2013 年 11 月

| 第一版前言 |

为了适应高职高专教育发展的需要,满足高职高专教育应用型人才培养目标的要求,进一步提高教学质量的基础性建设,推动教学资源的现代化进程,我们根据教育部制订的“高职高专教育高等数学课程教学基本要求”编写了本书,编写过程始终贯彻以下四项原则:

第一,“必需够用,淡化推理”的原则。教材内容安排突出高职数学在专业课程和实际生活中的应用,理论知识以够用为度,涉及性质与定理的内容,以图形描述或数值表达或文字说明加以适当解释,淡化逻辑推理,具有高职高专教育特色。

第二,“专业结合,突出应用”的原则。教材体系突出与各经济管理类专业紧密结合的特色,体现数学知识专业化、经济问题数学化,尽可能地用数学知识解释经济现象,用数学方法解决经济问题,实现“教、学、用”融为一体,体现了教育部教学改革的精神。

第三,“案例驱动,问题导向”的原则。数学概念以案例为背景导入,知识的展开以解决问题为导向,形成数学知识来源于实际问题,反过来又应用于实际问题,符合高职高专学生的认知规律。

第四,“融入建模,体现人文”的原则。每一知识模块融入数学建模思想与数学实验方法,注重学生创新能力与综合素质的培养,增强学生的可持续发展能力;结合教学内容,渗透数学教育思想,培养学生睿智、细致、坚毅的品格。

全书内容包括:微积分、概率统计、线性代数与线性规划等四大模块。内容由浅入深,通俗易懂。既从学生知识基础出发,又从学生接受能力出发,特别设置了带“+”号与带“*”号的内容。带“+”号的内容是提高型内容,学生在掌握已有知识的基础上,经过选学可进一步提升能力;带“*”号的内容是拓展型内容,进一步培养学生的创新思维,学生可根据自身的能力进行选学。为了巩固每章的知识与能力,对每章的内容进行了小结,并配有习题、自测题。小结的目的是梳理本章的知识点,突出重点与难点,搞清知识间的联系;习题、自测题可供学生进行综合训练及自行检测分析问题与解决问题的能力。同时结合数学知识,安排了相应的 MATLAB 数学实验、数学建模案例、数学文化知识等。

与本书相配套的有多媒体课件、案例汇编、习题与自测题解答等资源,供学生学习与教师教学使用。

全书由陈笑缘教授任主编并统稿。刘莹、王君丽、左秀山任副主编。第1、3、9章由陈笑缘编写,第2章由郭培俊编写,第4章由周雪娟编写,第5章由左秀山编写,第6章由黄报星、张芙敏、柳叶编写,第7章由王君丽编写,第8章由刘莹编写。

在编写过程中得到了浙江商业职业技术学院、浙江工贸职业技术学院、浙江国际海运职业技术学院、浙江纺织职业技术学院、浙江东方职业技术学院、台州科技职业学院等院校的大力支持,高等教育出版社的有关人员也为本书编写和出版提供了帮助,在此表示衷心感谢。

由于编者水平有限,书中不妥之处在所难免,敬请广大读者批评指正。

编者

2009年7月

| 目 录 |

公共基础模块

第 1 章 函数与常用经济函数	3	* 2.2.3 无穷小量的比较	29
1.1 函数的概念与性质	3	【同步训练 2.2】	30
1.1.1 函数的概念	3	2.3 极限的运算	31
1.1.2 函数的性质	6	2.3.1 极限的四则运算法则	31
【同步训练 1.1】	7	2.3.2 两个重要极限	34
1.2 初等函数	8	【同步训练 2.3】	38
1.2.1 基本初等函数	8	2.4 函数的连续性	39
1.2.2 复合函数	8	2.4.1 函数连续的概念	39
1.2.3 初等函数	9	2.4.2 闭区间上连续函数的性质	43
【同步训练 1.2】	9	【同步训练 2.4】	44
1.3 常用经济函数模型	9	* 阅读材料(二) 数学建模概述	44
1.3.1 需求函数与供给函数模型	10	习题 2	46
1.3.2 成本函数、收入函数与利润函数 模型	11	第 2 章小结	48
1.3.3 其他经济函数模型	12	自测题 A(基础层次)	50
【同步训练 1.3】	13	自测题 B(提高层次)	51
* 阅读材料(一) 微积分的起源	14	第 3 章 导数与微分	53
习题 1	15	3.1 导数的概念	53
第 1 章小结	16	3.1.1 导数的定义	53
自测题 A(基础层次)	17	3.1.2 导数的几何意义	56
自测题 B(提高层次)	19	⁺ 3.1.3 函数可导与连续的关系	57
第 2 章 极限与连续	21	【同步训练 3.1】	58
2.1 极限的概念	21	3.2 导数的基本公式与四则运算法则	58
2.1.1 数列的极限	21	3.2.1 导数的基本公式	58
2.1.2 函数的极限	23	3.2.2 导数的四则运算法则	59
【同步训练 2.1】	27	【同步训练 3.2】	60
2.2 无穷小量和无穷大量	27	3.3 复合函数与隐函数的导数	60
2.2.1 无穷小量	27	3.3.1 复合函数的导数	60
2.2.2 无穷大量	29	3.3.2 隐函数的导数	62
		【同步训练 3.3】	63

3.4 高阶导数	64	拉格朗日	98
【同步训练 3.4】	65	习题 4	99
3.5 函数的微分	66	第 4 章小结	100
3.5.1 微分的定义	66	自测题 A(基础层次)	102
3.5.2 微分的基本公式与运算法则	68	自测题 B(提高层次)	103
* 3.5.3 微分在近似计算中的应用	69	第 5 章 积分及其应用	105
【同步训练 3.5】	70	5.1 定积分的概念与性质	105
* 阅读材料(三) 诺贝尔经济学奖与 数学	70	5.1.1 两个实例	105
习题 3	71	5.1.2 定积分的定义	107
第 3 章小结	73	5.1.3 定积分的几何意义	108
自测题 A(基础层次)	74	5.1.4 定积分的简单性质	110
自测题 B(提高层次)	75	【同步训练 5.1】	111
第 4 章 导数的应用	78	5.2 原函数与微积分基本定理	111
4.1 两大微分中值定理	78	5.2.1 原函数与不定积分的概念	111
4.1.1 罗尔(Rolle)中值定理	78	5.2.2 不定积分的基本公式与基本 运算	113
4.1.2 拉格朗日(Lagrange)中值 定理	79	5.2.3 微积分基本公式	115
【同步训练 4.1】	80	【同步训练 5.2】	117
4.2 函数的单调性与极值	80	5.3 积分的换元积分法与分部积分法	118
4.2.1 函数的单调性	80	5.3.1 换元积分法	118
4.2.2 函数的极值	82	5.3.2 分部积分法	119
4.2.3 函数的最值	85	【同步训练 5.3】	121
【同步训练 4.2】	86	5.4 反常积分	121
4.3 导数在经济中的简单应用	86	5.4.1 积分区间为无穷区间的反常 积分	121
4.3.1 最优问题	86	* 5.4.2 瑕积分	123
4.3.2 边际问题	88	【同步训练 5.4】	124
4.3.3 弹性问题	91	5.5 积分的应用	124
【同步训练 4.3】	94	5.5.1 积分在经济上的应用举例	124
4.4 洛必达法则	94	⁺ 5.5.2 定积分在几何上的应用	126
4.4.1 $\frac{0}{0}$ 型未定式极限	94	【同步训练 5.5】	129
4.4.2 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式极限	95	* 阅读材料(五) 积分模型案例	129
⁺ 4.4.3 其他类型未定式极限	97	习题 5	131
【同步训练 4.4】	97	第 5 章小结	132
* 阅读材料(四) 数学上有崇高的金字塔之 称的数学家——		自测题 A(基础层次)	134
		自测题 B(提高层次)	135

专业应用模块

第 6 章 二元函数的偏导数及其应用	139	【同步训练 7.2】	172
6.1 空间解析几何简介	139	7.3 线性方程组	173
6.1.1 空间直角坐标系	139	7.3.1 高斯消元法	173
6.1.2 空间曲面与方程	140	7.3.2 线性方程组解的讨论	176
【同步训练 6.1】	141	7.3.3 线性方程组的一般解	177
6.2 二元函数的极限与连续	141	【同步训练 7.3】	178
6.2.1 二元函数的概念	141	* 阅读材料(七) 数学王子——高斯	179
6.2.2 二元函数的极限与连续	143	习题 7	180
【同步训练 6.2】	143	第 7 章小结	182
6.3 二元函数的偏导数	144	自测题 A(基础层次)	183
6.3.1 偏导数的概念	144	自测题 B(提高层次)	185
6.3.2 高阶偏导数	146	第 8 章 线性规划及其应用	188
6.3.3 复合函数与隐函数的偏导数	146	8.1 线性规划问题的数学模型及几何解法	188
6.3.4 偏导数在经济中的应用	148	8.1.1 线性规划问题的数学模型	188
【同步训练 6.3】	149	8.1.2 线性规划问题数学模型的一般形式及其标准化问题	191
6.4 二元函数的极值	149	8.1.3 两个变量线性规划问题的图像解法	193
6.4.1 二元函数的极值	149	【同步训练 8.1】	195
* 6.4.2 二元函数的条件极值	151	8.2 单纯形法	195
【同步训练 6.4】	153	8.2.1 单纯形法的基本概念	195
* 阅读材料(六) 易拉罐模型	153	8.2.2 单纯形法的算法步骤	198
习题 6	154	【同步训练 8.2】	202
第 6 章小结	155	8.3 对偶问题及其经济意义	202
自测题 A(基础层次)	157	8.3.1 对偶规划问题	202
自测题 B(提高层次)	158	8.3.2 影子价格	205
第 7 章 线性代数及其应用	160	【同步训练 8.3】	206
7.1 矩阵的概念及运算	160	8.4 灵敏度分析	206
7.1.1 矩阵的概念	160	8.4.1 目标函数系数 c_j 的变化	207
7.1.2 矩阵的运算	163	8.4.2 约束条件的常数项 b_j 值的变化	208
【同步训练 7.1】	168	【同步训练 8.4】	209
7.2 矩阵的初等变换	168	* 阅读材料(八) 发电机组燃料优化管理模型	209
7.2.1 初等变换的概念	168		
7.2.2 矩阵的秩	169		
7.2.3 逆矩阵	170		

习题 8	211	9.2.3 连续型随机变量及其分布	232
第 8 章小结	213	【同步训练 9.2】	235
自测题 A(基础层次)	215	9.3 随机变量的数字特征	236
自测题 B(提高层次)	217	9.3.1 随机变量的数学期望	236
第 9 章 概率统计初步	221	9.3.2 随机变量的方差	237
9.1 随机事件与概率	221	【同步训练 9.3】	239
9.1.1 随机事件及其相互关系	221	⁺ 9.4 统计初步	239
9.1.2 概率	223	9.4.1 统计量	239
9.1.3 加法公式、条件概率与乘法 公式	224	9.4.2 参数估计	240
9.1.4 全概率公式与逆概率公式	226	* 9.4.3 线性回归	242
⁺ 9.1.5 独立试验序列概型	228	【同步训练 9.4】	244
【同步训练 9.1】	229	* 阅读材料(九) 随机存储模型	244
9.2 随机变量及其分布	229	习题 9	247
9.2.1 随机变量及其分布函数	229	第 9 章小结	248
9.2.2 离散型随机变量及其分布	230	自测题 A(基础层次)	249
		自测题 B(提高层次)	250

数学实验模块

第 10 章 MATLAB 数学实验简介	255	10.4 积分实验	271
10.1 MATLAB 数学软件简介	255	【实验训练题四】	272
10.1.1 MATLAB 基本知识介绍	255	10.5 线性代数实验	272
10.1.2 MATLAB 基本运算	257	10.5.1 矩阵运算实验	272
【实验训练题一】	261	10.5.2 线性方程组求解实验	276
10.2 函数运算与作图实验	261	【实验训练题五】	277
10.2.1 函数运算	261	10.6 线性规划实验	278
10.2.2 作图实验	262	【实验训练题六】	279
【实验训练题二】	266	10.7 概率统计实验	280
10.3 极限与导数、极值实验	267	10.7.1 概率计算实验	280
10.3.1 极限实验	267	10.7.2 数字特征计算实验	281
10.3.2 导数实验	267	10.7.3 简单统计实验	283
⁺ 10.3.3 极值实验	269	【实验训练题七】	285
【实验训练题三】	271		
习题参考答案	287		

附表一 基本初等函数图像与性质表	302
附表二 标准正态分布表	306
附表三 t 分布表	307
附表四 χ^2 分布表	309
参考文献	312

公共基础模块

| 第 1 章 |

函数与常用经济函数

学习目标

- 理解函数的概念, 会求函数的定义域、表达式及函数值, 会作出一些简单的分段函数的图像.
- 掌握函数的一些性质, 会判断函数的单调性、奇偶性、有界性和周期性.
- 掌握基本初等函数的图像和性质.
- 理解复合函数的概念, 掌握复合函数的复合过程, 能熟练地进行复合函数的分解.
- 理解初等函数的概念.
- 掌握常用经济函数模型, 能根据一些实际问题建立函数模型.

函数是微积分学研究的主要对象, 本章通过简要复习函数的基本知识, 学习与掌握常用的经济函数模型, 为进一步学习微积分知识奠定基础.

1.1 函数的概念与性质

1.1.1 函数的概念

1. 函数的定义

【案例 1.1】 某名品鞋店出售某款鞋的单价为 500 元/双, 那么卖出该款鞋子 x 双, 所得的销售额是多少?

【分析】 卖出该款鞋子 1 双, 销售额是 500 元; 2 双, 销售额是 2×500 元; 3 双, 销售额是 3×500 元; \dots ; x 双, 销售额是 $500x$ 元. 即在集合 $A = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ 中任取一值, 按照乘以 500 的法则, 在集合 $B = \{0, 500, 1\,000, 1\,500, \dots\}$ 中有唯一一个值与它对应. 如果用 x 表示 A 中的任一值, y 表示 B 中相对应的值, 那么 $y = 500x$. 它反映了实际问题中销售量 x 与销售额 y 之间的函数关系.

一般地有下列定义:

定义 1.1 设有两个变量 x 和 y , 当变量 x 在非空数集 D 内取某一数值时, 变量 y 按照某种对应法则 f , 有唯一确定的数值与之对应, 则称变量 y 为变量 x 的函数, 记作

$$y = f(x),$$

其中 x 称为自变量, y 称为函数或因变量, 集合 D 称为函数 $f(x)$ 的定义域.

通常,函数的表示有三种:解析法、图像法、表格法.

如果 x 取数值 $x_0 \in D$,那么函数 $f(x)$ 在 x_0 处有定义,与 x_0 对应的数值 y_0 称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的函数值,记作

$$f(x_0) \quad \text{或} \quad y|_{x=x_0}.$$

函数值的全体,称为函数 $f(x)$ 的值域.函数的定义域、对应法则、值域称为函数的三要素.当两个函数的定义域与对应法则一致时,这两个函数表示的是同一个函数.如 $f(x) = \sqrt{x^2}$ 与 $g(x) = |x|$,它们的定义域与对应法则一致,只是表示形式不同而已,实际上是同一个函数.

2. 函数的定义域

我们在研究函数时,一定要考虑它的定义域.当函数用解析法表示时,求函数的定义域的原则是使函数表达式有意义.一般要考虑以下几个方面:

- (1) 分式:分母必须不等于零;
- (2) 偶次根式:被开方式必须大于等于0;
- (3) 对数:真数必须大于零,底必须大于零且不等于1;
- (4) 正切符号下的式子必须不等于 $k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbf{Z}$);
- (5) 余切符号下的式子必须不等于 $k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$);
- (6) 反正弦、反余弦符号下的式子的绝对值必须小于或等于1.

如果表达式中同时有以上几种情况,需同时考虑,并求它们的交集.

例 1.1.1 求下列函数的定义域:

$$\begin{aligned} (1) \quad y &= \frac{3x}{x^2 - 2x}; & (2) \quad y &= \sqrt{x^2 - 3x - 4}; \\ (3) \quad f(x) &= \frac{\ln(2x+4)}{\sqrt{3-x}}; & (4) \quad f(x) &= \arcsin \frac{1+x}{2}. \end{aligned}$$

解 (1) 因为 $x^2 - 2x \neq 0$,解得 $x \neq 0$ 且 $x \neq 2$,所以所求的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$;

(2) 因为 $x^2 - 3x - 4 \geq 0$,解得 $x \geq 4$ 或 $x \leq -1$,所以所求的定义域为 $(-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$;

(3) 因为 $\begin{cases} 2x+4 > 0, \\ 3-x > 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x > -2, \\ x < 3, \end{cases}$ 所以所求的定义域为 $(-2, 3)$;

(4) 因为 $-1 \leq \frac{1+x}{2} \leq 1$,解得 $-3 \leq x \leq 1$,所以所求的定义域为 $[-3, 1]$.

【说明】(1) 函数的定义域一般用区间或集合表示.

(2) 应当指出,在实际应用问题中,除了要根据解析式子本身来确定自变量的取值范围以外,还要考虑到变量的实际意义,一般来说,经济变量往往取正值.

(3) 在讨论函数时,经常用到邻域概念.我们称开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 为点 x_0 的 δ 邻域,简称点 x_0 的邻域. δ 为正数,称为邻域的半径.

3. 分段函数

【案例 1.2】 在产品销售中往往会遇到这样的事,某产品销量在 100 件以内(包括 100 件)按每件 50 元销售,超过 100 件,超过的部分可打八折,试表示销售收入 y 与销售量 x 之间的关系式.

【分析】 显然, y 与 x 之间的关系式要用两个式子表示,当 $0 \leq x \leq 100$ 时, $y = 50x$; 当 $x > 100$ 时, $y = 50 \times 100 + 50 \times 80\% \times (x - 100) = 40x + 1\,000$. 所以可表示成

$$y = \begin{cases} 50x, & 0 \leq x \leq 100, \\ 40x + 1\,000, & x > 100. \end{cases}$$

像这样,两个变量之间的函数关系要用两个或多于两个的数学式子来表达,称为分段函数. 分段函数的定义域为各段自变量取值集合的并集.

例 1.1.2 设函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

求:(1) 函数的定义域;(2) $f(-2), f(0), f(1)$;(3) 作函数的图像.

解 (1) 分段函数的定义域是各段自变量取值集合的并集,所以其定义域为 $(-\infty, +\infty)$;

(2) $f(-2) = -1, f(0) = 0, f(1) = 1$;

(3) 函数的图像如图 1.1 所示.

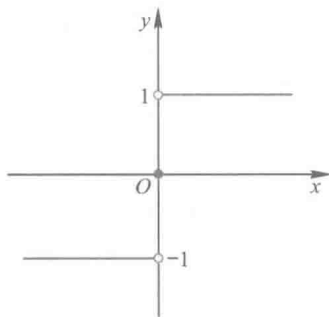


图 1.1

例 1.1.3 根据 2011 年 6 月 30 日第十一届全国人民代表

大会常务委员会第二十一次会议《关于修改〈中华人民共和国个人所得税法〉的决定》第六次修正,个人所得税起征点调整为 3 500 元,个人所得税税率表一(工资、薪金所得适用)如表 1.1:

表 1.1 个人所得税税率表一(工资、薪金所得适用)

级数	全月应纳税所得额	税率(%)	级数	全月应纳税所得额	税率(%)
1	不超过 1 500 元的	3	5	超过 35 000 元至 55 000 元的部分	30
2	超过 1 500 元至 4 500 元的部分	10	6	超过 55 000 元至 80 000 元的部分	35
3	超过 4 500 元至 9 000 元的部分	20	7	超过 80 000 元的部分	45
4	超过 9 000 元至 35 000 元的部分	25			

注:本表所称全月应纳税所得额是指依照“中华人民共和国个人所得税法”第六条的规定,以每月收入额减除费用 3 500 元再减除社保基金后的余额.

试表示月应缴税款 y 和月应纳税所得额 x 之间的关系. 并问当月应纳税所得额为 5 100 元,应缴多少个人所得税?

【分析】 由于每段税率不同,应缴税款的计算式子也不一样. 当 $0 \leq x \leq 1\,500$ 时,应缴税款为 $y = x \times 3\%$; 当 $1\,500 < x \leq 4\,500$ 时,应缴税款为 $y = (x - 1\,500) \times 10\% + 1\,500 \times 3\%$; 当 $4\,500 < x \leq 9\,000$ 时,应缴税款为 $y = (x - 4\,500) \times 20\% + 3\,000 \times 10\% + 1\,500 \times$