空间解析几何学习研究

主　编：马来焕　安　健

副主编：王均生　白甲志　白安文　冯治宇

刘红祥　任刚练　朱明侠　张俊英

程双斌　彭连科　魏有珍

编　委：刘东丽　杨万录　杨静宜　屈芝莲

程　卓

（以上均按姓氏笔划为序）

前　言

空间解析几何是高等师范院校数学专业最基本的一门课程.它是从初等数学进入高等数学的转折点,是学习其他数学基础课的必备前提.但由于该门课程理论上更为抽象、体系上更为严密,从而给初学者带来一定的困难,为此我们编写了这本《空间解析几何学习研究》,以期对正在学习这门课程的在校学生、函授生以及其他读者提供一些帮助.便于您明确学习目标,把握知识结构,抓住重点,攻克难点,掌握解题方法,检测学习效果,为您步入高等数学殿堂尽一点绵薄之力.对于执教这门课程的老师,本书也有一定的参考价值.

本书各章均由五部分组成.第一部分为学习目标,指出每章主要概念,重点、难点和技能技巧.第二部分为知识结构,将每章主要内容列成知识网络图和重要内容提示表.第三部分为疑难解析,它是本书的核心,在挖掘各类教材的重点、难点与深度、广度的基础上,提出读者学习中可能遇到的疑难问题给予解析,并对重点内容进行归类总结.第四部分为例题选讲,围绕每章的主要内容,选择有一定代表性的习题,给予分析解答.第五部分为自我检测,依据教学大纲,围绕各章学习目标,给出自我检测题一套,并附参考答案.

本书共五章,其中第一章由魏有珍编写,第二、三、四章由刘红祥、朱明侠编写,第五章由张俊英编写,最后由马来焕审核、修改、定稿.在编写过程中,我们参阅了许多文献,列举在后,以表谢意.尽管我们作了相当努力,但受水平所限,缺点、错误难免,敬请广大读者批评指正.

编　者

2000 年 10 月

目　　录

第一章　向量与坐标

学习目标

1.理解向量的有关概念,掌握向量线性运算的法则和性质.

2.理解向量乘法运算的意义,熟悉它们的几何性质,掌握其运算规律.

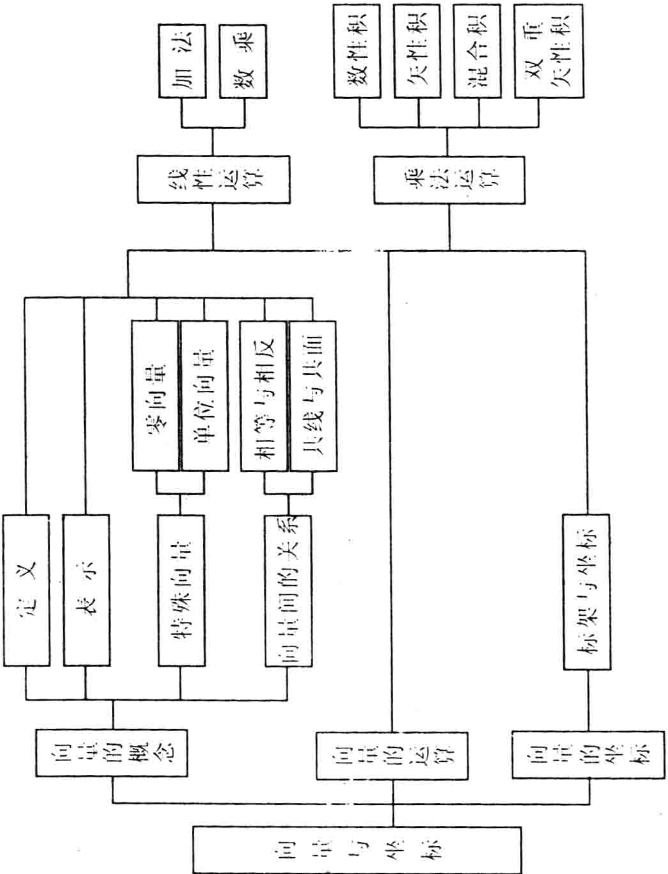
3.理解向量坐标的含义,掌握求向量坐标的方法.

4.能熟练地进行向量的各种运算,并能利用向量解决一些几何问题.

5.通过学习,养成用向量方法思考和解决数学问题的习惯.

知识结构

一、知识网络图(见下页)


向量与坐标
向量的概念
向量的运算
向量的坐标
定义
表示
特殊向量
向量间的关系
零向量
单位向量
相等与相反
共线与共面
线性运算
乘法运算
加法
数乘
数性积
矢性积
混合积
双重矢性积
标架与坐标

二、重点内容提示表

表 1.1　向量的概念

概念	定　　义	注
向　　量	既有大小又有方向的量叫做向量	① 向量又称矢量,简称矢 ② 几何中的向量用有向线段表示,有向线段的始点与终点分别叫做向量的始点与终点 ③ 向量记作$\overrightarrow{AB}$,$\vec{a}$,$\boldsymbol{a}$
向量的模	向量的大小叫做向量的模	① 向量的模也叫向量的长度 ② 向量$\overrightarrow{AB}$与$\vec{a}$的模分别记作$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$与$\lvert\vec{a}\rvert$
单位向量	模等于1的向量叫做单位向量	向量 $\vec{a}$ 的单位向量记作$\vec{a}^0$
零向量	模等于0的向量叫做零向量	① 零向量记作$\vec{0}$ ② 零向量的方向不定
平行向量	所在直线相互平行的一组向量叫做平行向量	① 若向量 $\vec{a}$ 与$\vec{b}$ 平行,记作 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ② 平行向量的方向相同或相反 ③ 平行向量也称共线向量 ④ 零向量与任何向量都平行
相等向量	模相等且方向相同的两个向量,叫做相等向量	① 向量 $\vec{a}$ 与$\vec{b}$ 相等,记作 $\vec{a} = \vec{b}$ ② 判别两个向量是否相等,应同时符合两个条件:模相等、方向相同
自由向量	始点可以任意选取的向量叫做自由向量	① 几何中研究的向量都是自由向量 ② 由于自由向量的始点可任意选取,故根据需要可将向量平行移动
反向量	两个模相等,方向相反的向量叫做互为反向量	$\vec{a}$ 的反向量记作 $-\vec{a}$

续表 1.1

共线向量	平行于同一直线的一组向量叫做共线向量	零向量与任何共线的向量组共线
共面向量	平行于同一平面的一组向量叫作共面向量	① 零向量与任何共面的向量组共面 ② 一组共线向量一定是共面向量 ③ 三向量中如果有两个向量共线，那么这三个向量是共面的

表 1.2　向量的线性运算

运　算	定　　义	性　　质
向量加法	设已知向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$，以空间任意一点 O 为始点，接连作向量 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ 得一折线 OAB，从折线的端点 O 到另一端点的向量 $\overrightarrow{OB} = \vec{c}$，叫做向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和，记作 $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$，把求向量和的运算叫做向量加法	① 交换律 $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ ② 结合律 $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ ③ 向量加法法则有三角形法则、平行四边形法则、多边形法则
向量减法	如果向量 $\vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 的和等于 $\vec{a}$，即 $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$，我们把 $\vec{c}$ 叫做 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的差，记作 $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$，由两向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 求它们的差 $\vec{a} - \vec{b}$ 的运算叫做向量减法	①$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ ②$\vec{a} - (-\vec{b}) = \vec{a} + \vec{b}$
数量与向量的乘法	实数 λ 与向量 $\vec{a}$ 的乘积是一个向量，记作 $\lambda\vec{a}$，它的模是 $\lvert \lambda\vec{a} \rvert = \lvert \lambda \rvert \lvert \vec{a} \rvert$. 当 $\lambda > 0$ 时与 $\vec{a}$ 方向相同；当 $\lambda < 0$ 时与 $\vec{a}$ 方向相反. 把这种运算叫做数量与向量的乘法，简称为数乘	① $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ ② 结合律 $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$ ③ 第一分配律 $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ ④ 第二分配律 $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$

表 1.3　向量线性关系的概念

线性关系	定　　义	注
向量 $\vec{a}_1$，$\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$ 的线性组合	由向量 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$ 与数量 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 所组成的向量 $\vec{a}=\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\cdots+\lambda_n\vec{a}_n$ 叫做向量 $\vec{a}_1$，$\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$ 的线性组合	① 当向量 $\vec{a}$ 是向量 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$ 的线性组合时，也说成：向量 $\vec{a}$ 可以用 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$ 线性表示，或向量 $\vec{a}$ 可以分解成 $\vec{a}_1$，$\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$ 的线性组合. ② $\lambda\vec{a}$ 也称为向量 $\vec{a}$ 的线性组合.
向量 $\vec{a}_1$，$\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$ 的线性相关	对于 $n(n\geqslant 1)$ 个向量 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$，如果存在不全为零的 n 个数 λ_1，$\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，使得 $\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\cdots+\lambda_n\vec{a}_n=\vec{0}$，那么 n 个向量 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$ 叫做线性相关	① 只有当 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$ 时，$\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\cdots+\lambda_n\vec{a}_n=\vec{0}$，才能成立，则称向量 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$ 线性无关 ② 向量 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$ 线性相关的充要条件是其中一个向量是其余向量的线性组合($n\geqslant 2$) ③ 一个向量线性相关的充要条件是 $\vec{a}=\vec{0}$ ④ 如果一组向量中的一部分向量线性相关，那么这一组向量就线性相关 ⑤ 一组向量如果含有零向量，那么这组向量必线性相关

表 1.4　向量间的线性关系

向量关系	线性表示	线性相关	注
向量 $\vec{r},\vec{e}$ 共线	$\vec{r}=x\vec{e}$	$\vec{r}$ 与 $\vec{e}$ 线性相关	x 被 $\vec{r},\vec{e}$ 唯一确定 ($\vec{e}\neq\vec{0}$)
向量 $\vec{r}$ 与 $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ 共面	$\vec{r}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2$	r 与 $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ 线性相关	x,y 被 $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{r}$ 唯一确定 ($\vec{e}_1,\vec{e}_2$ 不共线)

续表 1.4

四个向量 $\vec{r},\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ 共体	$\vec{r}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3$	$\vec{r}$ 与 $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ 线性相关	① $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ 不共面 ② x,y,z 被 $\vec{r},\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ 唯一确定
四个以上向量 $\vec{r},\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$	$\vec{r}=x_1\vec{a}_1+x_2\vec{a}_2+\cdots+x_n\vec{a}_n$	$\vec{r}$ 与 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$ 总是线性相关的	

表 1.5　向量的乘法运算

运算	定　义	几何意义	性质	典型应用
两向量的数性积 $(\vec{a}\cdot\vec{b})$	两向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的模和它们夹角的余弦的乘积叫做向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的数性积(内积),记作 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 或 $\vec{a}\vec{b}$ 即 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\cdot\cos\angle(\vec{a},\vec{b})$	向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 间的夹角 $\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert}$	① 交换律 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$. ② 数因子的结合律 $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$ ③ 分配律 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$	判断两向量是否相互垂直 若 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$,则 $\vec{a}\perp\vec{b}$
两向量的矢性积 $(\vec{a}\times\vec{b})$	两向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的矢性积是一个向量,记作 $\vec{a}\times\vec{b}$ 或 $[\vec{a}\vec{b}]$,它的模是 $\lvert\vec{a}\times\vec{b}\rvert=\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\cdot\sin\angle(\vec{a},\vec{b})$,它的方向与 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 都垂直,并按 $\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{a}\times\vec{b}$ 这个顺序构成右手标架	两向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不共线时,$\lvert\vec{a}\times\vec{b}\rvert$ 等于以 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 为邻边的平行四边形的面积	① $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$ ② $\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})$ ③ $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$	判断两向量是否共线 若 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$,则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线

续表 1.5

三向量的混合积$(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$	给定空间的三个向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$，如果先做前两个的矢性积 $\vec{a}\times\vec{b}$，再做所得的向量与第三个向量 $\vec{c}$ 的数性积，最后得到的这个数叫做三个向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 的混合积，记作 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ 或 $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ 或 $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$	三个不共面向量 $\vec{a}$，$\vec{b},\vec{c}$ 的混合积的绝对值等于以 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 为棱的平行六面体的体积即 $V=\lvert(\vec{a}\vec{b}\vec{c})\rvert$	$(\vec{a}\vec{b}\vec{c})=(\vec{b}\vec{c}\vec{a})$ $=(\vec{c}\vec{a}\vec{b})$ $=-(\vec{b}\vec{a}\vec{c})$ $=-(\vec{c}\vec{b}\vec{a})$ $=-(\vec{a}\vec{c}\vec{b})$	判断三个向量是否共面 若 $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})=0$，则向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面
三向量的双重矢性积 $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$	给定空间三向量，先作其中两个向量的矢性积，再作所得向量与第三个向量的矢性积，那么最后的结果仍然是一向量，叫做所给三向量的双重矢性积，简称为三矢矢积	$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ ① 它与 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 共面 ② 它与 $\vec{c}$ 垂直 ③ 它与 $\vec{a}\times\vec{b}$ 垂直	① $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$ ② $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$	

疑难解析

1.在解析几何中为什么要学习向量代数这部分内容?

解析几何的基本思想是用代数方法研究几何,其研究的最基本方法是坐标法.但也需要使用向量方法,即通过向量建立坐标系,利用向量的代数运算来研究几何问题.这是由于向量既具有明显的物理意义和几何意义,其运算又具有典型的代数性质,所以,它在沟通代数和几何方面,提供了一个有力的工具.其优点在于比较形象直观,有时可使某些几何问题的解法更为简捷.为了掌握和使用向量这一研究几何的工具,所以在解析几何中一定要学习向量代数的有关内容.

2.向量间为什么不能比较大小?

人们经长期实践,在积累了大量感性材料的基础上,建立了数量的概念.如长度、面积、体积、质量、功等,在规定了单位后,这些量都可以用一个数来表示.这类只有大小的量叫做数量(或标量),也就是说数量是可以比较大小的.但在实践中,人们还会接触到另一类量,它不仅有大小,而且有方向.如力、速度、加速度等,它们的特征不能单纯地用数来表示.为了表示这种既有大小,又有方向的量,人们引入了向量(或矢量).在几何中,向量用一条有向线段来表示,有向线段的长度表示其大小(模),有向线段的方向表示向量的方向.由此可见,向量是由大小(模)和方向两个因素决定的.向量的模可以比较大小,但方向却无法比较大小,因此对向量说“大于”或“小于”的概念是没有意义的.

但还应当注意,即使方向相同的两个向量,若模相等,我们称它们相等(因为这时为同一向量);若模不相等,也不能谈大于或小于,这时只有当向量赋予实际意义时,才能确定其大小.而几何中的向量是基于力、速度、加速度等实际背景抽象出其特征后而建立的,没有任何确定的含义,所以即使两向量方向相同,也不能比较

大小.

综上所述,向量间是不能比较大小的.

3.如何理解向量加法的定义?

几何中的向量加法是用几何作图来定义的,一般有三角形法则和平行四边形法则.对于这两种法则,只有了解了其来历,才能理解向量加法定义的合理性,以便正确地运用法则求出向量的和.

在物理学中,作用于一点的两个力可以看作两个向量,经实验它们的合力就是以这两个力为邻边的平行四边形的对角线上的向量.几何中关于两个向量的加法就是对合力这一概念作数学上的抽象和概括的结果.这样便得到向量加法的平行四边形法则.从图1-1可知,$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC}$,这样便得出三角形法则(见图1-2).在求和的过程中,当两向量共线时,三角形法则仍可适用,而平行四边形法则却不适用.

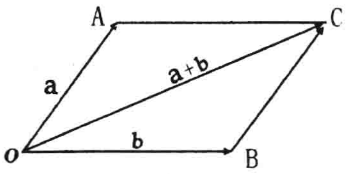


图 1-1

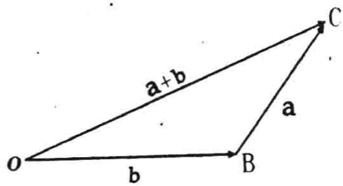


图 1-2

4.关于数乘的第二分配律:$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$ 的证明.

数乘运算的结合律和第一分配律是直接根据向量相等的定义证明的,即只需证明两边向量的方向相同,模相等即可.而对于第二分配律却不能采用上述方法证明,这是因为它左边为两向量 $\vec{a}$ 与$\vec{b}$ 的和.根据向量加法定义,只有通过作图才能求得向量$(\vec{a}+\vec{b})$与 $\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$,再利用相似三角形的性质去完成.

5.标架与坐标间的关系.

对于同一向量,空间标架的建立方法不同(即基向量选取不

同，建立的标架则不同），向量的坐标则不相同．从向量坐标的获得过程知，过向量的终点作三个平面分别平行于三个坐标平面，结果得到以三条坐标轴为棱，以这一向量为体对角线的平行六面体．这样，向量便可用标架的三个基向量表示出来，表达式中基向量的系数是由该向量唯一确定的三个实数，这三个有序实数(x,y,z)叫做该向量的坐标．由于标架建立的不同，得到的以该向量为体对角线的平行六面体的形状则不同（以同一向量为体对角线的平行六面体有无数多个），这样自然得到的坐标（基向量的系数）就不同．所以向量的坐标依赖于标架，即向量的坐标只是对确定的标架而言的．

6．关于向量在轴上的射影应注意的几个问题．

(1) 如何求作点A在轴l上的射影．

根据点在轴上射影的定义，过点A作垂直于轴l的平面α，平面α与轴l的交点A'叫做点A在l上的射影．从定义知，要得到点A在l上的射影A'，首先需作出过点A且垂直于l的平面α．但在实践中，要画出平面α却很不容易．这一问题不解决，会直接影响向量$\overrightarrow{AB}$在轴l上射影向量的获得．但从图知，若$l\perp\alpha$，$l\cap\alpha=A'$，则$AA'\perp l$．由此可知，射影A'就是由点A向l所作垂线的垂足．基于射影这一实质，我们可以先过直线l与外面一点A作平面β，再在平面β内过点A作直线l的垂线，垂足A'就是点A在轴l上的射影．当点A在轴l上时，点A的射影就是它本身$A(A')$．

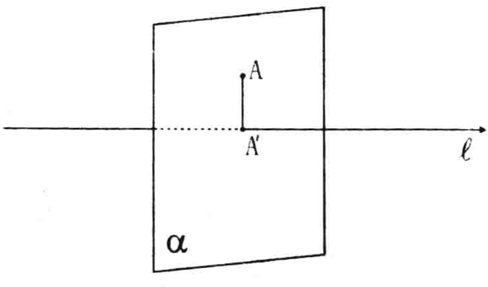


图 1-3

(2) 对于射影$_{\vec b}\vec a=|\vec a|\cos\angle(\vec a,\vec b)$的理解．

①$\angle(\vec a,\vec b)$表示向量$\vec a$的方向与向量$\vec b$的方向的夹角，它的

取值区间为$[0,\pi]$.就是说,在射影计算公式中,两向量间的夹角不考虑旋转方向,即认为 $\angle(\vec{a},\vec{b})=\angle(\vec{b},\vec{a})$.实际上,由于余弦函数为偶函数,考虑方向与不考虑方向得到的数值是相等的($\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=\cos\angle(\vec{b},\vec{a})$).但必须明白,不考虑角产生的方向并不是由余弦函数的性质推得,而是由两向量间夹角的取值范围决定的.

② 由射影$_{\vec{b}}\vec{a}=|\vec{a}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b})$求得的是一个数值.该数的符号是由 $\cos\angle(\vec{a},\vec{b})$ 确定,射影值的符号有明显的几何意义.

当射影$_{\vec{b}}\vec{a}$ 为正数时,表明 $\vec{a}$ 的射影向量与向量 $\vec{b}$ 方向相同$\left(\angle(\vec{a},\vec{b})\text{ 在}\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\text{ 内}\right)$;

当射影$_{\vec{b}}\vec{a}$ 为负数时,表明 $\vec{a}$ 的射影向量与向量 $\vec{b}$ 方向相反($\angle(\vec{a},\vec{b})$ 在$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 内);

当射影$_{\vec{b}}\vec{a}$ 为0时,表明向量 $\vec{a}$ 在$\vec{b}$ 上的射影为一点(这时要么 $\vec{a}$ 为零向量,要么向量 $\vec{a}$ 垂直于向量$\vec{b}$).

综上可得,从射影$_{\vec{b}}\vec{a}$ 数值的符号,就可知道 $\vec{a}$ 与$\vec{b}$ 位置的基本情况.掌握这些对于我们作图、分析、思考相关问题都是非常重要的.

③ 向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 上的射影向量为零向量的充要条件为 $\angle(\vec{a},\vec{b})=\frac{\pi}{2}$ 或 $\vec{a}=\vec{0}$.

④ 一般地,射影$_{\vec{a}}\vec{b}\neq$射影$_{\vec{b}}\vec{a}$,只有 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ 或 $\angle(\vec{a},\vec{b})=\frac{\pi}{2}$ 时,才有射影$_{\vec{a}}\vec{b}=$射影$_{\vec{b}}\vec{a}$.

⑤ 射影向量的模不大于原向量的模,即:射影$_{\vec{b}}\vec{a}$ 的模 $\leqslant|\vec{a}|$.这是因为射影$_{\vec{b}}\vec{a}=|\vec{a}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b})$,而 $|\cos\angle(\vec{a},\vec{b})|\leqslant 1$,所以 $\left||\vec{a}|\cos\angle(a,b)\right|\leqslant|\vec{a}|$.

⑥ 两共线向量在同一轴上的射影向量,模长的射影向量的模

长,模短的射影向量的模短.

即若 $\vec{a},\vec{b}$ 共线,且 $|\vec{a}|>|\vec{b}|$,射影向量$_l\vec{a}$ 为$\vec{a}'$,射影向量$_l\vec{b}$ 为 $\vec{b}'$,它们之间关系为 $|\vec{a}'|>|\vec{b}'|$.

⑦ 向量 $\vec{a}$ 在$\vec{a}$ 上的射影向量是它本身,即射影向量$_{\vec{a}}\vec{a}=\vec{a}$.

7.关于两向量的数性积.

(1) 两向量的数性积 $\vec{a}\cdot\vec{b}$($\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b})$)是一个数量,而不是向量(由此可见,两向量的数性积不是线性运算),这个数量是由向量 $\vec{a},\vec{b}$ 的模与其夹角 $\angle(\vec{a},\vec{b})$ 决定的.

(2) 由于向量的数性积是由上述三个因素确定的,所以,当 $\vec{a}\neq\vec{0}$ 时,由 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ 不能推出 $\vec{b}=\vec{0}$.

事实上,若 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$,则 $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=0$.

当 $\vec{a}\neq\vec{0}$ 时,则必有 $|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})=0$.这时有 $|\vec{b}|=0$($\vec{b}=\vec{0}$)或 $\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=0$)($\angle(\vec{a},\vec{b})=\frac{\pi}{2}$),故当 $\vec{a}\neq\vec{0}$ 时,从 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ 不能推出 $\vec{b}=\vec{0}$.

同样由 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}^2$ 不能推出 $\vec{b}=\vec{a}$.

若 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}^2$,则有 $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|^2$.当 $\vec{a}\neq\vec{0}$ 时,有 $|\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|$,显然不能推得 $\vec{b}=\vec{a}$;当 $\vec{a}=\vec{0}$ 亦不能推得 $\vec{b}=\vec{a}$.

在 $\vec{a}\vec{b}=\vec{a}^2$ 中,只有当 $\angle(\vec{a},\vec{b})=0$ 时,才有 $\vec{b}=\vec{a}$ 成立.

(3) 两向量的数性积消去律不成立.

即当 $\vec{a}\neq\vec{0},\vec{b}\neq\vec{0},\vec{c}\neq\vec{0}$ 时,从 $\vec{a}\vec{c}=\vec{b}\vec{c}$ 中不能推得$\vec{a}=\vec{b}$.

事实上,$\vec{a}\vec{c}=|\vec{c}|$射影$_{\vec{c}}\vec{a}$,$\vec{b}\,\vec{c}=|\vec{c}|$射影$_{\vec{c}}\vec{b}$,从而射影$_{\vec{c}}\vec{a}$ = 射影$_{\vec{c}}\vec{b}$.

但射影相等并不能保证有两向量相等,对于这一点,从图 1 - 4 可以看得很清楚.

(4) 向量数性积的结合律也不成立.

即当 $\vec{a}\neq\vec{0},\vec{b}\neq\vec{0},\vec{c}\neq\vec{0}$ 时，

$$(\vec{a}\vec{b})\vec{c}\neq\vec{a}(\vec{b}\vec{c})$$

这是因为 $(\vec{a}\vec{b})\vec{c}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b})\vec{c}$,

$\vec{a}(\vec{b}\vec{c})=|\vec{b}||\vec{c}|\cos\angle(\vec{b},\vec{c})\vec{a}$.

即 $(\vec{a}\vec{b})\vec{c}$ 是与 $\vec{c}$ 共线的向量，而 $\vec{a}(\vec{b}\vec{c})$ 是与 $\vec{a}$ 共线的向量.

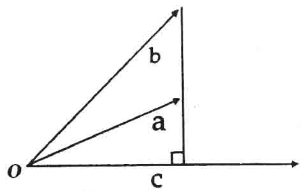


图 1-4

所以，当 $\vec{a},\vec{c}$ 不同向时，则 $(\vec{a}\vec{b})\vec{c}$ 与 $\vec{a}(\vec{b}\vec{c})$ 不相等；

当 $\vec{a},\vec{c}$ 同向时，还要考虑其系数 $|\vec{b}||\vec{c}|\cos\angle(\vec{b},\vec{c})$ 与 $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b})$ 的大小.

综上知，在无条件的情况下，$(\vec{a}\vec{b})\vec{c}$ 与 $\vec{a}(\vec{b}\vec{c})$ 不相等.

(5) 两向量 $\vec{a},\vec{b}$ 共线的充要条件是 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|$ 或 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|$.

证　当 $\vec{a},\vec{b}$ 共线时(包括 $\vec{a}$ 或 $\vec{b}$ 为零向量的情况)

由 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b})$ 知，当向量 $\vec{a},\vec{b}$ 同向时 $\angle(\vec{a},\vec{b})=0$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 0=|\vec{a}||\vec{b}|$.

当向量 $\vec{a},\vec{b}$ 反向时，$\angle(\vec{a},\vec{b})=\pi$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\pi=-|\vec{a}||\vec{b}|$.

反过来，当 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|$ 时，有

$$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}||\vec{b}|$$

从而　　$\vec{a}=\vec{0}$，或 $\vec{b}=\vec{0}$，或 $\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=1$.

若 $\vec{a}=\vec{0}$ 或 $\vec{b}=\vec{0}$ 时，显然 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线；

若 $\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=1$ 时，则 $\angle(\vec{a},\vec{b})=0$. 这时仍有 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线.

类似地，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|$ 时，仍有 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线. 命题得证.

8. 关于两向量的矢性积

(1) $\vec{a}\times\vec{b}$ 是一个向量，而向量是由模和方向两个因素确定的，所以两向量的矢性积的定义是由两部分构成的.

① $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\angle(\vec{a},\vec{b})$;

②$(\vec{a}\times\vec{b})\perp\vec{a}$,且$(\vec{a}\times\vec{b})\perp\vec{b}$,并按$\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}$构成右手标架.

因此在解答矢性积的问题中,若求模,则用①计算;若要指出其方向,则用②去作出判断,这时用计算是无法完成的.

在计算时应注意,矢性积模的定义中两向量间夹角不考虑方向,都为正角,这样便有$\sin\angle(\vec{a},\vec{b})=\sin\angle(\vec{b},\vec{a})$.

从而
$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\angle(\vec{a},\vec{b})$$
与
$$|\vec{b}\times\vec{a}|=|\vec{b}||\vec{a}|\sin\angle(\vec{b},\vec{a})$$
才能相等,这也是符合实际情况的(因为$\vec{a}\times\vec{b}$与$\vec{b}\times\vec{a}$虽方向相反,但模相等).

(2)矢性积的消去律不成立.即$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$不能推得$\vec{b}=\vec{c}$.这是因为$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$表明这两向量相等,即方向相同,且模相等.而$\vec{a}\times\vec{b}$的模的几何意义是以$|\vec{a}|$、$|\vec{b}|$为邻边的平行四边形面积,而$\vec{a}\times\vec{c}$的模则是以$|\vec{a}|$、$|\vec{c}|$为邻边的平行四边形的面积.这两个以$|\vec{a}|$为一公共边的平行四边形面积相等,但不能推出$|\vec{b}|=|\vec{c}|$,当然也就不可能有$\vec{b}=\vec{c}$.对于这一点,从图1-5可以看得很清楚.

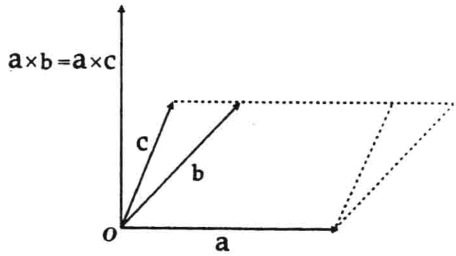


图 1-5

(3)当$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|$时,两向量垂直($\vec{a}\perp\vec{b}$).

9.关于三个向量相乘

(1)三个向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$相乘有混合积$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$与双重矢性积$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$.混合积$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$是一个数量,其绝对值等于以$\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{c}$为棱的平行六面体的体积,而双重矢性积$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$是与$\vec{a}$,$\vec{b}$共面的一向量,这一向量用$\vec{a},\vec{b}$的线性关系式表示出来就是

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}.$$