数学物理方法上册

数学物理方程

周祥龙 编著

浙江大学出版社

前　言

编著一本省课时、利自学的数学物理方法教材，在解决实际教学中课时紧、负担重的尖锐矛盾的同时提高教学质量，这是本人多年的愿望。第二次全国高校教学理论与教材建设学术讨论会肯定了我的这个决心。在据专著自编的讲义基础上，吸取国内外近20本同类教材、和参考书的优点，联系物理类专业的教学实际，并结合自己的研究成果编著的这本数理方法教材，主要是为了适应课时较少的一般高师和理工院校的需要。但从取材之广度来说，它也可以作为某些工科院校研究生和部分综合性大学本科生的教材或教学参考书。对于打算自学数学物理方法的读者来说，它无疑也是国内迄今能够找到的最通俗的读物。

本书力求从以下三方面满足读者的要求：

一、取材适中、布局合理、结构紧凑、系统性强

本书分上、下两册。上册数学物理方程为全书基本部分。其中第一章数学模型除讨论数理方程和定解条件的推导外，并简述了经典定解问题适定性的结论，以便以后各章专门集中于形式解的探求。该章是物理与数学间的桥梁。第二章二阶线性方程初探除简介方程的分类与化简外，叙述了线性问题的迭加原理和分解、化归方法，并在举例说明通解法和视察法之后着意归纳求解数理方程问题的困难所在和一般可行途径，使各种经典解法略显端倪。它既是第一章与以后各章间的桥梁又为全书设置伏笔、举纲张本。第三、四、五章介绍齐次方程有界域问题的分离变量法。从分离变量法初步（傅氏级数法）入门并扩充、抽象出斯特姆-刘维定理，再以斯-刘定理为理论指导，用解柱、球内区域的定解问题为实际背景阐述特殊函数知识，最后深入到柱、球坐标下的分离

变量法。这种由浅入深的安排使理论与应用既不脱节又不混杂，而是有机结合的。它突出了斯-刘定理对分离变量法的指导作用，大幅度地降低了特殊函数及其应用的难度。而第六章介绍齐次方程初值问题的行波法和傅氏变换法。为避免冗长推理和繁琐运算，傅氏变换法以输运问题为主作全面介绍，波动问题着重介绍行波法。在第七章点源法中再讲非齐次方程问题的处理。出于同样的考虑，其中格林函数法以边值问题为主作全面介绍，而对发展方程问题着重介绍冲量定理法。在小结上册、归纳各种经典解法的适用范围、揭示解算数理方程问题方法不够之后自然引出下册：复变函数论方法。其中第一章除介绍复变解析函数的基本知识及其在平面调和场的应用外，安排二维边值问题的保角变换法及三维空间的逆矢径变换法作为上册第七章的扩充。第二章在介绍复变函数的回路积分、罗朗展开和奇点性态之后，着重介绍应用留数定理计算数学物理中常见实变量定积分的方法。第三章拉氏变换法既是第九章的一个方面的应用又是从解、算两方面对上册介绍的各种数学物理方法作必要的扩充。

在分章介绍每种方法时，又总按先给出概念、建立理论，后举例说明应用的顺序小步速进，最后归纳此法的适用范围、揭示局限性并导出新课题。这样可使全书脉络清晰、思路连贯，过渡光滑而浑然一体，便于自学和提高授课效率。

二、突出方法、重视应用、简详得当、适用性好

编者从物理类专业的学生和教学实际出发，把场论和常微分方程的幂级数解法等在《高等数学》中学过而未作为重点充分阐述，但在本课程要经常用到，重新讲述又极费课时的那些知识，收集在附录中详略适度地复习并稍加延伸成可为新课直接引用的形态，作为课前自学的材料。其后附有自我考查卷以检查复习、自学的效果，而答卷可兼作备查资料用。这不仅为本课程加固了基础，提高了起点，而且避免了

新旧知识混杂，使新课主题突出，头绪单一，节省课时。此外，全书在注意概念的确切性和理论的严肃性之同时，不苛求数学论证的严密性，对于某些含意直观的基本定理一律不证，冗长的推理和繁琐的运算尽量避免。但在培养学生分析问题、归纳解法的能力，据物理问题构作数学模型的能力以及数学、物理互相渗透的能力等方面则潜心设计，妥善安排，不惜篇幅，加以引导。窃以为物理、力学类专业的数学教材应该具有这些特点。

三、难点分散、重点突出、说理通俗、例题丰富

由于在编写时已注意到分散难点的必要，本书的布局大致上恰好一节一个中心，每节约需2个课时。上册各章、各节都有小结、小结性的思考题或习题。行文通俗，说理明白。除配有比现行教材齐全的典型例题外还充实了必要的解题实例，作为练习中简要而完整地表述的示范，且书末附有全部解算题的答案及较难习题的提示。这些为实际教学提供的方便，增强了本书的实用性，使这门难度颇大的课程变得易教易学，作业也比较易做易批。

据编者及有关同志在高师物理系、理工院校物理类专业和职工大学无线电专业试用的结果来看，普通高校学生学完本书全部必学内容和部分选学内容（标题上带*号者）约需72课时；成人高校若加授部分自学内容（标题上带△号者）并适当放慢进度约需100课时；具备高等数学和普通物理基础知识的读者不难按本书自学这门课程。删去全部选学内容并不影响全书的系统性。

在成书过程中，编者曾先后得到杭州大学秦禹春副教授、浙江师大徐士英教授、张有训副教授、复旦大学李大潜教授和南京大学梁昆淼教授的悉心指导和认真批评。梁先生在认真审阅第五稿之后，除肯定编者力求做到的三点已大致做到以外，对附录的设置和正文引导思路、训练能力的做法尤为赞赏，同时也在若干具体问题上提出改进意见。李先生

则更着重其通俗易学性，认为也适合中下层次读者的需要。上述诸位先生的批评意见，都已吸收到最后的定稿中，在此表示衷心的感谢。特别应该感谢我的挚友、北京理工大学应用数学系的沈以淡副教授。他详尽审阅了第四稿，指出内容和文字方面的一些不足之处，在其它方面也做了不少工作。没有老沈和上述诸位导师的支持，这本书是不可能及时跟读者见面的。

周祥龙1991年4月

目　录

第一章 数学模型

1.1 引　　言

（一）偏微分方程的基本概念

含有多变量未知函数偏导数的方程式称为**偏微分方程**，一般可以写成

$$F(x,y,\cdots,u,u_x,u_y,\cdots,u_{xx},u_{xy},\cdots)=0$$

的形式。其中 x，y，…表示自变量，$u=u(x,y,\cdots)$表示未知函数。而 $u_x,u_y,\cdots,u_{xx},u_{xy},\cdots$表示 u 对自变量的偏导数，即

$$u_x=\frac{\partial u}{\partial x},\ u_y=\frac{\partial u}{\partial y},\ \cdots\ u_{xx}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u_{xy}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\cdots.$$

此外常常利用拉氏算符简记 $\nabla^2 u$ 即 Δu 的坐标表达式，如

$$\Delta_3 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x_4}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\quad \Delta_2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\cdots.$$

数学物理方程是指在自然科学和工程技术的各个场合出现的一些偏微分方程，有时也包括一些积分方程和积分-微分方程。它们反映了物理量及其关于时间的导数和关于坐标变量的导数之间的制约关系。电动力学、量子力学、连续介质力学、热传导和扩散理论以及天文学中的基本方程都属于数学物理方程的范围。例如：描写振动和波现象中位移 u 跟时间 t 及坐标变量关系等物理规律的波动方程

$$u_{tt}=a^2\nabla^2 u+f; \tag{1-1}$$

描写热传导现象中的温度或扩散现象中的浓度 u 跟时间及坐标变量关系等物理规律的输运方程

$$u_t=a^2\nabla^2 u+f; \tag{1-2}$$

描写稳定温度（或浓度），以及稳恒流速场（或静电场）的

势函数 u 跟坐标变量关系等物理规律的稳定场方程

$$\nabla^2 u=f_1, \tag{1-3}$$

都是今后的物理课程和工程技术中要经常遇到的数学物理方程. 此外, 在量子力学、弹性力学及某些新技术中还会遇到另外一些数学物理方程, 较有代表性的有

$$ihu_t=-(h^2/2m)\nabla^2 u+Vu \quad \text{(薛定锷方程)} \tag{1-4}$$

$$u_{tt}=-a^2 u_{xxxx}+(1/\rho)F(x,t) \quad \text{(杆横振动方程)} \tag{1-5}$$

$$u_t+uu_x=0 \quad \text{(冲击波方程)} \tag{1-6}$$

$$u_t+\sigma uu_x+u_{xxx}=0 \quad (KDV\text{方程}) \tag{1-7}$$

…….

方程中所含的未知函数偏导数的最高阶数称为偏微分方程的**阶**. 如冲击波方程是一阶的, 薛定锷方程是二阶的, KDV 方程是三阶的, …….**如果在方程中只出现未知函数及其偏导数的一次项(当然在这些一次项的系数中也不再含有未知函数及其偏导数), 那么这样的偏微分方程称为线性的**如上述(1-1)~(1-5)就是线性偏微分方程, 而(1-6)和(1-7)属非线性方程. **在线性方程中**特别注意一下(1-4)那样的方程(其中 $i=\sqrt{-1}$, h和m也是常量, V是已知函数), 即**仅有未知函数及其偏导数的一次项, 而不含已知函数项的方程, 称为齐次线性方程**. 显然, 当方程(1-1)和(1-2)中的 f、方程(1-3)中的f_1或方程(1-5)中的F等这些已知函数项恒为零时, 它们也就成为齐次的线性方程了.

本课程主要研究二阶线性方程(1-1)~(1-3). 这是因为实际中遇到的不少方程, 有的只要经过简单的变换就可以化为(1-1)~(1~3)之一, 也有的可以仿效或借鉴用来研究(1-1)~(1-3)的方法对它们进行分析和处理. 关于(1-1)~(1-3)的研究是长期以来数学物理方程最为基本的内容, 因此有时就称它们为**典型的**数学物理方程, 简称为**典型方程**. 注意(1-1)~(1-3)远不止三个方程式, 它们所代表的物理现象更是多种多样的.

(二)△数学物理的基本方法

处理数学物理问题的一般步骤是：一、根据物理问题的内容，导出表达**这些**物理现象普遍规律的偏微分方程（即数学物理方程，或简称为**数理方程**），同时写出表达**这一个**物理问题的初始状态和边界情况的**定解条件**即**初始条件和边界条件**。数理方程跟定解条件合称为**定解问题**。它是表达物理问题的数学语言。因此这一步实质是把物理问题转化为数学问题，称为布列定解问题或构作**数学模型**。二、求出满足数理方程及定解条件的未知函数，或者说求出定解问题的解。这称为解定解问题。三、对定解问题的适定性——解的存在性、唯一性和稳定性（即当方程和定解条件的变动充分地小时，解的变动是否也相当地小）——进行讨论，即根据所得的解函数鉴定数学模型与物理问题相符的程度。若确认基本相符，再对解函数作适当的物理解释，以便为进一步的研究打下基础。

(三)△推导数理方程和定解条件的一般步骤

既然数理方程是描述同类物理现象的普遍规律，因此又称其为定解问题的**泛定方程**。它就是以数学形式表示的、物理量 u 于过程开始**以后**的每一瞬时在系统**内部**各点上分布和变化的规律，跟具体物理问题的初始状态和边界情况无关。边界条件是物理系统边界情况的表示。它当然是在**全过程**影响着物理量在系统内部的分布和变化，但它不受泛定方程的支配。因此泛定方程与边界条件可以分头进行推导。至于表述系统初始状态的初始条件，显然也不受泛定方程的支配，并且因为它一般是由观察或实验得到的，稍作简单运算就可写出，所以不必专事推导。

从物理问题推导偏微分方程跟推导常微分方程的方法有些类似，但要复杂一些。

第一，跟推导常微分方程一样，也要选择一个物理量来作为直接研究的对象。这个量应当是能体现物理现象全貌的

量又是便于列方程的，最好选得使以它为未知函数的微分方程便于求解一些。例如因外力或受初始扰动影响发生振动的一段细弦，为掌握弦发音的规律需研究其振动情况。这是整段弦在内力（拉力，又称为张力）和外力（或初速）双重作用下的复杂运动。既能直接表示内力、外力或初速，又能直接表示各点运动情况的，只有位移这个量，故应取位移为未知函数。再如研究静电场时，虽然场强或电势都能刻划这个静电场，但以场强为未知函数列出的方程是矢量式的，不如以电势为未知函数列出方程是标量式的，便于求解。因此这时宜取电势为未知函数。

第二，微分方程，凡是从物理问题导出的，都是物理规律（定律、法则等）的数学表示式，只不过偏微分方程表示的物理规律，比常微分方程考虑的方面要多一些。因此在推导数理方程之前，要明确关于所研究的物理现象都有哪些物理规律。例如上述弦的振动，是个运动学问题，牛顿第二定律是必须引用的；再如推导输运方程时，热传导问题的傅里叶定律和能量守恒定律、扩散问题的斐克（Fick）定律和质量守恒定律等必须了解，……。显然，推导数理方程需要相应的物理知识。作为电动力学、量子力学和热传导等理论物理的前修课程，数学物理方法所举推导方程的例子，只能限于已学的力学、热学和电磁学等的范围。但推导方程的方法在今后的学习和应用中仍是适用的。从知识、更从能力方面悄悄地为今后的学习和工作做准备，正是这门课程的任务。

第三，跟推导常微分方程相类似，推导偏微分方程也常用**微元分析法**。这是因为数理方程一般表现为在系统内部的任一点，在过程开始后任一瞬时，物理量 u 的取值和变化的法则，而点是区域无限缩小时的抽象，瞬时是时间段无限缩短时的抽象。因此推导数理方程最常用的方法是：从所研究的系统内部划出一小部分（称为**微元**），应用物理规律分析邻近部分对这部分的作用，考虑这些作用在一个短时间段（或在一个瞬时）怎样影响物理量 u，把这些影响用算式表

示出来，然后用微分中值定理作变形（或更精密些，用积分中值定理作变形），并令区域缩向一点、时间段趋向于零取极限，经化简整理就得到所求的数理方程。

对微元法，我们在学习各种定积分的定义时，已接触多次，只是那时的微元法主要用到几何知识，现在既要用到几何知识更要应用物理知识。详见后续三节。希望读者着眼于掌握方法，不要满足或急于看到结果。

推导边界条件的方法跟推导方程大致相同，只是微元必须取在边界上的内侧。有时它可凭观察直接写出。

1.2 波动方程的导出

（一）弦（或杆）的振动

本款我们主要推导弦的横振动应满足的微分方程，顺便也介绍杆作纵振动时应满足的方程。

先看一根细弦的自由振动。所谓细弦的自由振动，就是说，从考察它的时刻起，弦不再遭受外力，即使重力也因弦之极细而被忽略不计。弦的振动纯粹是因为它原先就在振动，弦上各质点的惯性和弦因弹性形变而产生的张力，使它维持振动状态。为使导出的方程是简单易解又是基本符合实际的，我们再假设弦是完全柔软且质量分布是均匀的，静止时沿一条直线拉紧，振动时各点都在某一固定平面内，且沿着垂直其静止时所在直线的方向运动。这个垂直于弦静止时所在直线的方向称为**弦的横向**。

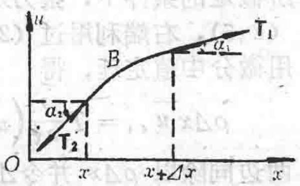

图 1—1

为了把题意用数学语言表达清楚进而推导出弦振动方程，应先在上述固定平面上建立坐标系：取弦静止时所在直线为 x 轴，所研究的物理量是位移 u，其数值表示在与 x 轴垂直的 u 轴上（如图 1-1）。在任一时刻 t，

未知函数$u=u(x,t)$的图象恰与弦的形状相符。

从弦上任取一个小段B（微元），其两端的坐标分别为x与$x+\Delta x$，两端受邻段的拉力（张力）大小用T_1、T_2表示。因弦完全柔软，张力必沿切线方向。由于振动是小的，全弦各点的切线倾斜角α都很小。据三角函数的泰勒展开式（一律从α的二次项起舍去），可得近似表达式

$$\mathrm{tg}\alpha=\alpha+0(\alpha^3)\approx\alpha, \qquad (2\text{-}1)$$

$$\cos\alpha=1+0(\alpha^2)\approx 1, \qquad (2\text{-}2)$$

$$\sin\alpha=\alpha+0(\alpha^3)\approx\alpha\approx\mathrm{tg}\alpha, \qquad (2\text{-}3)$$

$$\Delta s\approx\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta u)^2}=[1+(\Delta u/\Delta x)^2]^{1/2}\,\Delta x.$$

$$\approx(1+u_x^2)^{1/2}\,\Delta x=(1+\mathrm{tg}^2\alpha)^{1/2}\,\Delta x\approx\Delta x \qquad (2-4)$$

$$\Delta m=\rho\Delta s\approx\rho\Delta x. \qquad (2\text{-}5)$$

其中ρ是弦的质量线密度即单位长度弦的质量，既然是均匀弦，则ρ是常量。

现在着手分析B段弦受力和运动情况，推导弦振动应满足的微分方程。有关的物理规律是**牛顿第二定律**。先将运动和力沿两坐标轴方向分解，并记B段质心加速度为$\overline{u}_{tt}$。于是有

$$O=T_2\cos\alpha_2-T_1\cos\alpha_1=T_2-T_1, \qquad (2\text{-}6)$$

$$\rho\Delta x\,\overline{u}_{tt}=T_2\sin\alpha_2-T_1\sin\alpha_1\approx T(u_x|_{x+\Delta x}-u_x|_x). \qquad (2\text{-}7)$$

推导（2-6）时利用过(2-2)。(2-6）说明张力与坐标无关。又由（2-4)，弧长不变，可见张力T不随时间而变。总之在所假定的条件下，张力是常量。推导(2-7）时，左端利用过（2-5)，右端利用过（2-3）和（2-6)。再对（2-7）右端利用微分中值定理，得

$$\rho\Delta x\,\overline{u}_{tt}=T\frac{\partial}{\partial x}\left(u_x\right)\Big|_{x+\theta\Delta x}\Delta x\quad(0<\theta<1). \qquad (2\text{-}8)$$

两边同除以$\rho\Delta x$并令$\Delta x\to 0$，则B段缩为点x，质心加速度$\overline{u}_{tt}$就成为该点的加速度u_{tt}，于是得

$$u_{tt}=a^2u_{xx} \qquad (a \overset{\triangle}{=}{}^{①} \sqrt{T/\rho}). \qquad (2\text{-}9)$$

这就是本例的弦作**自由横振动**应满足的微分**方程**，它是一个二阶线性齐次方程。注意，它是在对弦及其运动作了“完全柔软的”、“质量均匀分布的”、“微小的横振动”等种种理想化假定下导出的。舍弃这些假定条件所导出的方程将会复杂得多。例如若弦并非柔软，则所得将是四阶的杆振动方程（1-5）。若振动不是很小的，则 α 或 $\sin\alpha$ 就不能用 $\mathrm{tg}\alpha$ 代替，弦的伸长就不能忽略不计，张力 T 将依赖于未知函数，最后所得的方程系数中将含有未知函数，那就不是线性方程了。而齐次性是假定弦不受外力且忽略重力的结果。

但考虑外力（包括考虑重力）的影响有时是有实际需要的。假设在振动过程中单位长的弦上所受力已知为 $F(x,t)$，而方向始终垂直于 x 轴，则上述推导过程要稍加修改：（2-1）～(2-6）不变，而(2-7）～(2-9）应在它们右端分别添上加项 $F(x,t)\Delta x$、$F(x,t)\Delta x$（B 段所受外力）和

$$f(x,t)=\frac{1}{\rho}F(x,t) \text{（单位质量的弦所受的力）}$$

而所得为**弦的强迫振动方程**

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t) \qquad (a=\sqrt{T/\rho}) \qquad (2\text{-}10)$$

类似地推导可知，当均匀细杆作微小纵振动（即沿杆所在直线方向伸长和缩短）时，位移 u 应满足的微分方程也分别形如（2-9)或(2-10)，只是对于杆的纵振动，$a=\sqrt{T/\rho}$，其中 ρ 为杆的质量体密度，而 T 是杨氏模量。推导中除需要引用牛顿运动定律外，计算应力需引用虎克定律。(2-9)和(2-10）分别是齐次与非齐次的一维波动方程。

(二)$^\triangle$膜的振动

仿照弦振动方程的推导方法，可导出平衡时自然张紧在

---

①记号“$\overset{\triangle}{=}$”读做“表示”或“定义为”．每当引入新记号时使用它，以避免叙述将运算打断．