数学分析学习研究

主编　马来焕　安　健

西北大学出版社

数学分析学习研究

主　编

马来焕　安　健

副主编

王均生　王德义　白甲志　白安文

冯治宇　刘红祥　朱明侠　张俊英

屈芝莲　程双斌　彭连科　魏有珍

编　委

刘东丽　任刚练　杨万录　杨静宜

程　卓

（以上均按姓氏笔划为序）

前　言

《数学分析》是高等师范院校数学专业的一门重要的数学主修课.对于初学者,无疑在理解、记忆、解题等方面均有一定难度,本书是与《数学分析》一书配套的读物.对于执教《数学分析》课程的老师们来说,至少会使您感到方便,提高您的工作效率;对于正在学习《数学分析》的在校学生、函授生和其他读者会使您明确学习目标,了解知识结构,理解重点难点,掌握解题方法,进行自我检测,达到提高数学素养,加强思维训练,开拓解题思路之目的.

本书各章均由五部分组成.第一部分为学习目标,主要说明每章理解和了解的概念,掌握的重点、难点和技能技巧.第二部分为知识结构,以图表形式将每章所学内容列成知识网络图和重要内容提示表.第三部分为疑难解析,该部分是本书的核心,在挖掘各类数学分析教材的重点、难点与深度和广度的基础上,以问答形式提出教材中的疑难问题,并逐一解答.第四部分为例题选讲,围绕每章所涉及的内容,选择有一定代表性及难度较大的习题,阐述解题的思想方法,归纳习题的类型,进行分析解答,并提出注意事项.第五部分为自我检测,依据《数学分析》教学大纲,围绕各章学习目标,给出自我检测题一套,并附有答案提示.

本书是多年来从事《数学分析》教学和研究工作的老师们辛勤努力编写而成.其中第一章由彭连科编写,第二章至第四章由屈芝莲编写,第五章至第十章由马来焕编写,第十一章由王德义编写,第十二章由冯治宇编写,第十三章由杨万录、马来焕编写,第十四章由杨静宜、白安文编写,第十五章至第十七章由白安文编写,各章自我检测与答案提示由冯治宇编写.参加审稿的有刘红祥、白甲志、魏有珍、朱明侠、张俊英、程卓,最后由马来焕审核、修改、定稿.由于水平所限,我们恳切希望读者对本书的缺点错误给予批评指正.

编　者

2000 年 10 月

目　　录

第一章 引 论

学习目标

1.了解实数的概念和性质,能从直观角度理解实数的稠密性和连续性.

2.掌握命题否定的对偶法则,掌握有界数集及数集的上、下确界的概念,能证明数集的有界性和上、下确界,理解确界存在公理.

3.掌握绝对值不等式,平均值不等式及贝努里不等式,能用这些不等式证明数学命题.

4.初步了解点集的概念,理解函数的概念,掌握函数的表示法.

5.理解函数的初等性质,即单调性、奇偶性、有界性和周期性的概念,并能用这些概念判断给定函数是否具有相应性质.

6.掌握复合函数的概念、反函数的概念和反函数的性质.

7.掌握基本初等函数的概念、类型及初等性质,掌握和理解初等函数的概念,会把一个函数拆成一些基本初等函数.

8.了解常用的几个非初等函数,如整数部分函数、符号函数、狄利克雷函数和黎曼函数.

本章重点是函数的概念和性质,难点是确界的概念和确界存在公理以及反函数的有关理论.应用绝对值不等式、平均不等式及贝努里不等式证明有关命题是本章的重要技巧.

知 识 结 构

1. 本章知识网络

- 引论
  - 实数集与不等式
    - 实数
      - 概念
      - 性质
        - 有序性与封闭性
        - 稠密性与连续性
    - 有界数集
      - 有界数集
      - 确界的概念
      - 确界存在公理
    - 不等式
      - 绝对值不等式
      - 平均值不等式
      - 贝努里不等式
  - 函数
    - 概念
      - 定义
      - 表示法
    - 初等性质
      - 单调性
      - 有界性
      - 奇偶性
      - 周期性
    - 复合函数与反函数
      - 复合函数
      - 反函数的概念
      - 反函数的性质
    - 初等函数
      - 基本初等函数
        - 常函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数
      - 初等函数

2.重点内容提要

表 1.1　实数的概念与性质

实数	有理数	形如$\frac{p}{q}(q,p \in \mathrm{Z}, q \neq 0)$的数,可与有限小数或无限循环小数互化
	无理数	无限不循环小数叫无理数
实数的性质		有序性:$\forall a$、$b \in \mathrm{R}$,在$a < b$、$a = b$、$a > b$中有一个且只有一个成立 封闭性:$\forall a$、$b \in \mathrm{R}$,则$a \pm b$、$a \cdot b$、$\frac{a}{b}(b \neq 0) \in \mathrm{R}$ 稠密性:$\forall a$、$b \in \mathrm{R}$且$a < b$,则必$\exists r \in \mathrm{Q}$,使$a < r < b$,也$\exists \alpha \in \mathrm{R} - \mathrm{Q}$,使$a < \alpha < b$ 连续性:在表示实数的数轴上,作为实数的两点之间无空隙

表 1.2　确界存在公理

否定命题的对偶方法	否定一个命题，只要将原命题中的“$\forall$”改为“$\exists$”、将“$\exists$”改为“$\forall$”、并将结论否定
关于有界数集（设 E 为非空数集）	常数 $M\in \mathrm{R}$ 是 E 的上界 $\Longleftrightarrow$ $\forall x\in E$，有 $x\leqslant M$ 常数 $M\in \mathrm{R}$ 不是 E 的上界 $\Longleftrightarrow$ $\exists x_M\in E$，使 $x_M>M$ E 有上界 $\Longleftrightarrow$ $\exists M\in \mathrm{R}, \forall x\in E$，有 $x\leqslant M$ E 无上界 $\Longleftrightarrow$ $\forall M\in \mathrm{R}, \exists x_M\in E$，使 $x_M>M$ E 有界 $\Longleftrightarrow$ $\exists M\in \mathrm{R}^+, \forall x\in E$，有 $\lvert x\rvert\leqslant M$ E 无界 $\Longleftrightarrow$ $\forall M\in \mathrm{R}^+, \exists \forall x_M\in E$，使 $\lvert x_M\rvert>M$ E 有界 $\Longleftrightarrow$ E 既有上界又有下界
确界的定义（E 为非空数集）	1. E 最小的上界叫 E 的上确界，记为 $\sup E$. E 最大的下界叫 E 的下确界，记为 $\inf E$
	2. 如果存在 $b\in \mathrm{R}$ 使(1) $\forall x\in E$，有 $x\leqslant b$，(2) $\forall b'<b$，$\exists x_0\in E$，使 $x_0>b'$，则 $b=\sup E$ 如果存在 $a\in \mathrm{R}$ 使(1) $\forall x\in E$，有 $x\geqslant a$，(2) $\forall a'>a$，$\exists x_0\in E$，使 $x_0<a'$，则 $a=\inf E$
	3. 如果存在 $b\in \mathrm{R}$，使(1) $\forall x\in E$，有 $x\leqslant b$，(2) $\forall \varepsilon>0$，$\exists x_0\in E$，使 $x_0>b-\varepsilon$，则 $b=\sup E$ 如果存在 $a\in \mathrm{R}$，使(1) $\forall x\in E$，有 $x\geqslant a$，(2) $\forall \varepsilon>0$，$\exists x_0\in E$，使 $x_0<a+\varepsilon$，则 $a=\inf E$
确界存在公理	非空有上界数集必有上确界 非空有下界数集必有下确界

表 1.3　不等式

绝对值不等式	1. 若 $r > 0$，则 $\lvert x \rvert < r \Longleftrightarrow -r < x < r$ 2. $\forall x, y \in \mathbf{R}$，有 $\lvert x \rvert - \lvert y \rvert \leqslant \lvert x + y \rvert \leqslant \lvert x \rvert + \lvert y \rvert$ 3. $\forall x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbf{R}$，则 $\lvert x_1 + x_2 + \cdots + x_n \rvert \leqslant \lvert x_1 \rvert + \lvert x_2 \rvert + \cdots + \lvert x_n \rvert$
平均值不等式	若 $\forall a_i \in \mathbf{R}^+ \ (i = 1, 2, \cdots, n)$，则 $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$，　(A) 当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时取等号
贝努里不等式	若 $r \in \mathbf{Q}^+$，$-1 < x \neq 0$，则 $(1 + x)^r < 1 + rx \quad 0 < r < 1$　(B) $(1 + x)^r > 1 + rx \quad r > 1$
两个重要的不等式	1. $\forall a, b \in \mathbf{R}^+$ (1) 当 $0 < \alpha < 1$ 时，$(a + b)^\alpha < a^\alpha + b^\alpha$. (2) 当 $\alpha > 1$ 时，$(a + b)^\alpha > a^\alpha + b^\alpha$ 2. $\forall n \in \mathbf{N}^+$ 及 $1 \neq P \in \mathbf{Q}^+$，有 $\dfrac{1}{(n+1)^p} < \dfrac{1}{1-p}\left[(n+1)^{1-p} - n^{1-p}\right] < \dfrac{1}{n^p}$

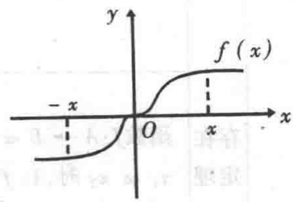
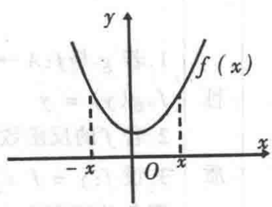
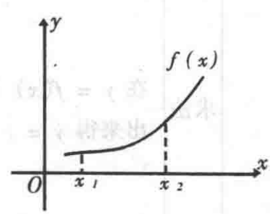
表 1.4　函数及其运算

<table>
<tr><td colspan="2">函数的定义</td><td>设 A 为非空点集，B 为非空数集，如果存在对应关系 f，使 $\forall x \in A$，$\exists ! y \in B$ 与之对应，则称 f 为由 A 到 B 内的函数(或映射)，记为 $f: A \to B$
A 称为函数 f 的定义域，$\forall x \in A$，$y = f(x)$ 称 f 在点 x 处的值(或象)，所有函数值的集合称为函数的值域，记为 $f(A)$
显然有 $f(A) \subset B$，当 $f(A) = B$ 时，称 f 为由 A 到 B 上的函数</td></tr>
<tr><td colspan="2">函数的限制与延拓</td><td>设 $f: A \to \mathrm{R}$，如果 $G \subset A$ 但 $G \neq A$，则称 $\varphi: \varphi(x) = f(x)$、$x \in G$ 为函数 f 在 G 上的限制，记 $f\mid_G$，同时称 f 为 φ 在 A 上的延拓</td></tr>
<tr><td colspan="2">函数的表示法</td><td>解析法、表格法、图象法</td></tr>
<tr><td rowspan="2">复合函数</td><td>定义</td><td>设给定二函数 $f: A \to B$，$g: G \to C$，如果 $I = \{x \in G, g(x) \in A\}$ 非空，则称函数 $f \circ g: f[g(x)]\quad x \in I$ 为 f 与 g 的复合函数</td></tr>
<tr><td>性质</td><td>$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$，但不满足交换律与分配律</td></tr>
</table>

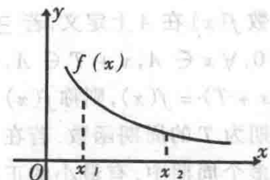
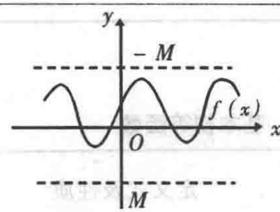
续表 1.4

反函数	定义	给定函数$f:A\to B=f(A)$，如果存在函数 $g:B\to A$，使 $\forall x\in A$，有 $g\circ f(x)=x$，则称 g 为f的反函数(或逆射)
	存在定理	函数$f:A\to B=f(A)$ 存在反函数 $\Longleftrightarrow$ $\forall x_1$、$x_2\in A$，当 $x_1\neq x_2$ 时，有 $f(x_1)\neq f(x_2)$
	性质	1.若 g 是$f:A\to B=f(A)$ 的反函数，则 $\forall y\in f(A)$ 有 $f\circ g(y)=y$ 2.若 f 的反函数存在，则必唯一 3.设 $f:y=f(x)$ 的反函数为 $f^{-1}:y=f^{-1}(x)$，则 f、f^{-1} 的图象关于直线 $y=x$ 对称
	求法	在 $y=f(x)$ 中把 x、y 互换得 $x=f(y)$，再把 y 用 x 表示出来得 $y=f^{-1}(x)$，即为 $y=f(x)$ 的反函数

表 1.5　函数的初等性质

名称		定　　义	图例或说明
奇偶性	奇函数	$\forall x \in A, -x \in A$ 函数 $f(x)$ 在 A 上定义，且 $f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数	
	偶函数	$\forall x \in A, -x \in A$ 函数 $f(x)$ 在 A 上定义，且 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数	
单调性	单调上升(单调递增)	函数 $f(x)$ 在 A 上定义，$\forall x_1, x_2 \in A$，由 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$	

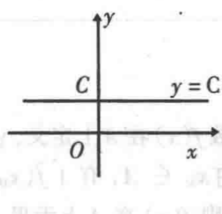
续表 1.5

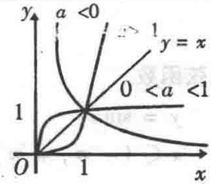
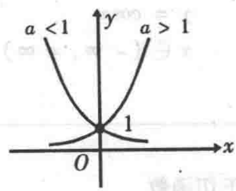
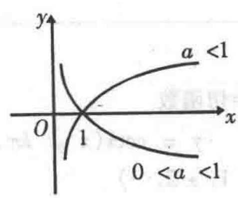
名称	定义		图例或说明
单调性	单调下降(单调递减)	函数 $f(x)$ 在 A 上定义,$\forall x_1, x_2 \in A$,由 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$	
	若等号不成立,则称严格单调上升(下降)		
有界性	函数 $f(x)$ 在 A 上定义,$\exists M > 0, \forall x \in A$,有 $\lvert f(x) \rvert \leqslant M$,(或 $\exists m, M \in \mathbf{R}$,使得 $\forall x \in A, m \leqslant f(x) \leqslant M$ 成立),则称函数 $f(x)$ 在 A 上是有界函数		 函数的图形位于二直线 $y = M$ 与 $y = -M$(或 $y = m$ 与 $y = M$)之间
无界性	函数 $f(x)$ 在 A 上定义,$\forall M > 0, \exists x_M \in A$,有 $\lvert f(x_M) \rvert > M$,则 $f(x)$ 在 A 上无界		例:$f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上无界,因为 $\forall M > 0$,取 $x_M = \dfrac{1}{2M}$,则 $f(x_M) = 2M > M$

续表 1.5

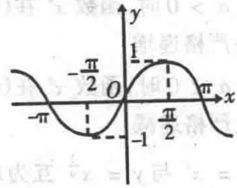
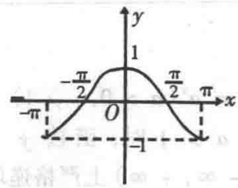
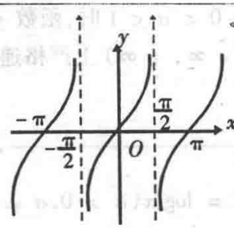
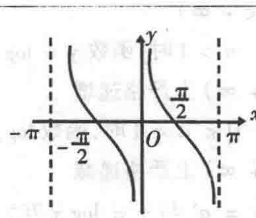
名称	定　　义	图例或说明
周期性	函数 $f(x)$ 在 A 上定义,若 $\exists T > 0, \forall x \in A, x+T \in A$,有 $f(x+T)=f(x)$,则称 $f(x)$ 是周期为 T 的周期函数.若在无穷多个周期中,有最小的正数 T,则称 T 为周期函数 $f(x)$ 的最小周期,简称周期	若 T 是 $f(x)$ 的周期,则 1. $f(x+kT)=f(x)$,(k 为整数) 2. $f(ax+b)(a \neq 0, b \in \mathrm{R})$ 是一个以 $\left\|\frac{T}{a}\right\|$ 为周期的函数 周期函数的图象不断重复出现

表 1.6　基本初等函数

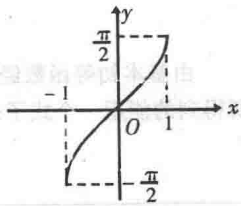
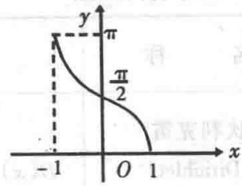
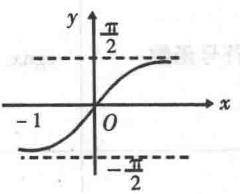
名称	定义式及性质	图　　例
常数函数	$y = C, (-\infty < x < +\infty)$ 图象为过 $(0, C)$ 点且平行于 x 轴的直线	

幂函数	$y = x^{\alpha}$,$(0 < x < +\infty, \alpha \neq 0)$ $\alpha > 0$ 时,函数 x^{α} 在 $(0, +\infty)$ 上严格递增 $\alpha < 0$ 时,函数 x^{α} 在 $(0, +\infty)$ 上严格递减 $y = x^{\alpha}$ 与 $y = x^{\frac{1}{\alpha}}$ 互为反函数	
指数函数	$y = a^{x}(a > 0, a \neq 1)$ $a > 1$ 时,函数 $y = a^{x}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上严格递增 $0 < a < 1$ 时,函数 $y = a^{x}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上严格递减	
对数函数	$y = \log_a x(a > 0, a \neq 1, 0 < x < +\infty)$ $a > 1$ 时,函数 $y = \log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格递增 $0 < a < 1$ 时,函数 $\log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格递减 $y = a^{x}$ 与 $y = \log_a x$ 互为反函数	

续表 1.6

名称	定义式及性质	图　　例
三角函数	正弦函数 $y = \sin x$ $x \in (-\infty, +\infty)$	
	余弦函数 $y = \cos x$ $x \in (-\infty, +\infty)$	
	正切函数 $y = \tan x(x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$	
	余切函数 $y = \cot x(x \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$	

续表 1.6

反三角函数	反正弦函数 $y = \arcsin x$ $\left(-1 \leqslant x \leqslant 1, -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$	
	反余弦函数 $y = \arccos x$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant \pi)$	
	反正切函数 $y = \arctan x$ $\left(-\infty < x < \infty, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$	
	反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$ $(-\infty < x < \infty, 0 < y < \pi)$