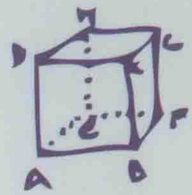
中吉联合

$a^2=b^2+c^2$

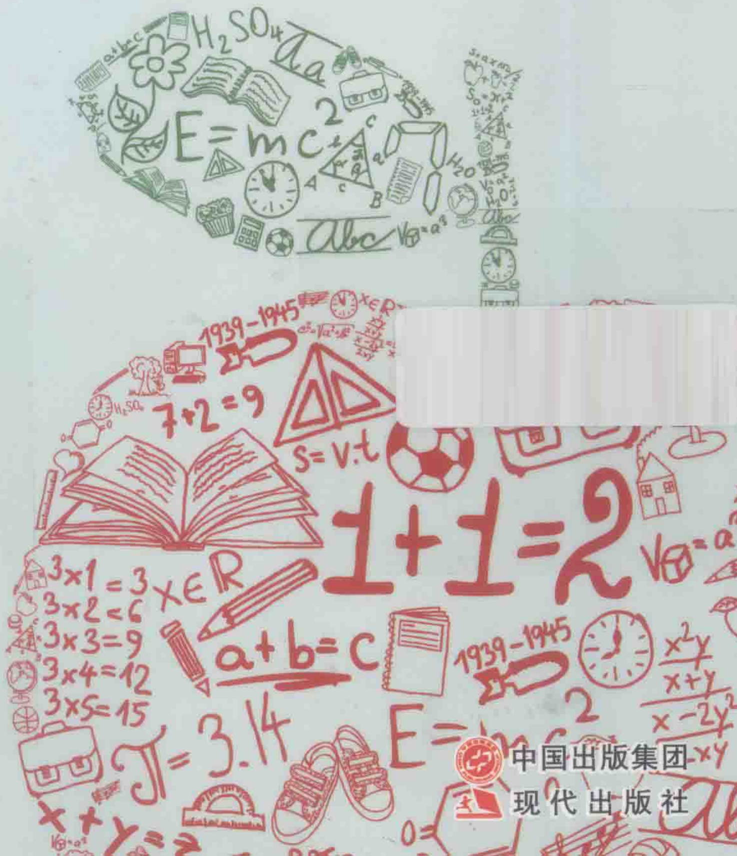
数学
人类智慧的源泉

周阳◎编著



让你眼界大开的数学

RANGNIYANJIE
DAKAIDESHUXUE



中国出版集团
现代出版社

数学
人类智慧的源泉

让你眼界大开的数学

周阳◎编著

中国出版集团
现代出版社

图书在版编目（CIP）数据

让你眼界大开的数学／周阳编著．—北京：现代出版社，2012．12

（数学：人类智慧的源泉）

ISBN 978－7－5143－0925－6

Ⅰ．①让…　Ⅱ．①周…　Ⅲ．①数学－青年读物②数学－少年读物　Ⅳ．①O1－49

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 275102 号

让你眼界大开的数学

编　　著	周　阳
责任编辑	刘春荣
出版发行	现代出版社
地　　址	北京市安定门外安华里 504 号
邮政编码	100011
电　　话	010－64267325　010－64245264（兼传真）
网　　址	www. xdcbs. com
电子信箱	xiandai@ cnpitc. com. cn
印　　刷	北京市业和印务有限公司
开　　本	710mm×1000mm　1/16
印　　张	12
版　　次	2013 年 3 月第 1 版　2013 年 3 月第 2 次印刷
书　　号	ISBN 978－7－5143－0925－6
定　　价	29. 80 元

前 言

数学，是研究数量、结构、变化以及空间模型等概念的一门学科。透过抽象化和逻辑推理的使用，由计数、计算、量度和对物体形状及运动的观察中产生。数学是最集中、最深刻、最典型地反映了人类理性和逻辑思维所能达到的高度的科学，11 世纪大数学家、物理学家和天文学家高斯说："数学是科学之王。"因此，学好数学对学好其他学问有着至关重要的意义。

数学是一门古老而深奥的学问，具有悠久的历史，是人们在生产劳动中，逐渐积累起来的关于现实世界中数量关系与空间形式的经验，经过不断系统化而形成的知识体系。其基本概念的精炼早在古埃及、美索不达米亚及古印度内的古代数学文本内便可观见。从那时开始，其发展便持续不断地有小幅度的进展，直至 16 世纪的文艺复兴时期，因其和新科学发现相互作用而生成的数学革新，导致了知识的加速，直至今日。

数学来源于生活又高度抽象和概括，面对枯燥的公式和定理，学习数学的人经常会无所适从，无从下手。本书就是从这一点入手，将数学中这门严谨、深奥的学科拆分开来讲解。全书共分七讲，涉及数学的门类、发展历史、定理、符号、经典题目、著名数学家以及一些趣味知识。与教科书专讲公式和定理截然不同。这样大家就会发现，原来数学可以这样学，学习数学原来很容易。希望这本《数学知识大讲堂》能带领大家在数学王国里畅游，领略数学世界的奥妙。

目　录

数学分类

算　术 …… 1
初等代数 …… 6
高等代数 …… 9
微积分 …… 12
平面几何 …… 15
立体几何 …… 20
解析几何 …… 23
非欧几何 …… 26
微分几何 …… 29
运筹学 …… 33
拓扑学 …… 35
概　率 …… 37

数学史话

数学的起源 …… 41
从结绳记事说起 …… 44
古巴比伦文明的结晶——泥版数字 …… 47

代数最早的意义 …… 49
我国古代数学起源 …… 52
阿拉伯数字从何而来 …… 55
圆周率的历史 …… 57
伟大的发明——十进小数 …… 60
二进制与中国八卦 …… 63
独一无二的六十进制 …… 65

数学定理

勾股定理 …… 68
海伦公式 …… 71
祖暅原理 …… 74
韦达定理 …… 76
蝴蝶定理 …… 79
费马定理 …… 81
中国剩余定理 …… 84

数学符号

数学符号的种类和意义 …… 87
“＋”和“－” …… 90
“＞”和“＜” …… 92
分数符号 …… 95
小数符号 …… 97
零 …… 99
对数符号 …… 103

数学名题

历史上的24道经典名题 …… 107

神奇的洛书…………………………………………………… 113
百鸡问题…………………………………………………… 117
丢番图和谜语方程………………………………………… 119
莫比乌斯带………………………………………………… 121
哥德巴赫猜想……………………………………………… 123
四色问题…………………………………………………… 127
七桥问题…………………………………………………… 131
斐波那契数列……………………………………………… 134
三等分角问题……………………………………………… 137

数学人物

刘徽与“割圆术”………………………………………… 141
祖冲之与圆周率…………………………………………… 145
华罗庚简介………………………………………………… 147
陈景润的爱国情怀………………………………………… 151
大数学家列昂哈德·欧拉………………………………… 155
伟大的数学王子高斯……………………………………… 159

数学趣谈

狐狸买葱与数学…………………………………………… 163
趣说“13”………………………………………………… 165
蛋趣谈……………………………………………………… 168
巴霍姆之死………………………………………………… 170
宇宙中有多少沙粒………………………………………… 174
生物身上的有趣数字……………………………………… 176
蜂巢中的数学智慧………………………………………… 178
数学也会有危机…………………………………………… 181

数学分类

数学是一门庞大的科学门类，从人类刚开始认识使用简单的数学运算到现在，数学已经形成了众多分支和类别。其中，现代数学可分为五大学科分支：经典数学、近代数学、计算机数学、随机数学、经济数学。而从这五大学科分支中又有众多数学分类，如：

算术、初等代数、高等代数、数论、欧几里得几何、非欧几里得几何、解析几何、微分几何、代数几何、射影几何学、几何拓扑学、拓扑学、分形几何、微积分学、实变函数论、概率和统计学、复变函数论、泛函分析、偏微分方程、常微分方程、数理逻辑、模糊数学、运筹学、计算数学、突变理论、数学物理学、函数类、会计类。

算术

算术是数学最古老且最简单的一个分支，几乎被每个人使用着，从日常上简单的算数到高深的科学及工商业计算都会用到。一般而言，算术这个词指的是记录数字某些运算基本性质的数学分支。常用的运算有加法、减法、乘法、除法，有时候，更复杂的运算如指数和平方根，也包括在算术运算的范畴内。算术运算要按照特定规则来进行。

“算术”这个词，在我国古代是全部数学的统称。至于几何、代数等许多数学分支学科的名称，都是后来很晚的时候才有的。

国外最早系统地整理前人数学知识的书，要算是希腊的欧几里得的《几何原本》。《几何原本》全书共十五卷，后两卷是后人增补的。全书大部分属于几

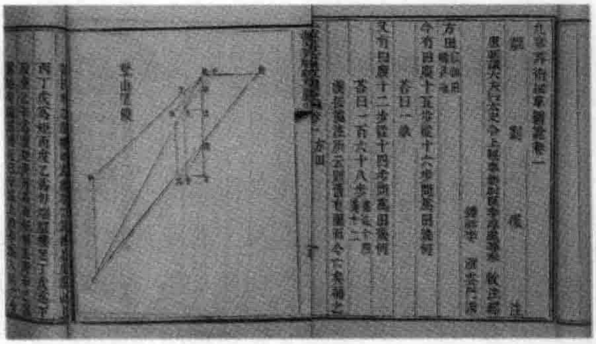
何知识，在第七、八、九卷中专门讨论了数的性质和运算，属于算术的内容。

欧几里得

现在拉丁文的“算术”这个词是由希腊文的“数和数数的技术”变化而来的。“算”字在中国的古意也是“数”的意思，表示计算用的竹筹。中国古代的复杂数字计算都要用算筹。所以“算术”包含当时的全部数学知识与计算技能，流传下来的最古老的《九章算术》以及失传的许商的《算术》和杜忠的《算术》，就是讨论各种实际的数学问题的求解方法。

关于算数的产生，还是要从数谈起。数是用来表达、讨论数量问题的，有不同类型的量，也就随之产生了各种不同类型的数。远在古代发展的最初阶段，由于人类日常生活与生产实践中的需要，在文化发展的最初阶段就产生了最简单的自然数的概念。

自然数的一个特点就是由不可分割的个体组成。比如，树和羊两种事物，如果有两棵树，就是一棵再一棵；如果有三只羊，就是一只、一只又一只。但不能说有半棵树或者半只羊，半棵树或者半只羊充其量只能算是木材或者是羊肉，而不能算作树和羊。



《九章算术》

不过，自然数不足以解决生活和生产中常见的分份问题，因此数的概念产生了第一次扩张。分数是对另一种类型的量的分割而产生的。比如，长度就是一种可以无限地分割的量，要表示这些量，就只有用分数。

从已有的文献可知，人类认识自然数和分数的历史是很久的。比如约公元前2000年流传下来的古埃及的《莱茵德纸草书》，就记载有关于分数的计算方法；中国殷代遗留下来的甲骨文中也有很多自然数，最大的数字是三万，并且全部是应用十进位制的计数法。

自然数和分数具有不同的性质，数和数之间也有不同的关系，为了计算这些数，就产生了加、减、乘、除的方法，这四种方法就是四则运算。

把数和数的性质、数和数之间的四则运算在应用过程中的经验累积起来，并加以整理，就形成了最古老的一门数学——算术。

在算术的发展过程中，由于实践和理论上的要求，对人类提出了许多新问题，在解决这些新问题的过程中，古算术从两个方面得到了进一步的发展。

一方面，在研究自然数四则运算中，发现只有除法比较复杂，有的能除尽，有的除不尽，有的数可以分解，有的数不能分解，有些数有大于1的公因数，有些数没有大于1的公因数。为了寻求这些数的规律，从而发展成为专门研究数的性质、脱离了古算术而独立的一个数学分支，叫做整数论，或叫做初等数论，并在以后又有新的发展。

另一方面，在古算术中讨论各种类型的应用问题，以及对这些问题的各种解法。在长期的研究中，很自然地就会启发人们寻求解决这些应用问题的一般方法。也就是说，能不能找到一般的、更为普遍适用的方法来解决同样类型的应用问题，于是发明了抽象的数学符号，从而发展成为数学的另一个古老的分支，这就是初等代数。

数学发展到现在，算术已不再是数学的一个分支，现在我们通常提到的算术，只是作为小学里的一个教学科目，目的是使学生理解和掌握有关数量关系和空间形式的最基础的知识，能够正确、迅速地进行整数、小数、分数的四则运算，初步了解现代数学中的一些最简单的思想，具有初步的逻辑思维能力和空间观念。

现代小学数学的具体内容，基本上还是古代算术的知识，也就是说，古代算术和现代算术在许多内容上是相同的。不过现代算术和古代算术也还存在着区别。

首先，算术的内容是古代的成人包括数学家所研究的对象，现在这些内容已变成了少年儿童的数学。其次，在现代小学数学里，总结了长期以来所归结出来的基本运算性质，即加法、乘法的交换律和结合律，以及乘法对加

法的分配律。这五条基本运算定律，不仅是小学数学里所学习的数的运算的重要性质，也是整个数学里，特别是代数学里着重研究的主要性质。再次，在现代的小学数学里，还孕育着近代数学里的集合和函数等数学基础概念的思想。比如，和、差、积、商的变化，数和数之间的对应关系，以及比和比例等。

另外，现在小学数学里，还包含有16世纪才出现的十进制小数和它们的四则运算。应当提出的是十进制小数不是一种新的数，而是可以被看作是一种分母为10的方幂的分数的另一种写法。

我们在这里把算术列成第一个分支，主要是想强调在古代把全部的数学叫做算术，现代的代数学、数论等，最初就是由算术发展起来的。后来，算学、数学的概念出现了，它代替了算术的含义，包括了全部的数学，算术就变成了一个分支。因此，也可以说算术是最古老的分支。

知识点

甲骨文

甲骨文主要指殷墟甲骨文，又称为“殷墟文字”、“殷契”，是殷商时代刻在龟甲和兽骨上的文字。19世纪末，在殷代都城遗址（今河南安阳小屯）被发现。甲骨文继承了陶文的造字方法，是中国商代后期（前14～前11世纪）王室用于占卜记事而刻（或写）在龟甲和兽骨上的文字。甲骨文是中国已发现的古代文字中时代最早、体系较为完整的文字。

延伸阅读

《九章算术》

《九章算术》是我国算经十书中最重要的一本。最晚成书于公元1世纪。它系统地总结了我国先秦到东汉初年的数学成就。关于《九章算术》的来源，应该追溯到《算数书》。这本书的作者不详，从它的内容来看，已经把问题按

算法进行了分类。小标题有“分乘”、“增减分”、“相乘”、“合分”等六十多个，其中一些算法术语，都被《九章算术》所采用。《九章算术》又吸收了其他算书的特点，经多人之手，到公元1世纪已经定型。

这本书之所以起名《九章算术》，是因为它把全书24个问题，按照不同算法的类型分为九章，所以称为《九章算术》。

《九章算术》的主要内容如下：

第一章为“方田”。主要讲了平面几何图形面积的计算方法。它包括长方形、等腰三角形、直角梯形、等腰梯形、圆、扇形、弓形、圆环八种图形面积的计算方法。另外在这一章中还系统讲述了分数的四则运算法则以及求分子分母最大公因数等方法。

第二章为“粟米”。主要讲述了各种谷物的比率以及比例算法。最有名的比例算法有四项，已知其中的三项，求未知项，《九章算术》列出了求未知项的公式是：

$$\text{所求数}=\frac{\text{所有数}\times\text{所求率}}{\text{所有率}}$$

第三章为“衰分”。主要讲述以分配问题为中心的配分比例。

第四章为“少广”。主要讲述已知包括正方形在内的矩形的面积，求一边之长，或者已知立方体的体积，求其边长的开方法则。

这一章给出的正整数、正分数开平方、开立方的法则是世界上最早的记录。

第五章是“商功”。主要讲述以立体问题为主的各种形体体积的计算公式。包括正四棱柱、圆柱、圆台、正圆锥等10种形体的体积计算公式。

第六章是“均输”。主要讲述的是以赋税计算和其他应用问题为中心的比较复杂的配分比例计算方法。另外还提出了有关等差数列的问题。

第七章是“盈不足”。主要讲述以盈亏问题为中心的一种双假设算法。

第八章是“方程”。但是这里的“方程”的含义与我们现在所讲的方程不同。它专门指由线性方程组的系数排列而成的长方阵。除此之外，本章还在世界上第一次明确了负数的概念，说明了正负数以及零之间的加减运算法则。

第九章为“勾股”。主要讲述了以测量问题为中心的直角三角形三边互求的问题。

《九章算术》的内容丰富，包括了当时社会的生产、分配、交换、行政管理等方面的问题，是我国数学史上最著名的专著之一，在世界数学专著之林里也毫不逊色。

初等代数

“代数”作为一个数学专有名词、代表一门数学分支在我国正式使用，最早是在1859年。那年，清代数学家李善兰和英国人韦列亚力共同翻译了英国人棣么甘所写的一本书，译本的名称就叫做《代数学》。当然，代数的内容和方法，我国古代早就产生了，比如《九章算术》中就有方程问题。


李善兰

初等代数的中心内容是解方程，因而长期以来都把代数学理解成方程的科学，数学家们也把主要精力集中在方程的研究上。

要讨论方程，首先遇到的一个问题是如何把实际中的数量关系组成代数式，然后根据等量关系列出方程。所以初等代数的一个重要内容就是代数式。由于事物中的数量关系的不同，初等代数大体上形成了整式、分式和根式这三大类代数式。代数式是数的化身，因而在代数中，它们都可以进行四则运算，服从基本运算定律，而且还可以进行乘方和开方两种新的运算。通常把这六种运算叫做代数运算，以区别于只包含四种运算的算术运算。

在初等代数的产生和发展的过程中，通过解方程的研究，也促进了数的概念的进一步发展，将算术中讨论的整数和分数的概念扩充到有理数的范围，使数包括正负整数、正负分数和零。这是初等代数的又一重要内容，就是数的概念的扩充。

有了有理数，初等代数能解决的问题就大大地扩充了。但是，有些方程在

有理数范围内仍然没有解。于是，数的概念再一次扩充到了实数，进而又进一步扩充到了复数。

那么到了复数范围内是不是仍然有方程没有解，还必须把复数再进行扩展呢？数学家们说：不用了。这就是代数里的一个著名的定理——代数基本定理。这个定理简单地说就是 n 次方程有 n 个根。1742 年 12 月 15 日瑞士数学家欧拉曾在一封信中明确地做了陈述，后来另一位数学家、德国的高斯在 1799 年给出了严格的证明。

把上面分析过的内容综合起来，组成初等代数的基本内容就是：

三种数——有理数、无理数、复数

三种式——整式、分式、根式

中心内容是方程——整式方程、分式方程、根式方程和方程组。

初等代数的内容大体上相当于现代中学设置的代数课程的内容，但又不完全相同。比如，严格地说，数的概念、排列和组合应归入算术的内容；函数是分析数学的内容；不等式的解法有点像解方程的方法，但不等式作为一种估算数值的方法，本质上是属于分析数学的范围；坐标法是研究解析几何的……这些都只是历史上形成的一种编排方法。

初等代数是算术的继续和推广，初等代数研究的对象是代数式的运算和方程的求解。代数运算的特点是只进行有限次的运算。全部初等代数总合起来有十条规则。这是学习初等代数需要理解并掌握的要点。

这十条规则是：

五条基本运算律：加法交换律、加法结合律、乘法交换律、乘法结合律、分配律；

两条等式基本性质：等式两边同时加上一个数，等式不变；等式两边同时乘以一个非零的数，等式不变；

三条指数律：同底数幂相乘，底数不变指数相加；指数的乘方等于底数不变指数想乘；积的乘方等于乘方的积。

初等代数学进一步地向两个方面发展，一方面是研究未知数更多的一次方程组；另一方面是研究未知数次数更高的高次方程。这时候，代数学已由初等代数向着高等代数的方向发展了。

知识点

整式

整式是有理式的一部分，在有理式中可以包含加、减、乘、除四种运算，但在整式中除数不能含有字母。单项式和多项式统称为整式。

延伸阅读

无理数

无理数指无限不循环的数，或不能表示为整数之比的实数。若将它写成小数形式，小数点之后的数字有无限多个，并且不会循环。常见的无理数有大部分数的平方根、π和e（其中后两者同时为超越数）等。最先被发现的无理数是$\sqrt{2}$，它不像自然数与负数那样，在实际生活中会遇到，它是在数学计算中被发现的。

远在公元前500年左右，古希腊毕达哥拉斯学派的成员认为："万物皆整数"，宇宙的一切现象都能归结为整数及整数的比。有一个名叫希帕索斯的学生发现：正方形对角线与其一边之比不能用两个整数来表示。

这与毕达哥拉斯学派的信条有了矛盾。希帕索斯所用的归谬法成功地证明了确实不能用整数及整数之比来表示。而毕达哥拉斯学派的许多人都否定这个动摇他们观念的数的存在。这一发现，导致了数学史上的第一次"数学危机"。而希帕索斯本人因违背毕达哥拉斯学派的信念而被投入大海。

第一次数学危机表明，几何学的某些真理与算术无关，几何量不能完全由整数及比来表示。反之，数却可以由几何量表示。因此古希腊的数学观念受到了极大的冲击。从此以后，几何学开始在古希腊迅速发展。希腊人认识到，直觉和经验不一定靠得住，而可靠的只有推理论证。于是，他们开始从公理出发，经过演泽推理，建立了几何学体系。

高等代数

初等代数从最简单的一元一次方程开始，一方面进而讨论二元及三元的一次方程组，另一方面研究二次以上及可以转化为二次的方程组。沿着这两个方向继续发展，代数在讨论任意多个未知数的一次方程组，也叫线性方程组的同时还研究次数更高的一元方程组。发展到这个阶段，就叫做高等代数。

高等代数是代数学发展到高级阶段的总称，它包括许多分支。现在大学里开设的高等代数，一般包括两部分：线性代数初步、多项式代数。

高等代数发展简史

人们很早就已经知道了一元一次方程和一元二次方程的求解方法。关于三次方程，我国在公元 7 世纪，就得到了一般的近似解法，这在唐朝数学家王孝通所编的《缉古算经》中就有叙述。到了 13 世纪，宋代数学家秦九韶在他所著的《数书九章》这部书的“正负开方术”里，充分研究了数字高次方程的求正根法，也就是说，秦九韶那时候已得到了高次方程的一般解法。

在西方，直到 16 世纪初的文艺复兴时期，才由意大利的数学家发现一元三次方程的解的公式——卡当公式。

在数学史上，相传这个公式是意大利数学家塔塔里亚首先得到的，后来被米兰地区的数学家卡尔达诺（1501～1576）骗到了这个三次方程的解的公式，并发表在自己的著作里。所以现在人们还是叫这个公式为卡尔达诺公式（或称卡当公式），其实，它应该叫塔塔里亚公式。

三次方程被解出来后，一般的四次方程很快就被意大利的费拉里（1522～1560）解出。这就很自然地促使数学家们继续努力寻求五次及五次以上的高次方程的解法。遗憾的是这个问题虽然耗费了许多数学家的时间和精力，但一直持续了长达三个多世纪，都没有被解决。

到了 19 世纪初，挪威的一位青年数学家阿贝尔（1802～1829）证明了五次或五次以上的方程不可能有代数解。即这些方程的根不能用方程的系数通过加、减、乘、除、乘方、开方这些代数运算表示出来。阿贝尔的这个证明不但比较难，而且也没有回答每一个具体的方程是否可以用代数方法求解的问题。

后来，五次或五次以上的方程不可能有代数解的问题，由法国的一位青年数学家伽罗华彻底解决了。伽罗华20岁的时候，因为积极参加法国资产阶级革命运动，曾两次被捕入狱，1832年4月，他出狱不久，便在一次私人决斗中死去，年仅21岁。

伽罗华在临死前预料自己难以摆脱死亡的命运，所以曾连夜给朋友写信，仓促地把自己生平的数学研究心得扼要地写出来，并附以论文手稿。他在给朋友舍瓦利叶的信中说："我在分析方面做出了一些新发现。有些是关于方程论的；有些是关于整函数的……公开请求雅可比或高斯，不是对这些定理的正确性而是对这些定理的重要性发表意见。我希望将来有人发现消除所有这些混乱对他们是有益的。"

伽罗华死后，按照他的遗愿，舍瓦利叶把他的信发表在《百科评论》中。他的论文手稿过了14年，才由刘维尔（1809～1882）编辑出版了他的部分文章，并向数学界推荐。

高等代数的基本内容

代数学从高等代数总的问题出发，又发展成为包括许多独立分支的一个大的数学科目，比如：多项式代数、线性代数等。代数学研究的对象，也已不仅是数，还有矩阵、向量、向量空间的变换等，对于这些对象，都可以进行运算。虽然也叫做加法或乘法，但是关于数的基本运算定律，有时不再保持有效。因此代数学的内容可以概括为研究带有运算的一些集合，在数学中把这样的一些集合叫做代数系统。比如群、环、域等。

多项式是一类最常见、最简单的函数，它的应用非常广泛。多项式理论是以代数方程的根的计算和分布作为中心问题的，也叫做方程论。研究多项式理论，主要在于探讨代数方程的性质，从而寻找简易的解方程的方法。

多项式代数所研究的内容，包括整除性理论、最大公因式、重因式等。这些大体上和中学代数里的内容相同。多项式的整除性质对于解代数方程是很有用的。解代数方程无非就是求对应多项式的零点，零点不存在的时候，所对应的代数方程就没有解。