普通高等教育"十一五"国家级规划教材

大学数学教程/韩旭里 主编

高等数学（上册）

（第三版）

李军英 刘碧玉 韩旭里 编

科学出版社

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

大学数学教程/韩旭里　主编

高等数学

（上　册）

（第三版）

李军英　刘碧玉　韩旭里　编

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材“大学数学教程”系列教材的高等数学(上册)部分.

全书包括函数、极限与连续，导数与微分，微分中值定理与导数的应用，不定积分，定积分及其应用，无穷级数，应用数学模型第 7 章内容. 本书体系新颖，结构严谨，内容翔实，叙述清晰，重点突出，难点分散，例题典型，习题丰富，重视对学生分析、推理、计算和应用数学能力的培养.

本书可作为高等学校理工科非数学类专业本科生的教材或教学参考书，也可供科学研究与工程技术人员学习参考.

图书在版编目(CIP)数据

大学数学教程. 高等数学. 上册/韩旭里主编；李军英，刘碧玉，韩旭里编. —3 版. —北京：科学出版社，2013

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

ISBN 978-7-03-038288-7

Ⅰ. ①大… Ⅱ. ①韩…②李…③刘…④韩… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 181915 号

责任编辑：王 静 / 责任校对：刘小梅
责任印制：阎 磊 / 封面设计：陈 敬

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004 年 8 月第 一 版 开本：720×1000 B5
2008 年 7 月第 二 版 印张：30
2013 年 8 月第 三 版 字数：605 000
2013 年 8 月第十四次印刷

定价：48.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

第三版前言

大学数学课程是大学高等教育中最基础和最重要的课程之一,各高等院校都十分重视大学数学基础课程的教学. 为了适应科学技术进步的要求,培养高素质的人才,我们在各级教育主管部门的领导和支持下,进行了多年的大学数学教学改革实践. 我们进行教学改革的重点工作之一是注重吸取国内外高等学校在基础数学教学改革方面的进展,不断总结教学实践的经验,努力编写一套高质量的数学基础课教材. 本套教材是在对原《大学数学教程》系列教材使用多年的基础上,进一步修订,出版的第三版.

本系列教材,在数学观点和思想方法上,贯穿集合、向量及映射的概念,体现局部线性化、离散化、逼近、最优化等思想. 在内容体系上,淡化单纯面向专业的观念,理顺课程内容之间的关系,加强对应该普遍具备的数学基础知识的阐述,注重有利于学生对知识的理解与深化. 在知识巩固和应用数学能力的培养上,除了精心选取例题和练习外,每册单独给出了与本册内容相关的应用数学模型一章,内容原则上只用到前面所学的知识,可以供相关章节中选讲,以培养学生的应用意识和提高学习兴趣,提高学生融会贯通的分析问题和解决问题的能力.

第一版教材侧重于将微积分、线性代数、概率论与数理统计的数学基础课内容统一安排教学,侧重适合于统一开设为大学数学一门课程使用. 这样,对大学数学的基本内容,便于学生学习、教师教学和教学管理上的统一安排,有利于使这些基本内容保持同等重要和重视的地位. 第二版教材,在保持原有指导思想的前提下,力求做到既适合于统一开设一门课程使用,也适合于分别开设多门课程使用. 因而,实现了本系列教材的目标定位是作为非数学类理工科大部分本科专业的数学基础课教材,内容经选择适用于对数学要求差别不是很大的其他各类有关专业数学课程的教学.

为了更新教学内容和加强数学思维的训练,本次修订对部分内容进行了调整和补充,进一步精选了例题,补充了部分习题. 每本书修订的其他情况如下:

《高等数学(上册)》是对第二版的《微积分(上册)》的修改,将函数、极限与连续两章进行了一定的调整,删除了一些不常用的内容和与中学有重叠的内容,增加了一些着重应用的数学内容,比如,介绍了一些经济管理领域内的数学概念等,并合并成了一章. 适当引进了一些近似计算方法与实际应用的数学问题. 第 1 章至第 3 章由刘碧玉编写,第 4 章至第 6 章由李军英编写,第 7 章由韩旭里编写.

《高等数学(下册)》是对第二版的《微积分(下册)》的修改,对内容力求简明直

观地描述，着重训练、应用和运算，注重增强理性思维培养的要求. 第 1 章、第 4 章和第 5 章由刘旺梅编写，第 2 章和第 3 章由秦宜云编写，第 6 章由周英告编写，第 7 章由韩旭里编写.

《线性代数》在第二版的基础上，除了精心编写了基于线性映射定义行列式的内容，以加强培养学生的抽象思维能力，还补充了基于排列求和定义行列式的内容，便于读者参考其他教科书，更好地理解行列式的内容. 将逆矩阵内容后移，与初等矩阵合并在一节，使逆矩阵内容的介绍更为紧凑. 第 1 章至第 3 章由刘伟俊编写，第 4 章至第 6 章由杨文胜编写，第 7 章由韩旭里编写.

《概率论与数理统计》的内容在第二版的基础上，对随机事件的概率、多维随机变量的函数及假设检验进行了适当的修正，并将原来的随机变量的数字特征与极限定理一章调整为随机变量的数字特征一章和大数定律与中心极限定理一章，同时对部分章节的例题和习题作了一些增减，使其层次更加清楚，内容更加丰富和完善，适应多种课时安排的教学. 第 1 章至第 3 章由裘亚峥编写，第 4 章至第 6 章由刘诚编写，第 7 章至第 10 章由陈亚力编写，第 11 章由韩旭里编写.

这套教材既是一个统一的整体，可以作为大学数学课程统一开课使用，进行一体化教学. 各部分之间又有相对独立性，可以按四本教材分别开设课程，独立讲授. 讲完全部内容大约需要 290 学时. 如果减少一些内容，安排 240 学时左右讲授是可以的.《高等数学(上册)》可以考虑安排 80～90 学时，《高等数学(下册)》可以考虑安排 90～106 学时，《线性代数》可以考虑安排 32～40 学时，《概率论与数理统计》可以考虑安排 40～54 学时，教师可以根据教学计划灵活安排.

课程教学体系和教学内容的改革不是一朝一夕就能完成的，需要不断完善、不断适应时代发展的需要. 本套教材前后版本的使用、修订和出版，得到很多教师和教育主管部门领导的帮助和支持，得到科学出版社的热情支持，在此表示衷心感谢. 同时，本教材若有不妥与错误之处，恳请专家、同行和读者不吝指正.

编　者

2013 年 5 月

第一版前言

大学数学课程是高等教育中最基础和最重要的课程之一，各高等院校都十分重视大学数学基础课程的教学．为了适应科学技术进步的要求，培养高素质的人才，我们在各级教育主管部门的领导和支持下，进行了多年的大学数学教学改革实践．我们进行教学改革的特点是：根据大学数学基础课程的内在联系，突破原有课程的界限，将微积分、线性代数、空间解析几何、概率论、数理统计、应用数学模型的内容有机结合，加强相互渗透，加强数学思想方法的教学，加强应用数学能力的培养，统一开设大学数学课程．按照这种教学改革的思想，我们组织编写了一体化教学教材，并经过多年的教学实践，效果是令人满意的．现在，我们在原教材的基础上，广泛吸取国内外知名大学的教学经验，并进一步改进，出版了这套系列教材．

本系列教材的目标定位是作为非数学类理工科大部分本科专业的数学基础课的教材，内容经选择也适用于对数学要求较高的其他各类有关专业的数学课程的教学．本系列教材全部内容按大约 260 学时的教学计划编写．对于学时安排较少的专业，可根据要求选择使用．对全部教学内容，建议按三个学期整体安排．

本系列教材，在数学观点和思想方法上，全书贯穿集合、向量及映射的概念，体现局部线性化、离散化、逼近、最优化等思想．在内容体系上，进一步理顺了内容之间的关系，整体优化，强调分析、代数、几何的有机结合．对大学数学基础内容统一安排教学，既有利于学生对知识的理解与深化，又能使大学数学的基本内容在教学管理、教师选课和学生选课上，保持同等重要的地位．在知识巩固和应用数学能力的培养上，除了精心选取例题和练习外，每册单独给出了与本册内容相关的应用数学模型一章，内容原则上只用到前面所学的知识，可以供相关章节中选讲，以培养学生的应用意识和提高学习兴趣，提高学生分析问题和解决问题的能力．

本系列教材是“湖南省普通高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”重点资助项目的研究成果的延续，得到了“湖南省高等教育 21 世纪课程教材”立项资助和“中南大学教育教改研究项目”的立项资助．在此，向对本系列教材的编写与出版给予帮助和支持的同志表示衷心感谢．

由于编者水平有限，若有不妥与错误之处，恳请专家、同行和读者不吝指正．

编　者

2004 年 3 月

目 录

第 1 章　函数、极限与连续

函数是现代数学的基本概念之一，是高等数学的主要研究对象. 极限概念是高等数学的理论基础，极限方法是高等数学的基本分析方法，因此，掌握、运用好极限方法是学好高等数学的关键. 连续是函数的一个重要性态. 本章将介绍函数、极限与连续的基本知识和有关的基本方法，为今后的学习打下必要的基础.

1.1　集合与映射

集合和映射是现代数学的两个基本概念，它在现代数学与工程技术中有着重要的作用. 本节将简要地介绍集合的概念及其运算，然后简要介绍映射的基本知识.

1.1.1　集合概念

首先通过几个实际例子来说明集合这个概念. 例如，中南大学一年级全体新生构成一个集合，深圳证券交易所全体上市公司构成一个集合，全体有理数构成一个集合等. 一般地，将具有某种特定性质的事物的全体称为一个集合，简称集. 组成这个集合的事物称为该集合的元素，简称元.

通常用大写的英文字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，用小写的英文字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合的元素.

如果 a 是集合 A 的元素，则称 a 属于 A，记为 $a\in A$. 如果 a 不是集合 A 的元素，则称 a 不属于 A，记为 $a\notin A$. 一个集合，若它只含有限个元素，则称为有限集. 不含任何元素的集合称为空集，记作 $\varnothing$. 不是有限集也不是空集的集合称为无限集. 例如，中南大学一年级全体新生构成的集合和深圳证券交易所全体上市公司构成的集合就是有限集，而全体有理数构成的集合是无限集，方程 $x^2+1=0$ 的实根组成的集合是空集，因为适合条件 $x^2+1=0$ 的实数是不存在的.

表示集合的方法通常有以下两种. 一种是枚举法，即将集合的元素一一列举出来，写在一个花括号内，元素之间用逗号隔开. 例如，由 26 个英文字母构成的集合可表示为

$$A=\{a,b,c,\cdots,x,y,z\}.$$

另一种是描述法，即把集合中各元素所具有的特性写在花括号内来表示这个集合. 例如，

$$A=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1,x,y\text{ 为实数}\}$$

表示 xOy 平面上单位圆周上点的集合. 一般地，若集合 A 是由具有性质 $p(x)$ 的元素 x 构成的，则 A 表示为

$$A=\{x\mid x\text{ 具有性质 }p(x)\}.$$

对于数集，有时我们在表示数集的字母的右上角标上"$*$"来表示该数集内排除零的集，标上"$+$"来表示数集内排除零和负数的集.

习惯上，全体非负整数即自然数的集合记作 $\mathbf{N}$，即

$$\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}.$$

全体正整数的集合为

$$\mathbf{N}^+=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}.$$

全体整数的集合记作 $\mathbf{Z}$，即

$$\mathbf{Z}=\{\cdots,-n,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\}.$$

全体有理数的集合记作 $\mathbf{Q}$，即

$$\mathbf{Q}=\left\{\frac{p}{q}\,\middle|\,p\in\mathbf{Z},q\in\mathbf{N}^+\text{ 且 }p\text{ 与 }q\text{ 互质}\right\}.$$

全体实数的集合记作 $\mathbf{R}$，$\mathbf{R}^*$ 为排除数 0 的实数集，$\mathbf{R}^+$ 为全体正实数集.

设 A,B 是两个集合，如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，也称 A 被 B 包含，或 B 包含 A，记作 $A\subseteq B$（读作 A 包含于 B），或 $B\supseteq A$（读作 B 包含 A）.

如果集合 A 与集合 B 互为子集，即 $A\subseteq B$ 且 $A\supseteq B$，则称集合 A 与集合 B 相等，记作 $A=B$. 否则集 A 与集 B 不相等，记作 $A\neq B$. 例如，设

$$A=\{1,2\},\quad B=\{x\mid x^2-3x+2=0\},$$

则 $A=B$.

若 $A\subseteq B$，且 $A\neq B$，则称 A 是 B 的真子集，记作 $A\subset B$. 例如，$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$. 规定空集 $\varnothing$ 是任何集合 A 的子集，即 $\varnothing\subseteq A$.

1.1.2　集合的运算

集合的基本运算有以下几种：并，交，差.

设 A,B 是两个集合，由属于 A 或属于 B 的所有元素构成的集合称为 A 与 B 的并集（简称并），记作 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\}.$$

由同时属于 A 与 B 的元素构成的集合称为 A 与 B 的交集（简称交），记作 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\}.$$

由属于 A 但不属于 B 的元素构成的集合称为 A 与 B 的差集（简称差），记作 $A-B$，即

$$A-B=\{x\mid x\in A \text{ 但 } x\notin B\}.$$

两个集合的并、交、差如图 1-1 所示阴影部分.

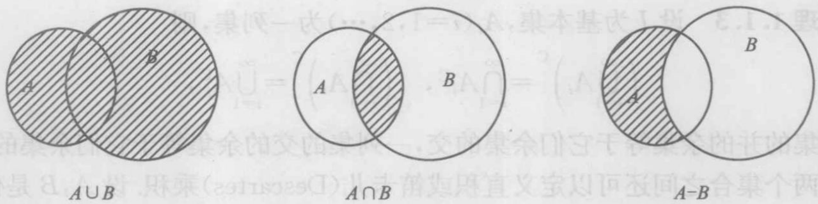

图 1-1

有时,我们研究某个问题限定在一个大的集合 I 中进行,所研究的其他集合 A 都是 I 的子集,此时我们称 I 为全集或基本集. 若 A 是 I 中任意集,则差集 $I-A$ 称为 A 的余集或补集. 记作 A^C. 例如在实数集 $\mathbf{R}$ 中,集合 $A=\{x\mid 0<x\leqslant 2\}$ 的余集是

$$A^C=\{x\mid x\leqslant 0 \text{ 或 } x>2\}.$$

两个集合的并集与交集可以推广到任意多个集的并集与交集. 若 $A\cap B=\varnothing$,则称 A 与 B 不相交,若 $A\cap B\neq\varnothing$,则称 A 与 B 相交.

集合的并、交、余的运算满足下列法则.

定理 1.1.1 设 A,B,C 为任意三个集合,则下面法则成立.

(1) 交换律 $A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$;

(2) 结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C), (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(3) 分配律 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$;

(4) 对偶律 $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C, (A\cap B)^C=A^C\cup B^C$;

(5) 幂等律 $A\cup A=A, A\cap A=A$;

(6) 吸收律 $A\cup\varnothing=A,\ A\cap\varnothing=\varnothing$.

以上这些法则都可根据集合相等的定义验证. 现就对偶律的第一个等式:"两个集合的并集的余集等于它们的余集的交集"证明如下.

设 $x\in(A\cup B)^C$,则 $x\notin A\cup B$,从而 $x\notin A$ 且 $x\notin B$,即 $x\in A^C$ 且 $x\in B^C$,于是 $x\in A^C\cap B^C$,故 $(A\cup B)^C\subseteq A^C\cap B^C$.

反之,设 $x\in A^C\cap B^C$,则 $x\in A^C$ 且 $x\in B^C$,从而 $x\notin A$ 且 $x\notin B$,即 $x\notin A\cup B$,于是 $x\in(A\cup B)^C$,故 $A^C\cap B^C\subseteq(A\cup B)^C$,因此

$$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C.$$

类似可以证明如下定理.

定理 1.1.2 设 $A_i(i=1,2,\cdots)$ 为一列集,则

(1)若 $A_i \subseteq C(i=1,2,\cdots)$，则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq C$；

(2)若 $A_i \supseteq C(i=1,2,\cdots)$，则 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \supseteq C$.

定理 1.1.3　设 I 为基本集，$A_i(i=1,2,\cdots)$ 为一列集，则

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^{\mathrm{C}} = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^{\mathrm{C}}, \quad \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)^{\mathrm{C}} = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^{\mathrm{C}},$$

即一列集的并的余集等于它们余集的交，一列集的交的余集等于它们余集的并.

在两个集合之间还可以定义直积或笛卡儿(Descartes)乘积. 设 A,B 是任意两个集合，在集合 A 中任意取一个元素 x，在集合 B 任取一个元素 y，组成一个有序数对 (x,y)，把这样的有序数对作为新的元素，它们全体组成的集合称为集合 A 与集合 B 的直积或笛卡儿乘积，记为 $A\times B$，即

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A, y\in B\}.$$

例如 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}\}$ 表示整个坐标平面，记为 $\mathbf{R}^2$，即 $\mathbf{R}^2=\mathbf{R}\times\mathbf{R}$.

1.1.3　区间与邻域

在高等数学里，区间是用得较多的一类数集，设 a,b 是实数，且 $a<b$，数集

$$\{x\mid a<x<b\}$$

称为开区间，记作 (a,b)，即

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\},$$

a 称为开区间 (a,b) 的左端点，b 称为开区间 (a,b) 的右端点，这里 $a\notin(a,b)$，$b\notin(a,b)$.

类似地，称数集

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$$

为闭区间，a,b 也分别称为闭区间 $[a,b]$ 的左、右端点，这里 $a\in[a,b]$，$b\in[a,b]$.

称数集

$$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$$

和

$$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$$

为半开区间.

以上这些区间都称为有限区间，数 $b-a$ 称为区间的长度. 从数轴上看，这些有限区间是长度为有限的线段. 闭区间 $[a,b]$ 与开区间 (a,b) 在数轴上表示出来，分别如图 1-2(a)与(b)所示. 此外还有无限区间. 引进记号 $+\infty$(读作正无穷大)及 $-\infty$(读作负无穷大)，则可类似地表示无限区间：

$$[a,+\infty)=\{x\mid a\leqslant x<+\infty\},$$

$$(-\infty,b)=\{x\mid -\infty<x<b\}.$$

这两个无限区间在数轴上如图 1-2(c)与(d)所示.

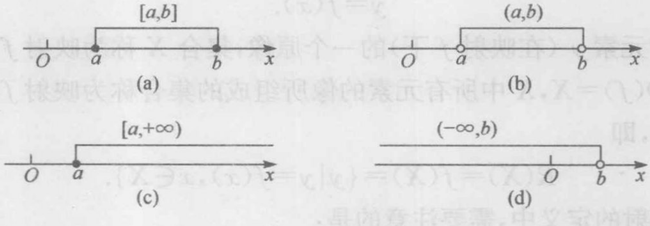

图 1-2

全体实数的集合 **R** 也可记作$(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$,它也是无限区间. 以后在不需要辨明所论区间是否包含端点,以及是有限区间还是无限区间的情形,我们就简单地称它为“区间”,且常用 I 表示.

邻域也是常用的一类数集. 以点 x_0 为中心的任何开区间称为点 x_0 的邻域,记作 $U(x_0)$. 设 δ 是某一正数,则开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$就是点 x_0 的一个邻域,这个邻域称为点 x_0 的 δ 邻域,记作 $U(x_0,\delta)$,即

$$U(x_0,\delta)=\{x\mid x_0-\delta<x<x_0+\delta\},$$

点 x_0 称为这邻域的中心,δ 称为这邻域的半径(图 1-3).

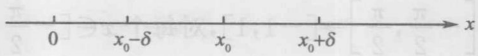

图 1-3

由于 $x_0-\delta<x<x_0+\delta$ 等价于 $|x-x_0|<\delta$,因此

$$U(x_0,\delta)=\{x\mid |x-x_0|<\delta\}.$$

因 $|x-x_0|$ 表示点 x 与点 x_0 间的距离,所以 $U(x_0,\delta)$ 表示与点 x_0 的距离小于 δ 的一切点 x 的全体.

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉. 点 x_0 的 δ 邻域去掉中心 x_0 后,称为点 x_0 的去心 δ 邻域,记作 $U(\bar{x}_0,\delta)$,即

$$U(\bar{x}_0,\delta)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}.$$

这里 $0<|x-x_0|$ 表示 $x\neq x_0$. 为了方便,有时把开区间$(x_0-\delta,x_0)$称为 x_0 的左 δ 邻域,把开区间$(x_0,x_0+\delta)$称为 x_0 的右 δ 邻域.

1.1.4 映射

定义 1.1.1 设 X,Y 是两个非空集合,如果存在一个法则 f,使得对 X 中每个元素 x,按法则 f,在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应,则称 f 为从 X 到 Y 的映射,记作

$$f: X \to Y \quad 或 \quad f: x \mapsto y, x \in X,$$

其中 y 称为元素 x(在映射 f 下)的像,并记作 $f(x)$,即

$$y = f(x).$$

而元素 x 称为元素 y（在映射 f 下)的一个原像,集合 X 称为映射 f 的定义域,记作 $D(f)$,即 $D(f)=X$,X 中所有元素的像所组成的集合称为映射 f 的值域,记作 $R(f)$或 $f(X)$,即

$$R(X) = f(X) = \{y \mid y = f(x), x \in X\}.$$

从上述映射的定义中,需要注意的是:

(1) 构成一个映射必须具备以下三个要素:集合 X,即定义域 $D(f)$,定义域表示映射存在的范围. 集合 Y,即值域的范围:$R(f) \subseteq Y$. 对应法则 f,使对每个 $x \in X$,有唯一确定的 $y=f(x)$与之对应,对应法则是映射的具体表现.

(2) 对每个 $x \in X$,元素 x 的像 y 是唯一的;而对每个 $y \in f(X)$,元素 y 的原像不一定是唯一的;映射 f 的值域 $R(f)$是集合 Y 的一个子集,即 $R(f) \subseteq Y$,不一定 $R(f)=Y$.

例 1.1.1　设 X 表示中南大学一年级新生所构成的集合,用一种方法给每一个新生编一个学号,用 Y 表示所有这些学号的集合,f 表示编号方法,于是 f 就是从 X 到 Y 的一个映射,即 $f: X \to Y$.

例 1.1.2　设 $f: \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$,对每个 $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$,$f(x)=\sin x$,则 f 是一个映射,其定义域 $D(f)=\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$,值域 $R(f)=[-1,1]$.

例 1.1.3　设 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,对每个 $x \in \mathbf{R}$,$f(x)=x^2$,显然,f 是一个映射,f 的定义域 $D(f)=\mathbf{R}$,值域 $R(f)=\{y \mid y \geqslant 0\}$,它是 $\mathbf{R}$ 的一个真子集,对于 $R(f)=\{y \mid y \geqslant 0\}$中的元素 y,除 $y=0$ 外,它的原像不是唯一的,如 $y=9$ 的原像就有 $x=3$ 和 $x=-3$ 两个.

例 1.1.4　设 $X=\{(x,y) \mid x^2+y^2=1\}$,$Y=\{(x,0) \mid |x| \leqslant 1\}$,$f: X \to Y$,对每个$(x,y) \in X$,有唯一确定的$(x,0) \in Y$ 与之对应,显然,f 是一个映射,f 的定义域 $D(f)=X$,值域 $R(f)=Y$. 在几何上,这个映射表示将平面上一个圆心在原点的单位圆周上的点投影到 x 轴的区间$[-1,1]$上.

例 1.1.5　设 $X=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$,$Y=\{2,4,\cdots,2n,\cdots\}$,若

$$f: n \mapsto 2n \quad (n=1,2,\cdots),$$

则 f 是从 X 到 Y 的一个映射.

设 f 是从集合 X 到集合 Y 的一个映射,若 $R(f)=Y$,即 Y 中任一元素 y 都是 X 中某元素的像,则称 f 为 X 到 Y 上的**满射**;若对 X 中任意两个不同元素 $x_1 \neq$

x_2，它们的像 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f 为 X 到 Y 上的**单射**；若映射 f 既是单射，又是满射，则称 f 为**一一映射**（**或双射**）；若 X 与 Y 之间存在一一映射，则称 X 与 Y 是一一对应的.

易知，上面例 1.1.1 与例 1.1.2 中的映射，既是单射，又是满射，因此是一一映射；例 1.1.3 中的映射既非单射，又非满射；例 1.1.4 中的映射只是满射，但不是单射，从而不是一一映射；例 1.1.5 中的 Y 是 X 的真子集，但 X 与 Y 是一一对应的，这是无限集的一种特性.

凡与正整数集 $\mathbf{N}^+=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$ 一一对应的集合，均称为**可数集**（**或可列集**），一个无限集，如果不是可数集，则称为不可数集. 显然集合 X 可数的充分必要条件是：X 中的所有元素可以排成一无穷序列

$$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots.$$

映射又称为算子. 根据集合 X 与 Y 的不同情形，在不同的数学分支中，映射又有不同的惯用名称. 例如，从非空集 X 到数集 Y 的映射又称为 X 上的**泛函**. 从非空集 X 到它自身的映射又称为 X 上的**变换**. 从实数集（或其子集）X 到实数集 Y 的映射通常称为定义在 X 上的函数. 因此下一节将要讨论的函数就是一种特殊的映射.

下面介绍逆映射与复合映射的概念.

定义 1.1.2 设 f 是 X 到 Y 上的单射，则对每个 $y\in R(f)$，有唯一的 $x\in X$，适合 $f(x)=y$，于是，我们可定义一个从 $R(f)$ 到 X 的新映射 g，即

$$g:R(f)\to X,$$

对每个 $y\in R(f)$，规定 $g(y)=x$，这里的 x 满足 $f(x)=y$. 这个映射 g 称为 f 的逆映射，记作 f^{-1}，其定义域 $D(f^{-1})=R(f)$，值域 $R(f^{-1})=X$.

按上述定义，只有单射才存在逆映射，所以上述例 1.1.1 至例 1.1.5 中，只有例 1.1.1，例 1.1.2 和例 1.1.5 中的映射 f 才存在逆映射 f^{-1}，比如例 1.1.2 中的逆映射 f^{-1} 就是反正弦函数的主值

$$f^{-1}(x)=\arcsin x,\quad x\in[-1,1],$$

其定义域 $D(f^{-1})=[-1,1]$，值域 $R(f^{-1})=\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

定义 1.1.3 设有两个映射

$$g:X\to Y_1,\quad f:Y_2\to Z,$$

其中 $Y_1\subseteq Y_2$，则由映射 g 和 f 可以定出一个从 X 到 Z 的对应法则，它将每个 $x\in X$ 映成 $f[g(x)]\in Z$. 显然，这个对应法则确定了一个从 X 到 Z 的映射，这个映射称为映射 g 和 f 构成的复合映射，记作 $f\circ g$，即

$$f\circ g:X\to Z,$$

$$(f\circ g)(x)=f[g(x)],\quad x\in X.$$

由复合映射的定义可知，映射 g 和 f 构成复合映射的条件是：g 的值域 $R(g)$ 必须包含在 f 的定义域内，即 $R(g)\subseteq D(f)$. 否则，不能构成复合映射. 由此可知，映射 g 和 f 的复合是有顺序的，$f\circ g$ 有意义并不表示 $g\circ f$ 也有意义. 即使 $f\circ g$ 与 $g\circ f$ 都有意义，复合映射 $f\circ g$ 与 $g\circ f$ 也未必相同.

例 1.1.6　设有映射 $g:\mathbf{R}\to[-1,1]$，对每个 $x\in\mathbf{R}$，$g(x)=\sin x$，映射 $g:[-1,1]\to[0,1]$，对每个 $u\in[-1,1]$，$f(u)=\sqrt{1-u^2}$. 求映射 g 和 f 构成的复合映射 $f\circ g$.

解　$f\circ g:\mathbf{R}\to[0,1]$，对每个 $x\in\mathbf{R}$，有

$$(f\circ g)(x)=f[g(x)]=f(\sin x)=\sqrt{1-\sin^2 x}=|\cos x|.$$

例 1.1.7　设有映射 $f:[1,+\infty)\to(-\infty,0]$，对每个 $x\in[1,+\infty)$，$f(x)=-\sqrt{x-1}$，求映射 f 的逆映射 f^{-1}.

解　$f^{-1}:(-\infty,0]\to[1,+\infty)$，由 $y=-\sqrt{x-1}\,(x\geqslant 1)$，得 $x=y^2+1\,(y\leqslant 0)$，故对每个 $x\in(-\infty,0]$，有

$$y=f^{-1}(x)=x^2+1\quad(x\leqslant 0).$$

习　题　1.1

1. 假定 $A=\{x\mid 0<x<1, x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2, x\in\mathbf{R}\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$，$B-A$.

2. 设 A 为平面上平行四边形的全体，B 为矩形的全体，求 $A\cup B$，$A\cap B$，$A-B$，$B-A$.

3. 证明：

(1) $A\cup(A\cap B)=A$；　　(2) $B\subset A^C$ 当且仅当 $A\cap B=\varnothing$；

(3) $A-B=A\cap B^C$；　　(4) $A=B$ 当且仅当 $A\cup B=A\cap B$.

4. 判断下列命题是否成立：

(1)若 $A\cup B=A\cup C$，则 $B=C$；

(2)若 $A\cap B=A\cap C$，则 $B=C$；

(3) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$；

(4) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$.

5. 在一个班级的 50 名学生中，有 21 名在高等数学的考试中取得优秀成绩，有 26 名学生在线性代数的考试中取得优秀成绩，假如有 17 名学生两科考试中都没有取得优秀成绩，试问有多少名学生在两科考试中都取得优秀成绩？

6. 设集合 $A=\{x\mid x^2-ax+a^2-19=0\}$，$B=\{x\mid x^2-5x+6=0\}$，$C=\{x\mid x^2+2x-8=0\}$，若 $A\cap B\neq\varnothing$，$A\cap C=\varnothing$，求 a 的值.

7. 设映射 $f:X\to Y$，$A\subseteq X$，$B\subseteq X$，证明：

(1) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$；

(2) $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$.

8. 设 f 和 g 都是 $\mathbf{R}$ 到自身的映射：