Yan Yuan
燕园教育

2014 考研专家指导丛书

考研数学最后冲刺超越135分（数学三）

清华大学 王欢
北京大学 王德军
首都师范大学 童武
主编

由多次参加**命题及阅卷的专家**亲自编写，内容系统、权威

严格按照最新考试大纲，突出重点

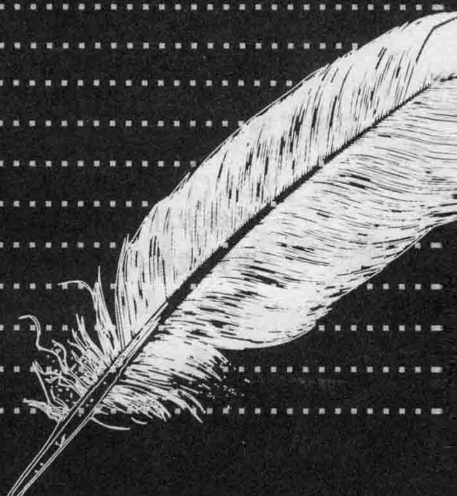
赠送MP3盘 考研名师童武教授 考研数学串讲视频+辅导讲义

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教·育·出·版·中·心

Yan Yuan
燕园教育

2014 考研专家指导丛书

考研数学最后冲刺超越135分（数学三）



清华大学 王欢
北京大学 王德军
首都师范大学 童武
主编

由多次参加命题及阅卷的专家亲自编写，内容系统、权威
严格按照最新考试大纲，突出重点

赠送MP3盘 考研名师童武教授
考研数学串讲视频+辅导讲义

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教·育·出·版·中·心

图书在版编目(CIP)数据

考研数学最后冲刺超越 135 分. 数学三 / 王欢主编.
—北京 : 中国石化出版社, 2013. 3
ISBN 978-7-5114-2012-1

Ⅰ. ①考… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①高等数学 - 研究生 - 入学考试 - 题解 Ⅳ. ①013 - 44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 044480 号

中国石化出版社出版发行
地址:北京市东城区安定门外大街 58 号
邮编:100011 电话:(010)84271850
读者服务部电话:(010)84289974
http://www.sinopec-press.com
E-mail:press@sinopec.com
北京科信印刷有限公司印刷
全国各地新华书店经销
*
787×1092 毫米 16 开本 5.5 印张 133 千字
2013 年 3 月第 1 版 2013 年 3 月第 1 次印刷
定价:18.00 元(赠送 MP3 盘)

前　　言

中国加入WTO之后，改革开放逐步深化，经济发展速度日益加快，社会对科学技术、文化教育的需求不断向高层次迈进，我国对硕士研究生等高层次人才的需求越来越大，这方面的教育也在稳步发展，规模不断扩大、层次逐步齐全、教学质量不断提高、测试更加规范化，考生人数也在迅猛增加。

从测量学角度来说，全国硕士研究生入学统一考试应是“常模参照”考试，即选拔性考试。命题工作需坚持既有利于为国家选拔高层次的专门人才，又有利于高等学校教学的原则，强调在考查知识的基础上，重点考查考生分析问题和解决问题的能力，并且要采用科学的办法，保持考试水平的稳定性。

为了更好地帮助考生复习，顺利通过数学考试、赢取高分，我们根据国家教育部制订的《考试大纲》，基于多年参加阅卷和考研辅导班的教学实践经验，以及分析了近几年考题中的考点、难点、重点及命题套路，倾力推出这套考研专家指导丛书。本套丛书包括《考研数学历届真题权威解析(数学一)》、《考研数学历届真题权威解析(数学二)》、《考研数学历届真题权威解析(数学三)》、《考研数学历届真题考点与题型分类精解(数学一)》、《考研数学历届真题考点与题型分类精解(数学二)》、《考研数学历届真题考点与题型分类精解(数学三)》、《考研数学标准模拟试卷与精解(数学一)》、《考研数学标准模拟试卷与精解(数学二)》、《考研数学标准模拟试卷与精解(数学三)》、《考研数学最后冲刺超越135分(数学一)》、《考研数学最后冲刺超越135分(数学二)》、《考研数学最后冲刺超越135分(数学三)》、《考研数学名师名家高分复习全书(理工类)》、《考研数学名师名家高分复习全书(经济类)》、《考研数学名师名家高等数学辅导讲义》、《考研数学名师名家线性代数辅导讲义》、《考研数学名师名家概率论与数理统计辅导讲义》、《考研数学最新精选1000题(理工类)》、《考研数学最新精选1000题(经济类)》、《考研数学必做客观题1800题精析(理工

类)》、《考研数学必做客观题1800题精析(经济类)》、《考研数学必做主观题600题精析(理工类)》和《考研数学必做主观题600题精析(经济类)》。

本套书的编写特点如下:

1. 配合最新考试大纲，反映最新变化

本书在严格遵循最新考试精神和最新考试大纲要求的基础上，力求反映最新考试要求，紧扣全国硕士研究生入学数学考试的脉搏。

2. 注重考试技巧、高效突破难关

本书精辟阐明解题思路，全面展现题型变化，为考生全程领航和理性分析，引领考生高效通过考试难关。考生可以利用本套冲刺试卷进行考前模拟实战训练，检验自己的学习成果，及时进行查漏补缺，有针对性地进行复习备考。希望考生能在仿真的环境下进行模拟训练，这样效果最佳。

3. 教授亲自主笔，编写阵容强大

本书由一线专家和教授亲自编著。编者多年来一直从事考研数学的考前辅导工作，积累了丰富的教学辅导经验，对历年考试情况比较了解，对考生在复习和考试过程中可能遇到的问题把握得比较准确。

尽管在编写过程中经历了严格的编审程序，力求达到完美，但限于时间和水平，仍可能存在不足，纰漏之处希望广大考生和专家批评、指正。

编　者

目　录

最后冲刺试卷一

一、选择题：1 ~ 8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内。

1. 若函数 $y=f(x)$ 有 $f'(x_0)=\dfrac{1}{2}$，则当 $\Delta x \to 0$ 时，该函数在 $x=x_0$ 点外的微分 $\mathrm{d}y$ 是(　　)。

(A) 与 Δx 等价的无穷小　　(B) 与 Δx 同阶的无穷小

(C) 比 Δx 低阶的无穷小　　(D) 比 Δx 高阶的无穷小

2. 设 $I_1=\int \dfrac{1+x}{x(1+xe^x)}\mathrm{d}x$，$I_2=\int \dfrac{\mathrm{d}u}{u(1+u)}$，则存在函数 $u=u(x)$，使(D)。

(A) $I_1=I_2+x$　　(B) $I_1=I_2-x$

(C) $I_2=-I_1$　　(D) $I_2=I_1$

3. 若 $\lim\limits_{x\to\infty} b_n=+\infty$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)$(C)。

(A) 发散　　(B) 收敛于 0

(C) 收敛于 $\dfrac{1}{b_1}$　　(D) 其敛散性不确定

4. 设 $k=\iint\limits_D (x^2+f(xy))\mathrm{d}\sigma$，其中 f 为连续的奇函数，D 是由 $y=-x^3$，$x=1$，$y=1$ 所围成的平面闭域. 则 k 等于(　　)。

(A) 0　　(B) $\dfrac{2}{3}$　　(C) $-\dfrac{2}{3}$　　(D) 2

5. $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{0}$，则(C)。

(A) $\boldsymbol{A}$ 不可逆，$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 也不可逆　　(B) $\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 也可逆

(C) $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 均可逆　　(D) $\boldsymbol{A}$ 不可逆，且 $\boldsymbol{A}^2$ 必为 $\boldsymbol{0}$

6. 已知 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$ 且有关系 $b_{ij}=a_{ij}+\sum\limits_{k=1}^{n}a_{kj}b_{ik}(i, j=1, 2, \cdots, n)$，则下列关系式正确的是(B)。

(A) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E})=\boldsymbol{B}$　(B) $(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$　(C) $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}$　(D) $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$

7. 设 X 服从正态分布 $N(0, 2^2)$，而 $X_1, X_2, \cdots, X_{15}$ 为来自总体 X 的简单随机样本，则随机变量 $Y=\dfrac{X_1^2+\cdots X_{10}^2}{2(X_{11}^2+\cdots X_{15}^2)}$ 所服从的分布为(　　)。

(A) $\chi^2(15)$　　(B) $t(14)$　　(C) $F(10, 5)$　　(D) $F(1, 1)$

8. 设 X_1 和 X_2 是任意两个相互独立的连续型随机变量，它们的概率密度分别为 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$，分布函数分别为 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$，则(D)。

(A) $f_1(x)+f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度

(B) $f_1(x)f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度

（C）$F_1(x)+F_2(x)$必为某一随机变量的分布函数

（D）$F_1(x)F_2(x)$必为某一随机变量的分布函数

二、填空题：9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上。

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n n!}{n^n}=$ __0__。

10. 某公司每年的工资总额在比上一年增加 20% 的基础上再追加 200 万元，若以 W_t 表示第 t 年的工资总额（单位百万元），W_t 满足的差分方程为 __$W_t-1.2W_{t-1}=2$__。

11. $\displaystyle\int\frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=$ __$-\cot x\cdot\ln\sin x-\cot x-x+C$__。

12. 函数 $F(x)=\displaystyle\int_1^x\left(2-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t\ (x>0)$ 的单调减少区间 __$(0,\frac{1}{4})$__。

13. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$是正交矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 以行分块为 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n)^T$，则方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}=(b_1,\ \cdots,\ b_n)^T$的通解为________。

14. 设随机变量 X 的数学期望 $E(X)=\mu$，方差 $D(X)=\sigma^2$，则由切比雪夫（Chebyshev）不等式，有 $P\{|X-\mu|\geqslant 3\sigma\}\leqslant$________。

三、解答题：15 ~ 23 小题，共 94 分。请将解答写在答题纸指定的位置上，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. （本题满分 10 分）

设 $z=f(2x-y,\ y\sin x)$，其中 $f(u,\ v)$具有连续的二阶偏导数，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

16. （本题满分 10 分）

已知曲线 L 的方程为$\begin{cases}x=t^2+1,\\ y=4t-t^2\end{cases}\quad(t\geqslant 0)$

（Ⅰ）讨论 L 的凹凸性；

（Ⅱ）过点$(-1,\ 0)$引 L 的切线，求切点$(x_0,\ y_0)$，并写出切线的方程；

（Ⅲ）求此切线与 L（对应于 $x\leqslant x_0$的部分）及 x 轴所围成的平面图形的面积。

17. （本题满分 10 分）

设 a，b 为正常系数，λ 为非负常数，微分方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+ay=b\mathrm{e}^{-\lambda x}$。

（Ⅰ）求该方程的通解；

（Ⅱ）证明：当 $\lambda=0$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=\dfrac{b}{a}$，当 $\lambda>0$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=0$。

18. （本题满分 10 分）

设函数$f(x)$在$[0,\ +\infty]$上连续，且$f(0)>0$，已知其在$[0,\ x]$上的平均值等于$f(0)$与$f(x)$的几何平均值，求$f(x)$。

19. （本题满分 10 分）

求微分方程 $y''+5y'+6y=2\mathrm{e}^{-x}$的通解。

20. （本题满分 11 分）

已知 4 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_4)$，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 均为 4 维列向量，其$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$

线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，如果$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，求线性方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$的通解。

21.（本题满分 11 分）

设$\boldsymbol{A}$是n阶正定矩阵，$\boldsymbol{E}$是n阶单位阵，证明$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$的行列式大于 1。

22.（本题满分 11 分）

设总体X的分布函数为$F(x)$，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是取自此总体的一个子样，若$F(x)$的二阶矩阵存在，$\overline{X}$为子样均值，试证$(X_i-\overline{X})$与$(X_j-\overline{X})$的相关系数

$$\rho=-\frac{1}{n-1},\ i\neq j,\ i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n。$$

23.（本题满分 11 分）

设总体X服从于正态分布$N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$，从该总体中抽取简单随机样本$X_1$，$X_2$，$\cdots,X_{2n}(n\geqslant 2)$，其样本均值为$\overline{X}=\dfrac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^{2n}X_i$，求统计量$Y=\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\overline{X})^2$的数学期望$E(Y)$。

最后冲刺试卷一参考答案与解析

一、选择题

1.【考点提示】等价无穷小

【解题分析】由导数与微分的关系$\dfrac{dy}{dx}=f'(x_0)=\dfrac{1}{2}\to\dfrac{1}{2}$（当$\Delta x=dx\to 0$），$dy$是与$\Delta x$同阶且不等价的无穷小，应选(B)。

2.【考点提示】不定积分的计算

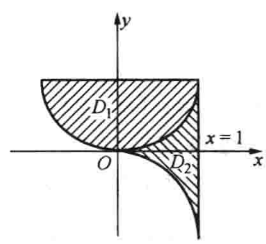
【解题分析】$\displaystyle\int\frac{1+x}{x(1+xe^x)}dx=\int\frac{(1+x)e^x}{x(1+xe^x)\cdot e^x}dx$，设$u=xe^x$，则上式$=\displaystyle\int\frac{du}{u(1+u)}$。应选(D)。

3.【考点提示】级数敛散性的判定

【解题分析】$S_n=\dfrac{1}{b_1}-\dfrac{1}{b_2}+\dfrac{1}{b_2}-\dfrac{1}{b_3}+\cdots+\dfrac{1}{b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}=\dfrac{1}{b_1}-\dfrac{1}{b_{n+1}}$

故$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{b_1}-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{b_{n+1}}=\dfrac{1}{b_1}-0=\dfrac{1}{b_1}$。应选(C)。

4.【考点提示】二重积分



【解题分析】如图：加一条曲线$y=x^3$，将D分为D_1和D_2，

则$\displaystyle\iint_D[x^2+f(xy)]dxdy=\iint_D x^2dxdy+\iint_D f(xy)dxdy$

而$\displaystyle\iint_D f(xy)dxdy=\iint_{D_1}f(xy)dxdy+\iint_{D_2}f(xy)dxdy$

因为f为奇函数，所以$f(-xy)=-f(xy)$，

而D_1，D_2分别对称y轴和x轴，故有$\displaystyle\iint_{D_1}f(xy)dxdy=0,\iint_{D_2}f(xy)dxdy=0$，

从而原积分$\displaystyle\iint_D[x^2+f(xy)]dxdy=\iint_D x^2dxdy=\int_{-1}^{1}x^2dx\int_{-x^3}^{1}dy=\frac{2}{3}$。(B)为正确答案。

5.【考点提示】矩阵的可逆性

【解题分析】由行列式性质 $|A^3| = |A|^3 = 0$，可知 A 必不可逆，

但从 $(E-A)(E+A+A^2)=E-A^3=E$，$(E+A)(E-A+A^2)=E+A^3=E$，知 $E-A$，$E+A$，$E+A+A^2$，$E-A+A^2$ 均可逆。

当 $A^3=\mathbf{0}$ 时，A^2 是否为 $\mathbf{0}$ 是不能确定的，

例如：$A_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，$A_2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，有 $A_1^3=\mathbf{0}$，但 $A_1^2\neq\mathbf{0}$，$A_2^3=\mathbf{0}$，且 $A_2^2=\mathbf{0}$，

故选(C)。

6.【考点提示】矩阵的乘法

【解题分析】由关系 $b_{ij}=a_{ij}+\sum\limits_{k=1}^{n}a_{kj}b_{ik}=a_{ij}+\sum\limits_{k=1}^{n}b_{ik}a_{kj}\ (i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，

得 $B=A+BA$，从而得 $B=(E+B)A$。即选(B)。

7.【考点提示】χ^2 分布

【解题分析】$\dfrac{X_1^2+\cdots X_{10}^2}{4}\sim\chi^2(10)$，$\dfrac{X_{11}^2+\cdots X_{15}^2}{4}\sim\chi^2(5)$

所以 $\dfrac{\dfrac{X_1^2+\cdots+X_{10}^2}{40}}{\dfrac{X_{11}^2+\cdots+X_{15}^2}{20}}\sim F(10,\ 5)$，即 $Y=\dfrac{X_1^2+\cdots X_{10}^2}{2(X_{11}^2+\cdots X_{15}^2)}\sim F(10,\ 5)$，(C)是答案。

8.【考点提示】随机变量的概率密度函数

【解题分析】首先可否定选项(A)与(C)，因

$\int_{-\infty}^{+\infty}[f_1(x)+f_2(x)]\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(x)\mathrm{d}x=2\neq1$，

$F_1(+\infty)+F_2(+\infty)=1+1=2\neq1$。

对于选项(B)，若 $f_1(x)=\begin{cases}1 & -2<x<-1\\0 & \text{其他}\end{cases}$，$f_2(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\0 & \text{其他}\end{cases}$，则对任何

$x\in(-\infty,\ +\infty)$，$f_1(x)f_2(x)\equiv0$，$\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)f_2(x)\mathrm{d}x=0\neq1$，因此也应否定(C)，综上分析，用排除法应选(D)。

进一步分析可知，若令 $X=\max(X_1,\ X_2)$，而 $X_i\sim f_i(x)$，$i=1,\ 2$，则 X 的分布函数 $F(x)$ 恰是 $F_1(x)F_2(x)$。

$F(x)=P\{\max(X_1,\ X_2)\leqslant x\}=P\{X_1\leqslant x,\ X_2\leqslant x\}=P\{X_1\leqslant x\}P\{X_2\leqslant x\}=F_1(x)F_2(x)$

二、填空题

9.【考点提示】根据级数的敛散性来求极限

【解题分析】由级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n n!}{n^n}$ 收敛知，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n n!}{n^n}=0$，

因为级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n n!}{n^n}$ 收敛，因此其通项趋于0。

10.【考点提示】差分方程

【解题分析】由题设，第 $t-1$ 年的工资总额为：W_{t-1}，则 $W_t=1.2W_{t-1}+2$。

11.【考点提示】不定积分

【解题分析】原式 $=-\int \ln(\sin x)\mathrm{d}(\cot x)=-\cot x\ln(\sin x)+\int \cot x\mathrm{d}[\ln(\sin x)]$

$$=-\cot x\ln(\sin x)+\int \cot x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x=-\cot x\ln(\sin x)+\int \cot^2 x\mathrm{d}x$$

$$=-\cot x\ln(\sin x)+\int(\csc^2 x-1)\mathrm{d}x=-\cot x\ln(\sin x)-\cot x-x+C。$$

12.【考点提示】导数的应用

【解题分析】$F'(x)=2-\frac{1}{\sqrt{x}}<0$，所以 $0<x<\frac{1}{4}$。即单调区间为 $\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$。

13.【考点提示】方程组的通解

【解题分析】因 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵，故 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^T$，而方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解为：

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{\alpha}_1^T\quad \boldsymbol{\alpha}_2^T\quad \cdots\quad \boldsymbol{\alpha}_n^T)\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n} b_i\boldsymbol{\alpha}_i^T。$$

14.【考点提示】切比雪夫不等式

【解题分析】依切比雪夫不等式 $P\{|X-EX|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{DX}{\varepsilon^2}$，有 $P\{|X-\mu|\geqslant 3\sigma\}\leqslant\frac{\sigma^2}{(3\sigma)^2}=\frac{1}{9}$。

三、解答题

15.【考点提示】复合函数的偏导数

【解题分析】这是求带抽象函数记号的复合函数的二阶混合偏导数，先求 $\frac{\partial z}{\partial x}$。

由复合函数求导法得 $\frac{\partial z}{\partial x}=f'_1\frac{\partial}{\partial x}(2x-y)+f'_2\frac{\partial}{\partial x}(y\sin x)=2f'_1+y\cos xf'_2$，

则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(2f'_1+y\cos xf'_2)$

$$=2\left(f''_{11}\frac{\partial}{\partial y}(2x-y)+f''_{12}\frac{\partial}{\partial y}(y\sin x)\right)+\cos xf'_2+\left(f''_{21}\frac{\partial}{\partial y}(2x-y)+f''_{22}\frac{\partial}{\partial y}(y\sin x)\right)y\cos x$$

$$=2(-f''_{11}+\sin xf''_{12})+\cos xf'_2+(-f''_{21}+\sin xf''_{22})y\cos x$$

$$=-2f''_{11}+(2\sin x-y\cos x)f''_{12}+y\sin x\cos xf''_{22}+\cos xf'_2。$$

16.【考点提示】切线方程、平面图形的面积

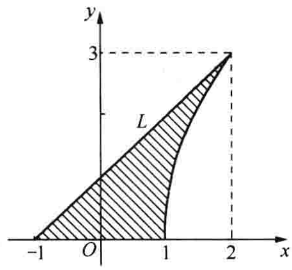
【解题分析】（Ⅰ）先求 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$. 由已知 $x=t^2+1\Rightarrow t=\sqrt{x-1}(x\geqslant 1)$，

代入 y 得 $y=4\sqrt{x-1}-x+1$，于是 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2}{\sqrt{x-1}}-1$，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-(x-1)^{-\frac{3}{2}}<0(x>1)$，

所以曲线 L 是凸的。

（Ⅱ）设 L 上切点 $(x_0,\ y_0)$ 处的切线方程是 $y-y_0=\left(\frac{2}{\sqrt{x_0-1}}-1\right)(x-x_0)$。

令 $x=-1$，$y=0$，则有 $-4\sqrt{x_0-1}+x_0-1=\left(\frac{2}{\sqrt{x_0-1}}-1\right)(-1-x_0)$。



再令 $t_0=\sqrt{x_0-1}$，得 $-4t_0+t_0^2=\left(\frac{2}{t_0}-1\right)(-2-t_0^2)$，

即 $t_0^2+t_0-2=0$。

解得 $t_0=1$，$t_0=-2$(不合题意)，所以切点是(2，3)，相应的切线方程是

$$y=3+(x-2)，即 y=x+1。$$

(Ⅲ) 切点为(x_0,y_0)的切线与 L 及 x 轴所围成的平面图形如右图所示，则所求平面图形的面积为

$$S=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3-\int_1^2 y(x)\,dx=\frac{9}{2}-\int_0^1(4t-t^2)\cdot 2t\,dt=\frac{9}{2}-\left(\frac{8}{3}-\frac{2}{4}\right)=\frac{7}{3}。$$

17. 【考点提示】微分方程的通解

【解题分析】(Ⅰ) 通解为 $y=e^{-\int a dx}\left(\int be^{-\lambda x}e^{\int a dx}dx+c\right)=e^{-ax}\left(b\int e^{(a-\lambda)x}dx+c\right)$

$$=\begin{cases} ce^{-ax}+\dfrac{b}{a-\lambda}e^{-\lambda x} & \lambda\neq a \\ (bx+c)e^{-ax} & \lambda=a。\end{cases}$$

(Ⅱ) 当 $\lambda=0$ 时，$y=ce^{-ax}+\frac{b}{a}$，所以，$\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(ce^{-ax}+\frac{b}{a}\right)=\frac{b}{a}$。

当 $x>0$ 且 $\lambda\neq a$ 时，$y(x)=ce^{-ax}+\frac{b}{a-\lambda}e^{-\lambda x}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(ce^{-ax}+\frac{b}{a-\lambda}e^{-\lambda x}\right)=0$，

当 $x>0$ 且 $\lambda=a$ 时，$y(x)=(bx+c)e^{-ax}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(bx+c)e^{-ax}=0$。

综上有，当 $\lambda>0$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=0$。

18. 【考点提示】平均值的相关计算

【解题分析】由题意得 $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt=\sqrt{f(0)f(x)}$，令 $a=\sqrt{f(0)}$，

有 $\int_0^x f(t)\,dt=ax\sqrt{f(x)}$，两边求导，得 $f(x)=a\sqrt{f(x)}+ax\cdot\frac{1}{2}\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$，

即 $f'(x)+\frac{2}{x}f(x)=\frac{2}{ax}[f(x)]^{\frac{3}{2}}$。令 $z=[f(x)]^{-\frac{1}{2}}$，得 $\frac{dz}{dx}-\frac{1}{x}z=-\frac{1}{ax}$，

可求得 $z=Cx+\frac{1}{a}$，即 $f(x)=\left(Cx+\frac{1}{a}\right)^{-2}=\frac{f(0)}{(1+C\sqrt{f(0)}x)^2}(x\geqslant 0)$。

19. 【考点提示】微分方程的通解

【解题分析】所给微分方程的特征方程为 $\lambda^2+5\lambda+6=(\lambda+2)(\lambda+3)=0$，
故特征根为 -2 和 -3。于是，对应齐次微分方程的通解为 $\bar{y}(x)=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}$，其中 C_1，C_2 为任意常数。设所给非齐次方程的特解为 $y^*(x)=Ae^{-x}$，将 $y^*(x)$代入原方程，可得 $A=1$，由此得所给非齐次微分方程的一个特解是 $y^*(x)=e^{-x}$。
从而，所给微分方程的通解为 $y(x)=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}+e^{-x}$。

20. 【考点提示】线性方程组的通解

【解题分析】由 $\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关及 $\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$ 知，向量组的秩 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=3$，即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为3，因此 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中只包含一个向量，那么由

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_4)\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$$

知，$A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系是$(1,\ -2,\ 1,\ 0)^T$。

再由 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_4)\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$ 知，$(1,\ 1,\ 1,\ 1)^T$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的一个特解。

故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解是 $k\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$，其中 k 为任意常数。

21. **【考点提示】**正定矩阵的相关计算

【解题分析】因为 $\boldsymbol{A}$ 是正定阵，故存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使

$$\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix},$$

其中 $\lambda_i>0(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，$\lambda_i$ 是 A 的特征值。

因此 $\boldsymbol{Q}^T(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q}=\Lambda+\boldsymbol{E}$，

两端取行列式得 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{Q}^T||\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}||\boldsymbol{Q}|=|\boldsymbol{Q}^T(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{Q}|=|\Lambda+\boldsymbol{E}|=\Pi(\lambda_i+1)$。

从而 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|>1$。

22. **【考点提示】**分布函数的计算

【解题分析】由于二阶矩阵存在，不妨设 $E(\overline{X})=\mu$，$D(\overline{X})=\sigma^2$，

$$\rho=\frac{\operatorname{cov}(X_i-\overline{X},\ X_j-\overline{X})}{D(X_i-\overline{X})}=\frac{E[(X_i-\overline{X})(X_j-\overline{X})]}{D(X_i-\overline{X})},\quad i\neq j$$

$$D(X_i-\overline{X})=D\left(X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{(n-1)^2}{n^2}D(X_i)+\frac{1}{n^2}\sum_{j\neq i}D(X_i)$$

$$=\frac{(n-1)^2+n-1}{n^2}\sigma^2=\frac{n-1}{n}\sigma^2,\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

$$E[(X_i-\overline{X})(X_j-\overline{X})]=E(X_iX_j)-E(X_i\overline{X})-E(X_j\overline{X})+E(\overline{X}^2),$$

$$=\mu^2-\frac{2}{n}E\left(X_i\sum_{j=1}^{n}X_j\right)+E(\overline{X}^2)-[E(\overline{X})]^2+[E(\overline{X})]^2,$$

$$=\mu^2-\frac{2}{n}E\left(X_i\sum_{j=1}^{n}X_j\right)+\mu^2+\frac{\sigma^2}{n}=2\mu^2+\frac{\sigma^2}{n}-\frac{2}{n}\Big[E(X_i^2)+\sum_{j\neq i}E(X_i)E(X_j)\Big]$$

$$=2\mu^2+\frac{\sigma^2}{n}-\frac{2}{n}[\mu^2+\sigma^2+(n-1)\mu^2]=-\frac{\sigma^2}{n}，因而\rho=\frac{-\frac{\sigma^2}{n}}{\frac{n-1}{n}\sigma^2}=-\frac{1}{n-1}。$$

23. **【考点提示】**随机样本的正态分布

【解题分析】设 $Z_i=X_i+X_{n+i}(i=1,2,\cdots,n)$，为从总体 Z 中取出的样本容量为 n 的样本。

则 $E(Z_i)=E(X_i)+E(X_{n+i})=\mu+\mu=2\mu$

$D(Z_i)=D(X_i+X_{n+i})=D(X_i)+D(X_{n+i})$($X_i$ 与 X_{n+i}相互独立)$=\sigma^2+\sigma^2=2\sigma^2$

$\therefore\quad Z\sim N(2\mu,2\sigma^2)$，

由样本与总体同分布，则 $\overline{Z}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}X_i=2\overline{X}$，样本方差为$\frac{1}{n-1}Y=S^2$

$\because\quad S^2$ 是总体 Z 的方差的无偏估计量

$\therefore\quad E(S^2)=E\left(\frac{1}{n-1}Y\right)=\frac{1}{n-1}E(Y)=2\sigma^2$

$\therefore\quad E(Y)=2(n-1)\sigma^2$。

最后冲刺试卷二

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内。

1. 已知函数 $f(x)$ 在区间 $(1-\delta,\ 1+\delta)$ 内具有二阶导数，$f''(x)<0$，且 $f(1)=f'(1)=1$，则(A)。
   (A) 在 $(1-\delta,\ 1)$ 和 $(1,\ 1+\delta)$ 内均有 $f(x)<x$
   (B) 在 $(1-\delta,\ 1)$ 和 $(1,\ 1+\delta)$ 内均有 $f(x)>x$
   (C) 在 $(1-\delta,\ 1)$ 内 $f(x)<x$，在 $(1,\ 1+\delta)$ 内 $f(x)>x$
   (D) 在 $(1-\delta,\ 1)$ 内 $f(x)>x$，在 $(1,\ 1+\delta)$ 内 $f(x)<x$

2. 已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数，且 $f'(x)=[f(x)]^2$，则当 n 为大于 2 的正整数时，$f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 为(　　)。
   (A) $n!\ [f(x)]^{n+1}$　　(B) $n\,[f(x)]^{n+1}$　　(C) $[f(x)]^{2n}$　　(D) $n!\ [f(x)]^{2n}$

3. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内有定义，$f(0)=1$，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+2x)-2xf(x)}{x^2}=0$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处(　　)。
   (A) 可导，且 $f'(0)=0$　　(B) 可导，且 $f'(0)=-1$
   (C) 可导，且 $f'(0)=2$　　(D) 不可导

4. 当 $x\to0$ 时，$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小，则(　　)。
   (A) $a=1,\ b=-\dfrac{1}{6}$　　(B) $a=1,\ b=\dfrac{1}{6}$
   (C) $a=-1,\ b=-\dfrac{1}{6}$　　(D) $a=-1,\ b=\dfrac{1}{6}$

5. 如果向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，则(　　)。
   (A) 存在一组不全为零的数 $k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_s$ 使 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$ 成立
   (B) 存在一组全为零的数 $k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_s$ 使 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$ 成立
   (C) 存在一组数 $k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_s$ 使 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$ 成立
   (D) 对 $\boldsymbol{\beta}$ 的线性表达式惟一

6. 设 $\lambda_1,\ \lambda_2$ 是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2$ 分别是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda_1,\ \lambda_2$ 的特征向量，则(D)。
   (A) $\lambda_1=\lambda_2$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 必成比例　　(B) $\lambda_1=\lambda_2$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 必不成比例
   (C) $\lambda_1\neq\lambda_2$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 必成比例　　(D) $\lambda_1\neq\lambda_2$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 必不成比例

7. 已知 $0<P(B)<1$，且 $P[(A_1+A_2)\mid B]=P(A_1\mid B)+P(A_2\mid B)$，则下列选项必然成立的是(B)。
   (A) $P[(A_1+A_2)\mid\overline{B}]=P(A_1\mid\overline{B})+P(A_2\mid\overline{B})$
   (B) $P(A_1B+A_2B)=P(A_1B)+P(A_2B)$

(C) $P(A_1+A_2)=P(A_1 \mid B)+P(A_2 \mid B)$

✓(D) $P(B)=P(A_1)P(B \mid A_1)+P(A_2)P(B \mid A_2)$

8. 设随机变量 X 与 Y 服从正态分布，$X\sim N(\mu,\ 4^2)$，$Y\sim N(\mu,\ 5^2)$，记 $p_1=P\{x\leqslant\mu-4\}$，$p_2=\{Y\geqslant\mu+5\}$，则(~~A~~)。

(A) 对任何实数 μ，都有 $p_1=p_2$　　✓(B) 对任何实数 μ，都有 $p_1<p_2$

(C) 只对 μ 的个别值，才有 $p_1=p_2$　　(D) 对任何实数 μ，都有 $p_1>p_2$

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上。

9. 设 $\begin{cases}x=1+t^2\\ y=\cos t\end{cases}$，则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=$ $\dfrac{-t\cdot\cos t+\sin t}{4t^3}$。

10. 由方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 所确定的函数 $z=z(x,\ y)$ 在点 $(1,\ 0,\ -1)$ 处的全微分 $dz=$ ________。

11. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{ax}=\int_{-\infty}^{a}te^t\,dt$，则 $a=$ ________。

12. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n-1)x^n$ 的和函数为________。

13. 设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\gamma}_1,\ \boldsymbol{\gamma}_2)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\gamma}_1,\ \boldsymbol{\gamma}_2)$，其中 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}_1$，$\boldsymbol{\gamma}_2$ 都是 3 维列向量，且 $|\boldsymbol{A}|=3$，$|\boldsymbol{B}|=4$，则 $|5\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}|=$ ________。

14. 已知随机变量 X 和 Y 相互独立，则 $X\sim N(1,\ 1)$，$Y\sim N(1,\ 4)$，又 $P\{aX+bY\leqslant 0\}=\dfrac{1}{2}$ 则 a 与 b 应满足关系式________。

三、解答题：15～23 小题，共 94 分。请将解答写在答题纸指定的位置上，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15.（本题满分 10 分）

求微分方程 $y''+2y'-3y=e^{-3x}$ 的通解。

16.（本题满分 10 分）

假设生产和销售某产品的收益 R 是产量的 q 二次函数。经统计得知：当产量 q 分别为 0，2，4 时，总收入 R 分别为 0，6，8 万元，试确定 R 与 q 之间的函数关系。

17.（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$，$g(x)$ 满足 $f'(x)=g(x)$，$g'(x)=2e^x-f(x)$，且 $f(0)=0$，$g(0)=2$，求 $\int_0^{\pi}\left[\dfrac{g(x)}{1+x}-\dfrac{f(x)}{(1+x)^2}\right]dx$。

18.（本题满分 10 分）

如果 $0<\beta<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，证明：$\dfrac{\alpha-\beta}{\cos^2\beta}<\tan\alpha-\tan\beta<\dfrac{\alpha-\beta}{\cos^2\alpha}$。

19.（本题满分 10 分）

设 $z=f(2x-y,\ y\sin x)$，其中 f 具有连续的二阶偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

20.（本题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，且 $\boldsymbol{A}_{11}\neq 0$，证明：方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$ 有无穷多解的充要条件中 $\boldsymbol{b}$ 为 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解。

21. (本题满分 11 分)

已知 $\lambda_1=6$，$\lambda_2=\lambda_3=3$ 是实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值，且对应于 $\lambda_2=\lambda_3=3$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_2=(-1, 0, 1)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1, -2, 1)^T$，求 $\boldsymbol{A}$ 对应于 $\lambda_1=6$ 的特征向量及矩阵 A。

22. (本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 在区域 D：$0<x<1$，$|y|=x$ 内服从均均分布，求关于 X 的边缘概率密度函数及随机变量 $Z=2X+1$ 的方差 $D(Z)$。

23. (本题满分 11 分)

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n(n>2)$ 为来自总体 $N(0, 1)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，

记 $Y_i=X_i-\overline{X}$，$i=1, 2, \cdots, n$，求：

(Ⅰ) Y_i 的方差 DY_i，$i=1, 2, \cdots, n$；

(Ⅱ) Y_1 与 Y_n 的协方差 $\mathrm{Cov}(Y_1, Y_n)$。

最后冲刺试卷二参考答案与解析

一、选择题

1. **【考点提示】**函数单调性、函数的极值

【解题分析】设 $\varphi(x)=f(x)-x$，则 $\varphi'(x)=f'(x)-1$，$\varphi''(x)=f''(x)$，

由 $f''(x)<0$ 得 $\varphi''(x)<0$，故 $\varphi'(x)$ 单调减少，

则当 $x<1$ 时，$\varphi'(x)>\varphi'(1)=f'(1)-1=0$，当 $x>1$ 时，$\varphi'(x)<\varphi'(1)=0$；

则 $\varphi(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值，

当 $x\in(1-\delta, 1)\cup(1, 1+\delta)$ 时 $\varphi(x)<\varphi(1)=f(1)-1=0$，即 $f(x)<x$，应选(A)。

2. **【考点提示】**函数的高阶导数

【解题分析】为方便记 $y=f(x)$，由 $y'=y^2$，逐次求导得

$y''=2yy'=2y^3$，$y'''=3!\,y^2y'=3!\,y^4$，…，归纳可证 $y^{(n)}=n!\,y^{n+1}$，应选(A)。

3. **【考点提示】**函数的极限

【解题分析】
$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)-2xf(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)-2x-2x[f(x)-f(0)]}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{\ln(1+2x)-2x}{x^2}-2\frac{f(x)-f(0)}{x}\right]$$

而 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+2x)-2x}{x^2}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\frac{2}{1+2x}-2}{2x}=-2$，所以 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=-1$，选(B)。

4. **【考点提示】**等价无穷小

【解题分析】
$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin ax}{x^2\ln(1-bx)}=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin ax}{x^2\cdot(-bx)}=\lim_{x\to0}\frac{1-a\cos ax}{-3bx^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{a^2\sin ax}{-6bx}=\lim_{x\to0}\frac{a^2\sin ax}{-\frac{6b}{a}\cdot ax}=-\frac{a^3}{6b}=1,$$

则 $a^3=-6b$，故选项(B)，(C)错误。