GAODENG
SHUXUE
XITIJI

高等数学习题集

大连理工大学出版社

高等数学习题集

——附1993、1994年研究生
试题及参考解答

曹绳武　王振中
　　　　　　　　　编
于远许　张凤香

（辽）新登字16号

高等数学习题集

Gaodeng Shuxue Xitiji

——附1993、1994年研究生试题及参考解答

曹绳武　王振中　于远许　张凤香　编

大连理工大学出版社出版发行　　辽宁省新华书店经销
（邮政编码：116024）　　沈阳新华印刷厂印刷

开本：850×1168　1/32　印张：16　字数：396　千字
1987第1版第1次印刷　　1990年2月第2次印刷
1994年6月第2版第3次印刷　　印数：27001—37000册

责任编辑：雅　钧　凌　子　　封面设计：羊　戈
责任校对：李　鸽　寸　土

ISBN 7-5611-0201-1　　定价：8.00元

O·34

前　言

这本《高等数学习题集》是为工科院校的大学生编写的。他们在学习高等数学时，除了要做一定量的基本习题外，还需要做一些有适当难度的综合性习题，以便加深对所学课程内容的理解、灵活地掌握运算方法和提高自己的解题技巧，培养解题、解决问题的能力。本习题集就是为适应这种要求而编写的。对于在校的或社会上的准备报考工科研究生的读者，本书也可供他们在应试之前复习高等数学时参考之用。

本习题集是根据高等学校工科数学课程教学指导委员会制订的《高等数学教学基本要求》，按照高等数学通用教材的章节顺序编写的，因此它可以与通用教材配合使用。习题集各章均由例题、基本题和杂题三部分组成（例题约100个，基本题约1430个，杂题约900个），例题是为了配合杂题选解的，计算题都附有答案，为了启发思考、提供解题方法，大部分杂题给出了提示，书末附录备有常见公式以便查找。准备报考研究生的读者，可以阅读完例题之后，越过基本题而进入杂题，对于在校的大学生可以演算基本题后，再阅读例题并选作一部分杂题，对高等数学要求较低的某些专业的学生，做基本题后再选做少量杂题就够了。

本书大部分习题是应用数学系许多老师在教学过程中积累起来的，我们在编选时，参考了有关资料，并吸收了我校及一些兄弟院校近年来硕士研究生的入学考试试题，为此谨向有关的同志致谢。

参加本书编写的人员有：曹绳武、王振中、于远许和张凤香四人。

应用数学系领导为我们提供完成编写工作的条件；我们的

工作还得到了许多老师的关心、支持和帮助；在此，我们表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，加之时间仓促，本习题集一定还有许多缺点和错误，恳请多加批评、指正。

编者

1987年3月

第二版说明

本习题集自1987年7月出版以来，得到了我校及国内一些兄弟院校师生的关注与鼓励，对于促进各个学科的学生学习和复习高等数学起到了一定的积极作用。这次再版改正了某些习题和答案中的印刷错误。

由于本习题集的对象之一是报考硕士研究生的读者，为了帮助他们有针对性地检查复习的效果，在本版附录中选编了最近二年全国攻读硕士学位研究生入学考试数学试题及参考解答。限于篇幅，这次只收录最近两年的数学试卷一、试卷二、试卷三及其参考解答。另有数学试卷四、试卷五未收入。

有志报考硕士研究生的同学，应根据以往历届招生时，按不同专业方向对数学知识的不同要求，认清自己应解答哪一类试卷，然后在全面复习的基础上，试解其中一、二套试卷。

考虑到教材中一般都列出数学公式，为了减少篇幅，这次删去了原附录中的所有数学公式。

张亚军同志参加了本版修订重印的部分工作。

编者

1994年3月

目　录

第一章　函数与极限

一、例　　题

例1　设$f(x)=\begin{cases}1+x, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0,\end{cases}$　求$f[f(x)]$。

解　$f[f(x)]=\begin{cases}1+f(x), & f(x)<0,\\ 1, & f(x)\geqslant 0.\end{cases}$ 先求 $f(x)\geqslant 0$及$f(x)<0$ 的区域．由 $f(x)\geqslant 0$得 $1+x\geqslant 0$，于是 $x\geqslant -1$；由$f(x)<0$得 $1+x<0$，于是 $x<-1$．所以

$$f[f(x)]=\begin{cases}1+f(x), & x<-1,\\ 1, & x\geqslant -1.\end{cases}$$

又当 $x<-1$时 $f(x)=1+x$,故有

$$f[f(x)]=\begin{cases}2+x, & x<-1,\\ 1, & x\geqslant -1.\end{cases}$$

例2　设 $f(x)$满足方程 $af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x}$,其中$a$、$b$、$c$为常数，且 $|a|\neq|b|$，求 $f(x)$的表达式并证明$f(x)$ 是奇函数。

解
$$af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x},\tag{1}$$

在式（1）中用$\frac{1}{x}$代x,则得

$$af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=cx,\tag{2}$$

由式（1）、（2）消去$f\left(\frac{1}{x}\right)$，得

$$(a^2-b^2)f(x)=\frac{ac}{x}-bcx,$$

故
$$f(x)=\frac{c}{a^2-b^2}\left(\frac{a}{x}-bx\right).$$

由于 $f(-x)=\frac{c}{a^2-b^2}\left(-\frac{a}{x}+bx\right)=\frac{-c}{a^2-b^2}\left(\frac{a}{x}-bx\right)$

$$=-f(x),$$

所以，$f(x)$是奇函数。

例3 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\cdots\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1}\right).$$

解 若采用连乘记号，则

$$原式=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}.$$

由于
$$\frac{k^3-1}{k^3+1}=\frac{k-1}{k+1}\cdot\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1},$$

而
$$\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k+1}=\frac{2}{n(n+1)},$$

$$\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}=\prod_{k=2}^{n}\frac{(k+1)^2-(k+1)+1}{k^2-k+1}=\frac{n^2+n+1}{2^2-2+1}$$

$$=\frac{1}{3}(n^2+n+1),$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k+1}\cdot\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k+1}\cdot\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n(n+1)}\frac{n^2+n+1}{3}$$

$$=\frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n+1}{n^2+n}=\frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{2}{3}.$$

注　记号$\prod$表示连乘，例如$\prod_{k=1}^{n}a_k=a_1a_2\cdots a_n$。

例 4　已知 $\lim_{x\to+\infty}(5x-\sqrt{ax^2-bx+c})=2$，求$a$、$b$。

解　因为

$$原式=\lim_{x\to+\infty}\frac{(5x-\sqrt{ax^2-bx+c})(5x+\sqrt{ax^2-bx+c})}{5x+\sqrt{ax^2-bx+c}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{25x^2-(ax^2-bx+c)}{5x+\sqrt{ax^2-bx+c}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(25-a)x^2+bx-c}{5x+\sqrt{ax^2-bx+c}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(25-a)x+b-\frac{c}{x}}{5+\sqrt{a-\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}}=2,$$

所以
$$\begin{cases}25-a=0,\\ \dfrac{b}{5+\sqrt{a}}=2,\end{cases}$$

解此两式，得

$$a=25,\ b=20.$$

例 5　设$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$ $(n=0,1,2,\cdots)$，其中$a>0$，$x_0>0$。（1）$\lim_{n\to\infty}x_n$是否存在；（2）若存在，试求其值。

解　（1）由

$$x_n=\frac{1}{2}\left(x_{n-1}+\frac{a}{x_{n-1}}\right)=\frac{x^2_{n-1}+a}{2x_{n-1}}$$

$$\geqslant\frac{2\sqrt{a}\,x_{n-1}}{2x_{n-1}}=\sqrt{a}\qquad (n=1,2,\cdots),$$

可见数列 $\{x_n\}$有下界$\sqrt{a}$。又因为

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)-x_n=\frac{a-x_n^2}{2x_n}\leqslant 0,$$

所以数列 $\{x_n\}$ 单调减少，由极限存在准则可知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$。

（2）对等式 $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$两端取极限，得

$$x=\frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right),$$

解之得　　　　$x=\pm\sqrt{a}$。

因为$x_n>0$，所以取$x=\sqrt{a}$（负值舍去），即

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}.$$

例6　设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{x}, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}, & -1\leqslant x<0.\end{cases}$$

试讨论 $f(x)$在 $x=0$处的连续性。

解　因为

$$\lim_{x\to-0}f(x)=\lim_{x\to-0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to-0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

$$=1,$$

$$\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to+0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$=\ln e=1,$$

故 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$，但$f(0)=0$，所以

$$\lim_{x\to0}f(x)\neq f(0),$$

因此，$f(x)$ 在$x=0$处不连续。

例 7　设函数

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$$

是连续函数，求 a、b 的值。

解　当$|x|<1$时，$f(x)=ax^2+bx$，

当$|x|>1$时，$f(x)=\dfrac{1}{x}$，

当 $x=1$时，$f(1)=\dfrac{1}{2}(1+a+b)$，

当$x=-1$时，$f(-1)=\dfrac{1}{2}(-1+a-b)$。

因为函数 $f(x)$ 在$x=1$处连续，有

$$a+b=1=\frac{1}{2}(1+a+b),$$

即

$$a+b=1. \qquad (1)$$

又函数 $f(x)$在 $x=-1$处连续，有

$$a-b=-1=\frac{1}{2}(-1+a-b),$$

即 $$a-b=-1, \tag{2}$$

解（1）、（2）两式，可得

$$a=0,\ b=1.$$

例 8 设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，且$a<c<d<b$。证明在$[a,b]$内至少存在一点 ξ，使

$$pf(c)+qf(d)=(p+q)f(\xi)$$

成立，其中 p,q均为任意正常数。

证明 因为 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续，所以此函数在区间$[a,b]$上能取得最大值M和最小值m，且有

$$(p+q)m\leqslant pf(c)+qf(d)\leqslant(p+q)M,$$

即

$$m\leqslant\frac{pf(c)+qf(d)}{p+q}\leqslant M.$$

由介值定理可知，在$[a,b]$内至少存在一点 ξ，使得

$$\frac{pf(c)+qf(d)}{p+q}=f(\xi),$$

即

$$pf(c)+qf(d)=(p+q)f(\xi).$$

二、基 本 题

1. 函数

求下列函数的定义域，并用区间符号表示（1.1～1.12）：

1.1 $y=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.　　1.2 $y=\sqrt{x^2-1}$.

1.3 $y=2^{\frac{1}{x}}$.　　1.4 $y=\arcsin\frac{x-3}{2}$.

1.5 $y=\frac{1}{x^2+3x+6}$. 1.6 $y=\sqrt{x^2-3x+2}$.

1.7 $y=\frac{x-4}{\sqrt{2+x-x^2}}$. 1.8 $y=\frac{x}{\sin x}$.

1.9 $y=\begin{cases}-x, & -1\leqslant x\leqslant 0\\ x, & 0<x<2\end{cases}$. 1.10 $y=\sqrt{\lg\left(\frac{5x-x^2}{4}\right)}$.

1.11 $y=\sqrt{3-x}+\frac{1}{\ln(x+1)}$.

1.12 $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$.

1.13 设$\varphi(x)=|x-3|+|x-1|$，求$\varphi(0)$，$\varphi(1)$，$\varphi(2)$，$\varphi(3)$，$\varphi(-1)$，和 $\varphi(-2)$。

1.14 设 $f(x)=x^2$，证明：

(1) $f(-x)=f(x)$;

(2) $f(y)-f(x)=(y-x)(y+x)$;

(3) $f(x+h)-f(x)=2xh+h^2$;

(4) $f(t^2)=[f(t)]^2$.

1.15 设$\varphi(x)=\lg\frac{1-x}{1+x}$，证明$\varphi(u)+\varphi(v)=\varphi\left(\frac{u+v}{1+uv}\right)$.

1.16 若$f(x)=\frac{x}{x-1}$，求 $f(2)$，$f(0)$，$f[f(x_0)]$，$f(x_0+1)$，其中 $x_0\neq 0$。

作出下列函数的图形（1.17～1.20）：

1.17 $y=|x|+x$. 1.18 $y=\sqrt{\sin^2 x}$.

1.19 $y=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 1.20 $y=|x^2-1|$.

1.21 设 $y=f(x)$和$y=\varphi(x)$的图形是已知的，如何作出$y=f(x)+\varphi(x)$的图形？

（1）试作 $y=x+\frac{1}{x}$的图形；

（2）试作 $y=\sin x+\cos x$的图形。

1.22 设 $y=f(x)$的图形是已知的，如何作出 $y=f(x-a)$与 $y=f(x)+b$以及 $y=hf(x)$和 $y=f(-x)$的图形 (a,b,h为常数)．试作出下列函数图形：

（1）$y=\ln(x+1)$；　　（2）$y=\frac{x+1}{x-1}$；

（3）$y=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$；　　（4）$y=\lg 2x$；

（5）$y=\sin^2\frac{x}{2}$；　　（6）$y=\sin 2x$。

1.23 证明$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，并利用这个结果作函数$y=\sin x+\cos x$的图形。

1.24 对于二次函数 $f(x)=a_0x^2+a_1x+a_2$，若有三个彼此相异的实数 a_1，a_2，a_3，使 $f(a_1)=f(a_2)=f(a_3)=0$，证明 $a_0=a_1=a_2=0$。

1.25 求满足下列性质的二次函数 $g(x)=ax^2+bx+c$：

（1）$g(-1)=5$，$g(0)=2$，$g(1)=7$；

（2）$g(3)=7$，$g(5)=5$，$g(7)=3$。

1.26 设$f(x)=\frac{ax+b}{cx-a}$，且 $a^2+bc\neq 0$，证明

$$f[f(x)]=x \qquad \left(x\neq\frac{a}{c}\right).$$

1.27 设$f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$，$g(x)=x+\sqrt{x^2-1}$，证明 $g(\sqrt{x^2+1})=f(x)$ $(x\geqslant 0)$；$f(\sqrt{x^2-1})=g(x)$ $(x\geqslant 1)$。

1.28 $y=x$、$y=\sqrt{x^2}$以及$y=(\sqrt{x})^2$是否表示同一函数？