人大版考研

买1本书
听1年课

经济类考研数学综合复习全书

2005年考研数学考试参考书新编（经济类）

严守权 姚孟臣 编著

权威专家主笔

紧扣考试大纲

系统复习指导

提炼思路技巧

中国人民大学出版社

中国人民大学出版社
China RenMin University Press
00638
010-62519525
www.7Kao.net
刮开注册

2005年考研数学新编考试参考书

（经济类）

2005

严守权　姚孟臣　编著

中国人民大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

2005年考研数学新编考试参考书(经济类)/严守权，姚孟臣编著
北京：中国人民大学出版社，2004

ISBN 7-300-03109-9/G·579
Ⅰ. 2…
Ⅱ. ①严… ②姚…
Ⅲ. 高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料
Ⅳ. 013

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第028095号

2005年考研数学新编考试参考书(经济类)

严守权　姚孟臣　编著

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街31号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242(总编室)　010－62511239(出版部)		
	010－82501766(邮购部)　010－62514148(门市部)		
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.1kao.net(中国1考网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京鑫鑫印务有限公司		
开　　本	787×1092毫米 1/16	**版　　次**	2004年6月第1版
印　　张	36.75	**印　　次**	2004年6月第1次印刷
字　　数	843 000	**定　　价**	39.00元

目　　录

第一章 微积分

本章复习建议

微积分在经济学硕士研究生入学考试数学部分的成绩中占有近一半的比重，而填空和选择题又占微积分试题的近一半.其特点是：涉及的概念多、要掌握的定理公式多、应用的范围广、知识点和考点多、题目数量大且灵活性高，因此要重视本章内容的复习.具体地说，要注意以下几点：

1. 要抓好对基本概念的理解和运用.要真正理解一个概念，应该从它的几何背景、内外在的逻辑关系和理念以及量化和算法这三个方面综合进行，要能做到，一旦题目中出现某一条件或涉及某个结论，头脑中就立即产生了一个直观影像，或把它转换成一个算式，或者是在要讨论或求解的问题之间找出逻辑关联，并抓住它的关键词.同时，要打破大学课本把微积分按课程进度所进行的人为的分割，而是要将它的所有知识点融汇为一个整体，综合形成一种解题能力，在使用某个知识点时只要它有效，就不必管它出现在哪一章哪一节.

2. 无论做多少题，都要把握微积分的整体架构，也只有做到对各知识点的均衡掌握，才可能突出重点，突破难点，去处理综合性强的问题.这个架构是：微积分研究的对象是函数，要能熟练处理初等函数、分段函数、变限积分函数和经济函数（主要包括成本函数、收益函数、需求与供给函数、利润函数），并能建立和求解函数方程构造未知函数；重点讨论函数的单调性与极值、函数曲线的凹性和拐点、函数的对称性、连续性、可导性、可积性和幂级数可展性；整个讨论的理论基础是极限理论，包括极限的概念和极限的收敛性（含广义积分、无穷级数的收敛性），核心是掌握无穷小分析，阶的比较和等价替换；微积分的应用主要是几何应用（面积、旋转体体积）、经济应用（边际、弹性和最优化），微分学的应用涉及的内容多且变化灵活，基础是中值定理，中值存在性的证明是考试的难点也是重点之一；支撑整个架构的运算是三大运算，即极限运算、导数和偏导数及微分和全微分的运算、积分运算.

3. 在掌握基本概念并通读全章把握微积分总体架构的基础上，要围绕经济类的微积分考什么、如何应对的问题，集中精力，按照下列考点，逐一复习，通过复习，明确每个考点可能提出什么问题、求解的思路和应该注意避免犯的错误.主要考点是：两函数相等和恒等式判定，变量关系的讨论，函数对称性及其应用，函数的单调性及其判断，函数连续性的讨论，极限的概念与收敛性（含广义积分、无穷级数的敛散性），函数曲线的渐进线，导数和微分的概念，可导性的讨论和判断，中值定理及中值存在性证明，极值与最值，函数曲线的凹向与拐点，方程有几个解的讨论，等式与不等式的证明和判断，分段函数及可化为分段函数的处理方法，变限积分函数的性质和相关问题的处理方法，切线，二重积分与定积分的转换，几何应用（面积和旋转体体积），求未知函数等，还有经济应用专题，极限运算、微

分运算、积分运算(不定积分、定积分和二重积分)和微分方程的求解.

4. 微积分的选择题多,题量大(大小题共12题),用时多少与思路有关,不同水平的学生差异很大,这也给考生提供了发挥的空间.复习时要有针对性地注意解决思路问题、解题的逻辑层次和速度问题.如对选择题,能用几何背景推导的,就不必用式子算,能用排除法推断的,就不要求每一选项都做出判断.

一、函数、极限、连续

内容提要

1. 函数概念

函数的几何特性.

函数的有界性、单调性、周期性、奇偶性.

反函数、复合函数、隐函数、分段函数.

基本初等函数与初等函数:常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数称为基本初等函数(定义域、主要性质和图形从略).由基本初等函数经有限次四则运算或有限次复合生成的函数称为初等函数.

简单的经济函数:在生产和经营活动中,成本、收入、利润关于产品的产量或销量 x 的函数关系分别称为总成本函数,记为 $C(x)$;总收入函数,记为 $R(x)$;总利润函数,记为 $L(x)$.一般地,$C(x)=$固定成本+可变成本;$R(x)=px$,其中 p 为产品的销售单价,x 为销量;$L(x)=R(x)-C(x)$.商品的市场需求量 Q_d 和市场供给量 Q_s 相对商品价格 p 的函数关系,分别称为商品的需求函数 $f_d(p)$ 和供给函数 $f_s(p)$.

2. 极限概念

设有数列 $\{u_n\}$ 和常数 A,如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在正整数 N,使得当 $n>N$ 时,总有不等式 $|u_n-A|<\varepsilon$ 成立,则称常数 A 为数列 $\{u_n\}$ 的极限,记作 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A$ 或 $u_n\to A(n\to\infty)$.

设有函数 $f(x)$ 和常数 A,如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在正数 $\delta>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,总有不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立,则称常数 A 为函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的极限,记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to x_0)$.如果自变量 x 仅限从 x_0 右侧(或左侧)趋向 x_0 时,$f(x)\to A$,则称 A 为 $x\to x_0^+$(或 $x\to x_0^-$)时,函数 $f(x)$ 的右极限(或左极限),记作 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$(或 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$).类似地可定义 $x\to\infty$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$ 时,$f(x)\to A$ 的极限概念.

函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}f(x)$ 存在且等于 A 的充分必要条件是

$$\lim_{x\to x_0^+(+\infty)}f(x)=\lim_{x\to x_0^-(-\infty)}f(x)=A.$$

无穷小与无穷大:有限个无穷小量的和仍为无穷小量.有限个无穷小量的积仍为无穷小量.无穷小量与有界变量之积仍为无穷小量.无穷小量除以极限不为零的变量,其商仍

为无穷小量.若 α,β 为同一变化趋势下的无穷小量,且 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=\rho$,则当 $\rho=0$ 时,称 β 为比 α 高阶的无穷小量;当 $\rho=\infty$ 时,称 β 为比 α 低阶的无穷小量;当 $\rho=c\neq0$ 时,称 β 为与 α 同阶的无穷小量,特别地,当 $\rho=1$ 时,称 β 为与 α 等价的无穷小量,记作 $\alpha\sim\beta$.

$\lim f(x)=A$ 的充分必要条件是,函数 $f(x)$ 可表示为常数 A 与无穷小量 α 之和.

如果极限 $\lim f(x)$ 和 $\lim g(x)$ 都存在,则有运算法则:

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$$

$$\lim[f(x)g(x)]=\lim f(x)\lim g(x)$$

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}\quad(\lim g(x)\neq0)$$

两个重要的极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1,\qquad \lim\limits_{\varphi(x)\to0}\frac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e},\qquad \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\mathrm{e}$

罗必塔法则:设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足条件:

(1) $x\to a$(或 $x\to\infty$)时,

$f(x)\to0$(或 ∞),

$g(x)\to0$(或 ∞);

(2) 在点 a 的某空心邻域内(或存在正数 M,当 $|x|>M$ 时),$f(x)$,$g(x)$ 可导,且 $g'(x)\neq0$;

(3) 极限 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$(或 ∞)或 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$(或 ∞),

则有

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A\text{(或}\infty\text{)}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A\text{(或}\infty\text{)}$$

3. 函数的连续性

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义,若有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续;如果函数 $f(x)$ 在某区间内的每一点都连续,则称 $f(x)$ 在该区间内连续.如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处,或者无定义,或者无极限,或者极限不等于函数值 $f(x_0)$,则称 $f(x)$ 在点 x_0 处间断,称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点.

初等函数在其定义区间内连续.

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,则

(1) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上取到最大值和最小值(最值定理);

(2) $f(a)\neq f(b)$ 时,对介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的任一实数 c,必存在一点 $\xi\in[a,b]$,使得 $f(\xi)=c$(介值定理).

✎ 重点难点

1. 函数概念

(1) 函数概念中,定义域和对应法则是两个基本要素.两个函数只有在定义域和对应法则都相等的情况下才相等.要熟练掌握函数定义域的计算,尤其要养成在定义域内考虑和求解问题的习惯.

(2) 函数关系中最常见的复合函数关系.对于复合函数形式:$f(\varphi(x))=\Psi(x)$,通常要考虑的基本问题是:

已知 $f(x)$,$\Psi(x)$,求 $\varphi(x)$及其定义域;

已知 $f(x)$,$\varphi(x)$,求 $\Psi(x)$及其定义域;

已知 $\varphi(x)$,$\Psi(x)$,求 $f(x)$及其定义域.

以上函数关系的转换,是考研解题的一种基本功,应熟练掌握.

(3) 初等函数、分段函数、变上限积分函数和经济函数是经济类考生应重点掌握的函数类型.其中,初等函数是基础,应熟练掌握基本初等函数的性质和图形特征.对分段函数处理相关问题时,要注意分段开区间内分段用公式或用规则进行处理,分段点处要利用左、右极限为工具进行单独处理.对变上限积分函数,首先要分清自变量、积分变量,其次是要掌握其性质,并熟练掌握求导运算.在经济函数中,应主要掌握成本函数 $C(x)$,收益函数 $R(x)$,需求函数 $f_{\mathrm{d}}(p)$,供给函数 $f_s(p)$,利润函数 $L(x)$的结构和经济含义.

2. 函数的单调性与对称性

函数性质中应重点掌握函数的单调性和对称性.

(1) 函数的单调性是考研试题中的常见题型.一是若干单调函数复合后单调性的讨论;二是单调性的判别和证明,其主要工具是导数,最终归结为 $f'(x)>0$(或 $f'(x)<0$)的证明和判断.

(2) 函数的对称性在微分和积分中都有广泛的应用.

函数的对称性主要有三种形式:若 $y=f(x)$是偶函数,则函数曲线关于 Y 轴对称;若$y=f(x)$是奇函数,则函数曲线关于原点对称;若 $y=f(x)$与 $y=\varphi(x)$互为反函数,则两曲线关于直线 $y=x$ 对称.

在微分学中,经常用几何直观来讨论函数的性质.如,对于奇、偶函数,可以由函数在 $x>0$ 时的单调性、凸性等反推函数在 $x<0$ 时的单调性和凸性等.讨论时只要利用几何图形的翻转即可作出判断.

在积分学中,通常可利用对称性简化积分运算.

3. 函数极限概念

(1) 函数极限是自变量在一个特定变化过程中函数取值的变化趋势,即当自变量变化足够大时,函数的所有取值与定常数之差的绝对值任意小.函数极限的存在,与趋向点 x_0 处函数的取值无关,在极限号 $\lim\limits_{x\to x_0}$ 下,$x\neq x_0$;且自变量趋向方式是任意的,不能加以限定;在同一极限号下,变量各部分同步变化.

(2) 函数极限存在,有惟一性、有界性和保号性,其中保号性是指函数极限值符号与

变化邻域内函数取值符号的一致性.即:

若 $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} f(x)=A>0$(或$<0$),则必存在 x_0 的某空心邻域(或区域$(-\infty,-M)\cup(M,+\infty)$),在该区域内,$f(x)>0$(或$<0$).

若函数 $f(x)\geqslant 0$(或$\leqslant 0$),则 $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} f(x)=A\geqslant 0$(或$\leqslant 0$).

保号性在判断极值问题时有应用.

4.极限的收敛性

(1) 极限的收敛性通常出现在未定式的定值、广义积分和无穷级数的收敛性等问题中,最终取决于无穷小量趋于零,或无穷大量趋于无穷大的速度问题,即阶的概念.就无穷大量而言,大体上有五个不同的速度层次:

$$\ln n,\ n^{\alpha}(\alpha>0),\ a^{n}(a>1),\ n!,\ n^{n}$$

(2) 在作极限运算时,先考虑阶的问题,在能区分高低阶的情况下,应有所取舍,只考虑能最终确定其变化速度的项.

(3) 在同阶情况下未定式的定值,在连乘或连除的情况下可以用等价代换,使问题化简,常用的等价无穷小关系式在 $x\to 0$ 时,有 $\sin x\sim x$, $\tan x\sim x$, $\arcsin x\sim x$, $\arctan x\sim x$, $1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$, $\ln(1+x)\sim x$, $(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x$, $\mathrm{e}^{x}-1\sim x$.

(4) 确定未定式的基本方法是罗必塔法则.注意法则只适用“$\dfrac{0}{0}$”型或“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型,其他类型的未定式均要化为“$\dfrac{0}{0}$”型或“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型,其中必有一种形式最为简便.要注意选择,运用法则时如果结合无穷小等价代换,适当化简,更为简便.

5.函数的连续性

(1) 函数连续性的概念是在定义了点连续的概念基础上推广到区间连续的.讨论函数的连续性,就是证明函数 $f(x)$在点 x_0 的极限值等于函数值 $f(x_0)$.

(2) 函数的间断点问题涉及较多的是可去间断点,即函数在点 x_0 的极限存在,但不连续的点;无穷间断点,即 x 至少在一侧趋向 x_0 时,极限为无穷大的点.前者通常涉及的问题是:通过求极限重新定义 $f(x_0)$,使 $f(x)$在 x_0 连续.后者是涉及铅直渐近线的问题,即若 x_0 为 $f(x)$的无穷间断点,则 $x=x_0$ 必为其铅直渐近线.

(3) 必须强调的是,在运用导数讨论函数的单调性和凸性时,只限于连续区间范围内.例如在一般情况下,在定义域内有 $f'(x)>0$,并不能推出 $f(x)$单调增.因此,在讨论相关函数的单调性和凸性时,应找出函数 $f(x)$的连续区间,然后再在每个区间,一一判别.

(4) 闭区间上连续函数的性质,常用的是零值定理.即若 $f(x)$在$[a,b]$上连续,且 $f(a)\cdot f(b)<0(\leqslant 0)$,则必存在一点 $x_0\in(a,b)([a,b])$,使得 $f(x_0)=0$.通常用于方程 $f(x)=0$ 的解的讨论.应注意的是 x_0 的取值范围是开区间还是闭区间,主要取决于 $f(a)\cdot f(b)$是否严格地小于零.

例题解析

1．函数概念

[例 1] 填空.

(1) 已知 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x+x^3}{1+x^4}$，则 $f(x)$ 的定义域为______.

(2) 设 $f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=af(x)+\dfrac{x-1}{x}$，$a^2\neq 1$，$a\neq 0$，则 $f(x)$ 的值域为______.

(3) 设 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数，且当 $0<x\leqslant 2$ 时，$f(x)=x^2-1$，则在 $(-3,-1]$ 上，$f(x)=$______.

(4) 已知函数 $f(x)=\dfrac{3}{2}ax^2+(4-a)x$ 在区间 $(0,1]$ 内为正，则 a 的取值范围为______.

解：(1) 求函数 $f(x)$ 的定义域时，一般应先求出 $f(x)$ 的解析式. 本题解析式可直接配置得到，即由 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{\dfrac{1}{x}+x}{\dfrac{1}{x^2}+x^2}=\dfrac{x+\dfrac{1}{x}}{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2}$，有 $f(x)=\dfrac{x}{x^2-2}$，从而知 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,-\sqrt{2})\cup(-\sqrt{2},\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$

(2) 先求出 $f(x)$ 的解析式. 为此，设法找出 $f(x)$ 与 $f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$ 之间的转换关系. 若设 $\dfrac{x}{x-1}=t$，则有 $x=\dfrac{t}{t-1}$，于是有

$$\begin{cases} af(x)-f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=-\dfrac{x-1}{x} \\ f(x)-af\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=\dfrac{1}{x} \end{cases}$$

解得 $\qquad f(x)=\dfrac{1+a(x-1)}{x(1-a^2)}$

又 $f(x)$ 的值域即为其反函数 $f^{-1}(x)=\dfrac{1-a}{-a+x(1-a^2)}$ 的定义域，因此，$z_f=\left\{x\,\middle|\,x\neq\dfrac{a}{1-a^2}\right\}$

(3) 周期函数的问题可利用定义式由平移法处理.

当 $-3<x\leqslant -2$，即 $1<x+4\leqslant 2$ 时，有 $f(x)=f(x+4)=(x+4)^2-1$；

当 $-2<x\leqslant -1$，即 $0<x+2\leqslant 1$ 时，有 $f(x)=f(x+2)=(x+2)^2-1$.

因此，有解析式

$$f(x)=\begin{cases}(x+4)^2-1, & -3<x\leqslant -2\\ (x+2)^2-1, & -2<x\leqslant -1\end{cases}$$

(4) 本题可借助几何直观图形，如图 1—1.

当 $a=0$ 时，$y=4x$，显然满足要求；

当 $a>0$ 时，要使 $f(x)>0$，交点 $x^*=\dfrac{2(a-4)}{3a}$ 必在原点左侧，即 $\dfrac{2(a-4)}{3a}\leqslant 0$，解得

$0<a\leqslant 4$;

当 $a<0$ 时,要使 $f(x)>0$,交点 x^* 必在 $x=1$ 右侧,即$\dfrac{2(a-4)}{3a}>1$,即 $-8<a<0$.

综上讨论 $-8<a\leqslant 4$,即$(-8,4]$

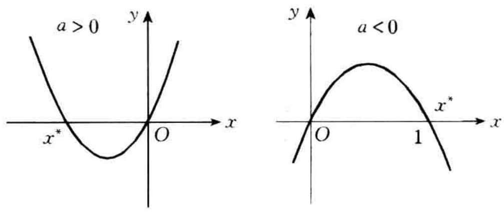

图 1—1

[例 2] 单项选择题.

(1) 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0\\ 2x, & x<0\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -2x, & x<0\end{cases}$,则 $x\leqslant 0$ 时,$f[g(x)]=$ (　　).

A. $2x$　　B. x^2　　C. $4x^2$　　D. $-4x^2$

(2) 下列解析式中,(　　)非初等函数.

A. $y=x+x^2+\cdots+x^n+\cdots,\ |x|<1$　　B. $y=\arcsin(e^{x^2}+1)$

C. $y=\begin{cases}x-2x^2, & x<-1\\ 3x, & -1\leqslant x<2\\ 2x^2-x, & 2\leqslant x\end{cases}$　　D. $\int_0^x x(x-1)\mathrm{d}x$

答: (1)C　(2)B

解: (1) 分段函数在各开区间内要分段处理,再单独讨论分段点的取值.在本题中,当 $x<0$ 时,$g(x)=-2x>0$,故对应 $f(x)=x^2$,有 $f[g(x)]=[g(x)]^2=4x^2$,又 $g(0)=0$,$f[g(0)]=0^2=0$,综上所述,当 $x\leqslant 0$ 时,$f[g(x)]=4x^2$,故取 C

(2) 考察一个函数时,应考虑它的多种等价表现形式,选项 A,C,D 分别等价于 $y=\dfrac{x}{1-x}$,$y=x(|x-2|+|x+1|)$,$y=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2$,均可判定为初等函数,而 $e^{x^2}+1>1$,$\arcsin(e^{x^2}+1)$不构成函数关系,故取 B

[例 3] 求 $y=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$在$|x|\geqslant 1$ 时的反函数.

解: 求解方程,反解得

$$x=y\pm\sqrt{y^2-1},\quad y^2\geqslant 1$$

由单值对应关系,

当 $y\geqslant 1$ 时,$x=y+\sqrt{y^2-1}$;

当 $y\leqslant -1$ 时,$x=y-\sqrt{y^2-1}$,从而得到反函数为

$$y=\begin{cases}x+\sqrt{x^2-1}, & x\geqslant 1\\ x-\sqrt{x^2-1}, & x\leqslant -1\end{cases}$$

2. 函数性质

[**例 1**] 单项选择题.

(1) 函数 $f(x)$为定义在 **R** 上的奇函数,可导,在$(0,+\infty)$上 $f(x)>0$,且为单调增函数,曲线图形下凸. 又设 $F(x)=3-f^2(x)$,则 $F(x)$是(　　).

A. 在$(-\infty,0)$上单调减,曲线图形下凸

B. 在$(-\infty,0)$上单调增,曲线图形上凸

C. 在$(-\infty,0)$上非单调,曲线图形上凸

D. 在$(-\infty,0)$上单调减,曲线图形上凸

(2) 已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为偶函数,可导,且 $F(x)=\int_0^x (x-2f'(t^3))f(-t)\mathrm{d}t$,则 $F(x)$是(　　).

A. 偶函数

B. 非奇非偶函数

C. 奇函数

D. 既为偶函数又为奇函数

答: (1)B　(2)A

解: (1) 容易验证 $F(x)$为定义在 **R** 上的偶函数,又由题设,$F(x)$在$(0,+\infty)$上单调减少,又由 $F'(x)=-2f'(x)f(x)$,$f'(x)>0$ 单调增,$f(x)>0$ 单调增,知 $F'(x)$单调减,即曲线图形上凸,利用图形的对称性,可以推断在$(-\infty,0)$上,$F(x)$单调增,曲线图形上凸,故取 B

(2) 由 $f(x)$为偶函数,知 $f(-x)$为偶函数,$f'(x^3)$为奇函数. 又 $F(x)=x\int_0^x f(-t)\mathrm{d}t-2\int_0^x f'(t^3)f(-t)\mathrm{d}t$,其中由$\int_0^x f(-t)\mathrm{d}t$ 为奇函数,知 $x\int_0^x f(-t)\mathrm{d}t$ 为偶函数,由 $f'(x^3)f(-x)$ 为奇函数,知$\int_0^x f'(t^3)f(-t)\mathrm{d}t$ 为偶函数,综上讨论可知,$F(x)$为偶函数,故取 A

[**例 2**] 给出函数 $y=\arccos(x^2+3x+2)$的单调增区间.

解: 由函数 $y=\arccos x$ 单调减知,所求区间应由抛物线的单调减区间复合得到. 由直观图 1—2,$y=x^2+3x+2$ 的单调减区间为$\left(-\infty,-\dfrac{5}{2}\right)$,又因 $|x^2+3x+2|\leqslant 1$,求解方程 $x^2+3x+2=1$,得 $x^*=\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$,从而知所求函数单调增区间为$\left(-\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{2},-\dfrac{5}{2}\right)$

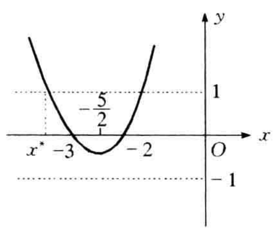

图 1—2

3. 函数的极限概念

[**例 1**] 单项选择题.

(1) 设 $\delta>0$,函数 $f(x)$在$(a-\delta,a)$和$(a,a+\delta)$内有定义,如果条件(　　)成立,则 $f(x)$在 $x=a$ 处的极限存在.

A. $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=A$　($A\neq\infty$,x 为有理数)

B. $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$,$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$存在,且 $f(x)$在 $x=a$ 处有定义

C. $\lim\limits_{n\to\infty}f\left(a+\dfrac{1}{n}\right)=f(a)$

D. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(a+x)-A}{\sqrt[3]{x}}=0$　(A 为常数)

(2) 设$\{a_n\}$,$\{b_n\}$,$\{c_n\}$均为非负数列,且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$,$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$,则必有(　　).

A. $a_n<b_n$ 对任意 n 成立　　B. $b_n<c_n$ 对任意 n 成立

C. 极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在　　D. 极限$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在

(3) 设数列 x_n,y_n 满足$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$,则有(　　).

A. 若 x_n 发散,则 y_n 必收敛

B. 若 x_n 无界,则 y_n 必有界

C. 若 x_n 无界,则 y_n 必为无穷小

D. 若$\dfrac{1}{x_n}$为无穷小,则 y_n 也必为无穷小

答:(1)D　(2)D　(3)D

解:(1) A,C 是 $x\to a$ 的子过程,不能说明 $x\to a$ 的函数极限的存在性问题,判断 B 的关键是左右极限是否相等,但题中未明确,故仅有 D 成立,因为由题设 $x\to 0$ 时,$f(x+a)-A$ 为比$\sqrt[3]{x}$高阶的无穷小,即有$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$

(2) 由题设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n<\lim\limits_{n\to\infty}b_n$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n<\lim\limits_{n\to\infty}c_n$,由极限的保号性,仅当 n 足够大时才保证 $a_n<b_n$,$b_n<c_n$ 成立.又 a_nc_n 为"$0\cdot\infty$"型未定式,其极限的存在不能确定,故取 D

(3) 对于抽象形式出现的极限只能依据相关定理判定.由已知$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n}{\dfrac{1}{x_n}}=0$,知 y_n 是比$\dfrac{1}{x_n}$高阶的无穷小量,故取 D

[例 2] 检查下列的运算过程是否正确,若错误,请写出正确的运算过程.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x=0\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x=0$

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{4x}{1-x^2}-\dfrac{1+x}{1-x}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x}{1-x^2}-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+x}{1-x}=\infty-\infty=0$

(3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+3}{x^2-3x+2}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 2}(2x^2+3)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+2)}=\dfrac{11}{0}=\infty$

(4) 因为$\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{x+1}{x-2}$,

所以$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x-2}=-2$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\csc x}=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}\frac{x}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{x}{\sin x}}=e$

(6) 因为 $\sin x \sim x$，所以$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{x^3}=0$

解：(1) 错．$x\to\infty$时，$\arctan x$ 极限不存在，不能运用运算法则．

正确解法是，由于$|\arctan x|<\dfrac{\pi}{2}$，且当 $x\to\infty$时，$\dfrac{1}{x}$为无穷小量，故原极限$=0$

(2) 错．$x\to 1$ 时，$\dfrac{4x}{1-x^2}$，$\dfrac{1+x}{1-x}$的极限均不存在，不能运用极限运算法则，而且两个无穷大量之差也不一定为无穷小．

正确解法是，先通分，化为“$\dfrac{0}{0}$”型再定值．即

$$原极限=\lim_{x\to 1}\frac{-(1-x)^2}{1-x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{-(1-x)}{1+x}=0$$

(3) 错．极限式分母为零，不能运用极限运算法则．

正确解法是，首先由

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{2x^2+3}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+2)}{\lim\limits_{x\to 2}(2x^2+3)}=\frac{0}{11}=0$$

得出　　原极限$=\infty$

(4) 错．一般情况下，由于定义域不同，等式$\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\dfrac{x+1}{x-2}$不成立．

正确解法是，根据极限概念，$x\to 1$ 时，$x\neq 1$，因此，在极限号下分子、分母可消去$(x-1)$因子，即有

$$原极限=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x-2}=-2$$

(5) 错．极限过程所有变量应同步变化，不能将其中某个部分先变．正确解法同(6)，即由

$$\lim_{x\to 0}\csc x\ln(1+x)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=1$$

得出　　原极限$=e^1=e$

(6) 错．在计算和差形式的极限时，不能用等价无穷小代换．

正确解法是，用罗必塔法则定值或在使用一次罗必塔法则后，分子用等价无穷小代换定值．即

$$原极限\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}\xlongequal{1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\frac{1}{6}$$

以上讨论的是在求极限过程中经常犯的错误，说明在利用已知求极限时，要十分注意使用的前提条件，不能在允许的条件之外想当然地进行极限运算．

4．极限的收敛性与极限的运算

[**例 1**] 填空．

(1) 设 $f(x)$在 $x=0$ 某邻域内有一阶连续导数，且 $f(0)\neq 0$，$f'(0)\neq 0$，若 $af(h)+bf(2h)-f(0)$在 $h\to 0$ 时是比 h 高阶的无穷小量，则 $a=$________，$b=$________．

(2) 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \tan x\cdot\arctan t^2\mathrm{d}t+x^5}{x^k}=c\neq 0$，则 $k=$ ______，$c=$ ______.

(3) 已知$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)-1}{x}+\dfrac{\sin 2x}{x^2}\right)=2$，则$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$ ______.

(4) 设极限$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$存在，且$\lim\limits_{x\to\infty}3xf(x)=\lim\limits_{x\to\infty}(4f(x)+5)$，则$\lim\limits_{x\to\infty}xf(x)=$ ______.

(5) 已知曲线 $f(x)=x^n$ 在点$(1,1)$处的切线与 x 轴的交点为$(\xi_n,0)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}f(\xi_n)=$ ______.

(6) 设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$可导，且$\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=\mathrm{e}$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]$，则 $c=$ ______.

解：(1) 由题设$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}=0$，知 $h\to 0$ 时，$af(h)+bf(2h)-f(0)$是比 h 高阶的无穷小量，即$\lim\limits_{h\to 0}[af(h)+bf(2h)-f(0)]=af(0)+bf(0)-f(0)=(a+b-1)f(0)=0$，因 $f(0)\neq 0$，知 $a+b=1$

又由罗必塔法则，有

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}[af'(h)+2bf'(2h)]=(a+2b)f'(0)=0$，因 $f'(0)\neq 0$，知 $a+2b=0$，求解方程组$\begin{cases}a+b=1\\a+2b=0\end{cases}$，得 $a=2,b=-1$

(2)利用等价代换，先看阶，再定值. 由 $x\to 0$ 时，$\tan x\sim x$，$t\to 0$ 时，$\arctan t^2\sim t^2$，因此

$$\int_0^x \tan x\cdot\arctan t^2\mathrm{d}t=\tan x\int_0^x\arctan t^2\mathrm{d}t\sim x\int_0^x t^2\mathrm{d}t=\frac{1}{3}x^4,$$

比 x^5 低阶，故舍去 x^5，从而确定 x^k 与$\dfrac{1}{3}x^4$ 同阶，故 $k=4$.

于是　　原极限 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{3}x^4}{x^4}=\dfrac{1}{3}$

即　　$c=\dfrac{1}{3}$

(3) 利用无穷小先构造 $f(x)$的解析式，再求极限. 由

原极限$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(f(x)-1)+\sin 2x}{x^2}=2$

知　　$x(f(x)-1)+\sin 2x=2x^2+o(x^2)$

即　　$f(x)=2x-\dfrac{\sin 2x}{x}+1+\dfrac{o(x^2)}{x}$

因此有　$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-1$

(4) 由已知$\lim\limits_{x\to\infty}(4f(x)+5)$存在，从而知$\lim\limits_{x\to\infty}3xf(x)$存在，并进一步知$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$，因此

$$\lim_{x\to\infty}xf(x)=\frac{1}{3}\lim_{x\to\infty}(4f(x)+5)=\frac{5}{3}$$

(5) 曲线 $y=x^n$ 在(1,1)处的切线为 $y=n(x-1)+1$，得

$$\xi_n=\frac{n-1}{n}$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}f(\xi_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n=\mathrm{e}^{-1}$

（6）由微分中值定理，$f(x)-f(x-1)=f'(\xi)$，ξ 介于 $x,x-1$ 之间

于是，原等式左边 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{c}{x}\right)^x}{\left(1-\frac{c}{x}\right)^x}=\mathrm{e}^{2c}$

原等式右边 $=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]=\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ \xi\to\infty}}f'(\xi)=\mathrm{e}$

从而知 $c=\frac{1}{2}$

[例 2] 单项选择题.

（1）下列结论中正确的是（　　）.

A. 若 α 为无穷小量，则 $\frac{1}{\alpha}$ 必为无穷大量

B. 任何两个无穷小量均可以比较阶的大小

C. 有界变量乘无穷大量仍为无穷大量

D. $x\to0$ 时，$\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$ 是比 $\sqrt{x^6+\sqrt{x^8+\sqrt{x^{10}}}}$ 高阶的无穷小量

（2）设 $\lim\limits_{x\to0}\frac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d[(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-1]}=2$，其中 $a^2+c^2\neq0$，则有（　　）.

A. $a+4c-2d=0$（b 为任意实数）　　B. $a+4c=0$（b,d 为任意实数）

C. $b-2d=0$（a,c 为任意实数）　　D. $2a+b+8c-d=0$

（3）已知 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\ln x+\sin x}{x\ln x^2+f(x)}=\frac{1}{2}$，则 $f(x)=$（　　）.

A. $\cos x$　　B. $\ln 2x$　　C. x^2　　D. $\tan x$

（4）设函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有界且可导，则（　　）.

A. 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$

B. 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$

C. 当 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$

D. 当 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$

答：（1）D　（2）B　（3）C　（4）B

解：（1）0 是特殊的无穷小量，$\frac{1}{0}$ 无意义，结论 A 仅在 $\alpha\neq0$ 时成立；由反例，$x\to0$ 时，$x\sin\frac{1}{x}\to0$，但 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x}$ 无极限，说明两个无穷小量未必能比较阶的大小；无穷小量也是有界变量，故有界变量乘无穷大量未必为无穷大量；又 $x\to0$ 时，$\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\sim\frac{x^2}{2}$，

$\sqrt{x^6+\sqrt{x^8+\sqrt{x^{10}}}}\sim x^{\frac{10}{8}}$,显然结论 D 成立

(2) 由于在 $x\to 0$ 时,$\tan x\sim x$,$1-\cos x\sim \frac{1}{2}x^2$,$\ln(1-2x)\sim -2x$,$(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-1\sim \frac{1}{2}x^2$,知原极限最终取决于 $a\tan x$ 与 $c\ln(1-2x)$ 比值的变化趋势,即有原极限 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{a\tan x}{c\ln(1-2x)}=\frac{a}{-2c}=2$,也即 $a+4c=0$(b,d 为任意实数),故取 B

(3) $x\to 0$ 时,$\sin x$ 为比 $x\ln x$ 高阶的无穷小,因此,分子极限的趋向取决于 $x\ln x$,又 $x\ln x^2=2x\ln x$,若要极限值为$\frac{1}{2}$,$f(x)$只能是比 $x\ln x$ 高阶的无穷小,故取 C

(4) 由反证法,若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=k\neq 0$,不妨设 $k>0$,则必存在 x_0,当 $x>x_0$ 时,有 $f'(x)>\frac{k}{2}$,从而有

$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)>f(x_0)+\frac{k}{2}(x-x_0),\text{其中 }\xi\in(x_0,x),$$

因而推得:当 $x\to+\infty$时,$f(x)\to+\infty$,与已知矛盾.故取 B

[**例 3**] 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt[3]{x}\sin x}{(x^2+x)\ln\left(1-\frac{2}{x}\right)}$　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(x^{\frac{1}{n}}-x^{\frac{1}{n+1}}\right)\quad(x>0)$

解:(1) 式中 $\sin x$ 为有界变量,不能直接用罗必塔法则,应分项处理.其中

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{(x^2+x)\ln\left(1-\frac{2}{x}\right)}\xlongequal{\text{等价代换}}\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x^2\cdot\left(-\frac{2}{x}\right)}=\frac{1}{2}$$

又　$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x}\sin x}{(x^2+x)\ln\left(1-\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x}\sin x}{x^2\left(-\frac{2}{x}\right)}=0,\quad|\sin x|\leqslant 1$$

从而有　原极限 $=\frac{1}{2}$

(2) $x\to 0$ 时,$e^{\frac{1}{x}}$无极限,应分左右极限计算.

由　$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{2+0}{1+0}-1=1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{x}\right)\xlongequal{u=\frac{1}{x}}\lim_{u\to+\infty}\frac{2+e^u}{1+e^{4u}}+1=1$$

知　原极限 = 1

(3) 为"$0\cdot\infty$"型未定式,由于 n 为离散变量,不能直接用罗必塔法则,只有将 x 置换 n 后使用,但较繁琐.若变形,用无穷小等价代换后,再计算,十分简捷.即