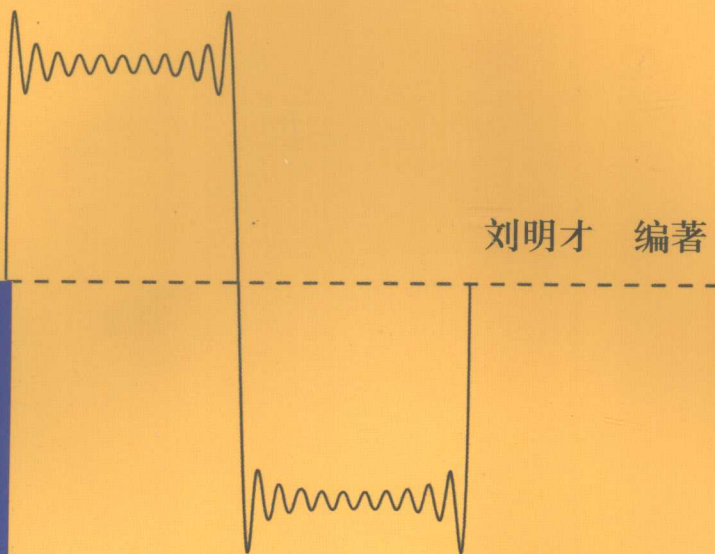


小波分析及其应用

(第2版)

刘明才 编著



清华大学出版社

810170318

0241.86
12-2

内容摘要

本书主要介绍小波分析在信号处理、图像处理、语音处理、医学图像处理、地震信号处理、金融时间序列分析、生物医学工程、通信工程、电力系统、机械振动、航空航天等领域的应用。本书共分8章，第1章介绍小波分析的基本概念，第2章介绍小波分析在信号处理中的应用，第3章介绍小波分析在图像处理中的应用，第4章介绍小波分析在语音处理中的应用，第5章介绍小波分析在医学图像处理中的应用，第6章介绍小波分析在金融时间序列分析中的应用，第7章介绍小波分析在生物医学工程中的应用，第8章介绍小波分析在通信工程中的应用。本书可作为高等院校相关专业师生、工程技术人员、科研人员、研究生、博士生、硕士生、本科生、专科生、中专生、技校生、职高生、职大生、函授生、自考生的教材，也可供从事相关工作的工程技术人员、科研人员、研究生、博士生、硕士生、本科生、专科生、中专生、技校生、职高生、职大生、函授生、自考生参考。

小波分析及其应用

(第2版)

刘明才 编著



清华大学出版社
北京

0241.86
12-2

12-2

810170310

内 容 简 介

本书主要介绍小波分析及其应用. 内容包括: 多分辨分析、正交小波(主要介绍 Daubechies 小波和样条小波)、双正交小波、小波包、多小波、多元小波、区间上的小波和小波变换. 应用方面主要介绍小波分析在信号处理、图像压缩和解积分方程方面的应用. 在各章最后一节安排了与之相关的 MATLAB 程序.

本书内容丰富、重点突出. 在内容安排上, 力争做到由浅入深、循序渐进, 适合不同读者的需要. 本书可作为理工科各专业本科生和研究生学习小波分析的教材, 也适合作为希望在小波分析这一领域进行研究和应用的科技工作者的参考书.

版权所有, 侵权必究. 侵权举报电话: 010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

小波分析及其应用/刘明才编著. --2版. --北京: 清华大学出版社, 2013
ISBN 978-7-302-33181-0

I. ①小… II. ①刘… III. ①小波分析—高等学校—教材 IV. ①O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 159629 号

责任编辑: 刘颖
封面设计: 常雪影
责任校对: 赵丽敏
责任印制: 杨艳

出版发行: 清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址: 北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编: 100084

社总机: 010-62770175 邮 购: 010-62786544

投稿与读者服务: 010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质量反馈: 010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者: 保定市中国画美凯印刷有限公司

经 销: 全国新华书店

开 本: 185mm×230mm 印 张: 11.5 字 数: 232 千字

版 次: 2005 年 9 月第 1 版 2013 年 8 月第 2 版 印 次: 2013 年 8 月第 1 次印刷

印 数: 1~3000

定 价: 24.00 元

产品编号: 049739-01

前 言

小波分析(wavelet analysis)是近 20 年来发展起来的数学分支,它是 Fourier 分析划时代发展的结果.它对数学和工程应用的发展都产生了深远的影响.小波分析广泛应用于信号处理、图像处理与分析、语音识别与合成、量子场论、地震勘探、CT 成像、机器视觉、机器故障诊断、自动控制、天体物理、分形等领域.原则上讲,传统上使用 Fourier 分析的地方,现在都可以用小波分析取代.小波分析优于 Fourier 分析的是,它在时域和频域同时具有良好的局部化性质.

本书详细论述了小波分析的基本概念、基本理论和基本算法,也介绍了小波分析的新热点——多小波等.在内容安排上,由浅入深、循序渐进,并在每章最后一节介绍了相关的 MATLAB 程序.本书共分 9 章,具体如下:

第 1 章简要介绍了 Fourier 级数和 Fourier 变换的基本概念和主要结论,由此导出小波分析的主要概念——正交小波.

第 2 章以 Haar 小波为例详细介绍了小波分析的主要思想和方法.这一章主要是为初学者编写的,目的是为第 3 章的学习奠定基础.

第 3 章详细介绍了多分辨分析的基本概念、基本理论和基本算法.多分辨分析是小波分析的主要内容,因而本章也是全书的主要内容.本章的一般定理和结论都给出了详细证明,主要算法也给出了例子,以便于读者理解和掌握.

第 4 章介绍了 Daubechies 小波的构造方法,并给出了常用的数据.

第 5 章介绍了 B 样条的基本概念和主要性质,并由此构造了正交样条小波.

第 6 章介绍了双正交小波的构造方法和例子.

第 7 章介绍了正交小波包和双正交小波包的概念和理论.

第 8 章介绍了小波分析的其他方面,如多小波、多元小波、区间上的小波、小波变换和提升小波等内容.

第 9 章主要介绍了小波分析在信号处理、图像压缩及解积分方程中的应用.

对于大学高年级学生,作者认为本书的第 1、2、3 章的全部内容、第 4 章的主要结论、第 7 章的第 1 节及第 8 章的第 4 节可作为一学期的选修课开设的主要内容.

本书作者多年来一直从事小波分析这一学科的教学和研究工作. 作者根据多年的经验积累, 并参考了国内外许多专家的论文、著作编写了本书, 引用了其中的观点、数据和结论, 在此一并表示感谢.

自本书第 1 版 2005 年出版以来, 得到了使用本书作为教材的老师、学生以及广大读者的热情关心, 他们对本书提出了许多非常好的建议. 作者在此基础上完成了本书的修订. 在此向广大读者及使用本书的老师表示衷心的感谢!

由于作者学识有限, 加上时间有限, 书中错误疏漏之处在所难免, 敬请读者批评、指正.

作者

2013 年 3 月

目 录	
第 1 章 概论	1
1.1 Fourier 级数	1
1.2 Fourier 变换	3
1.3 小波分析简介	5
1.4 MATLAB 简介	6
第 2 章 Haar 小波分析	10
2.1 Haar 尺度函数	10
2.2 Haar 小波	11
2.3 Haar 小波的分解与重构算法	14
2.3.1 分解算法	14
2.3.2 重构算法	16
2.4 有关 MATLAB 程序	18
第 3 章 多分辨分析	22
3.1 多分辨分析的主要理论	22
3.2 分解与重构算法	30
3.2.1 分解与重构算法的建立	30
3.2.2 分解与重构算法的实现	32
3.2.3 分解与重构算法的实例	34
3.3 尺度函数的一些重要性质	38
3.4 有关 MATLAB 程序	44
第 4 章 Daubechies 小波	47
4.1 一个简单的例子	47

4.2	Daubechies 小波的构造	49
4.3	Daubechies 小波的主要性质	58
4.3.1	Daubechies 小波的支集	58
4.3.2	Daubechies 小波的消失矩特性	59
4.3.3	Daubechies 小波的光滑性	62
4.4	Daubechies 小波的计算方法	63
4.5	有关 MATLAB 程序	66
第 5 章	样条小波	70
5.1	B 样条及其基本性质	70
5.2	样条多分辨分析	74
5.3	分解算法中的初始数据的计算	83
5.4	线性相位与对称性	84
5.5	有关 MATLAB 程序	86
第 6 章	双正交小波	89
6.1	双正交小波的概念	89
6.2	双正交小波的构造理论	90
6.3	双正交小波的一些性质	93
6.4	双正交小波的构造例子	94
6.5	有关 MATLAB 程序	101
第 7 章	小波包	105
7.1	正交小波包	105
7.1.1	正交小波包的概念	105
7.1.2	正交小波包的性质	106
7.1.3	$L^2(\mathbb{R})$ 的正交分解	109
7.2	双正交小波包	114
7.2.1	双正交小波包的概念	114
7.2.2	双正交小波包的性质	116
7.2.3	$L^2(\mathbb{R})$ 的双正交分解	122
7.3	有关 MATLAB 程序	125
第 8 章	小波分析的其他方面	129
8.1	多小波	129

8.1.1	多小波的概念与主要性质	129
8.1.2	多小波的例子	131
8.2	多元小波	133
8.2.1	多元小波的概念	133
8.2.2	张量积小波	135
8.3	区间上的小波	137
8.4	小波变换	140
8.4.1	基本小波的概念	140
8.4.2	小波变换	141
8.5	提升小波变换	144
8.5.1	Haar 小波提升法	144
8.5.2	一般小波提升方法	145
8.6	有关 MATLAB 程序	148
第 9 章	小波分析的应用	152
9.1	小波在信号处理中的应用	152
9.1.1	小波在信号消噪处理中的应用	153
9.1.2	小波在信号奇异性检测中的应用	153
9.2	小波在图像压缩方面的应用	156
9.3	小波在解积分方程中的应用	159
9.4	有关 MATLAB 程序	160
参考文献		168

第1章 概 论

小波分析 (wavelet analysis) 是近 20 年来发展起来的一门新兴数学分支, 它是 Fourier 分析划时代发展的结果. 小波分析的出现, 无论对数学, 还是对其他学科都产生了深远的影响, 并有广泛的应用领域. 本章主要介绍 Fourier 分析的一些主要内容和小波分析的基本概念.

在本书中, 我们采用如下符号: \mathbb{Z} 表示整数集, \mathbb{Z}^+ 表示非负整数集, \mathbb{R} 表示实数集 (实轴), \mathbb{C} 表示复数集.

Fourier 分析的主要内容包括 Fourier 级数和 Fourier 变换两个方面. 下面分别给以介绍.

1.1 Fourier 级数

设 $f(t)$ 是定义在实数集 \mathbb{R} 上以 2π 为周期的函数, 即 $f(t) = f(t + 2\pi)$, 且在 $(0, 2\pi)$ 上平方可积, 即有

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt < +\infty,$$

其中 $|f(t)|^2 = f(t)\overline{f(t)}$, 而 $\overline{f(t)}$ 是函数 $f(t)$ 的共轭函数. 一般情况下, 我们考虑复值函数, 实值函数可看作复值函数的特殊情况. 如果 $f(t)$ 是实值函数, 则有 $\overline{f(t)} = f(t)$.

我们用 $L^2(0, 2\pi)$ 表示在实数集 \mathbb{R} 上以 2π 为周期且在 $(0, 2\pi)$ 上平方可积函数的全体.

类似地, 我们也可以定义函数空间 $L^1(0, 2\pi)$ 为在实数集 \mathbb{R} 上以 2π 为周期且在 $(0, 2\pi)$ 上绝对可积函数的全体. 函数 $f(t)$ 绝对可积是指

$$\int_0^{2\pi} |f(t)| dt < +\infty.$$

可以验证, 函数集合 $L^2(0, 2\pi)$ 是 $L^1(0, 2\pi)$ 的子集, 即 $L^2(0, 2\pi) \subset L^1(0, 2\pi)$. 由于 $L^2(0, 2\pi)$ (实际上它是一个 Hilbert 空间) 具有许多好的性质, 而且在实际应用中遇到的

以 2π 为周期的函数,一般都属于 $L^2(0, \pi)$, 同时一般的周期函数也可以变换为以 2π 为周期的函数, 因此我们只讨论 $L^2(0, 2\pi)$ 空间中的函数.

在 $L^2(0, 2\pi)$ 中定义内积为

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt. \quad (1.1.1)$$

对于 $f, g \in L^2(0, 2\pi)$, 如果 $\langle f, g \rangle = 0$, 则称 f, g 是正交的, 并记作 $f \perp g$.

在 $L^2(0, 2\pi)$ 中定义范数为

$$\|f\| = \langle f, f \rangle^{1/2} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}. \quad (1.1.2)$$

下面给出 $L^2(0, 2\pi)$ 空间上的一些主要结论.

定理 1.1.1 对于任意 $f, g \in L^2(0, 2\pi)$, 有 Schwarz 不等式

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\| \quad (1.1.3)$$

以及三角不等式

$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\| \quad (1.1.4)$$

成立.

由于 $e^{it} = \cos t + i \sin t$, 通过计算可知

$$\langle e^{ikt}, e^{int} \rangle = \begin{cases} 0, & k \neq n, \\ 1, & k = n, \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z},$$

所以函数系 $\{e^{ikt}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 是标准正交系. 进一步有下面定理.

定理 1.1.2 函数系 $\{e^{ikt}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 是 $L^2(0, 2\pi)$ 的标准正交基, 即对任意 $f \in L^2(0, 2\pi)$, 有

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikt}, \quad (1.1.5)$$

其中

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt. \quad (1.1.6)$$

我们称 c_k 为 Fourier 系数, 称 (1.1.5) 式的右端是 $f(t)$ 的 Fourier 级数.

需要指出的是, 在公式 (1.1.5) 中, 两端相等是几乎处处相等, 而且级数的收敛是指在 $L^2(0, 2\pi)$ 中按下式收敛

$$\lim_{M, N \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left| f(t) - \sum_{k=-M}^N c_k e^{ikt} \right|^2 dt = 0,$$

即平方平均收敛.

如果对 $L^2(0, 2\pi)$ 中的函数再加上一定的条件, 还可得到其他的收敛形式.

定理 1.1.3 设 $f(t) \in L^2(0, 2\pi)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上分段连续, 并在 t 点的左右导数存在, 则它的 Fourier 级数在 t 点收敛, 即

$$\lim_{M, N \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{2} [f(t+0) + f(t-0)] - \sum_{k=-M}^N c_k e^{ikt} \right| = 0;$$

如果还在 t 点连续, 则有 $f(t+0) = f(t-0) = f(t)$.

定理 1.1.4 设 $f(t) \in L^2(0, 2\pi)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上连续且分段光滑, 则它的 Fourier 级数一致收敛于 $f(t)$.

对于函数及其 Fourier 系数还有一个重要的关系式, 即下面定理成立.

定理 1.1.5 对于公式(1.1.5)中的 $f(t)$ 和 $\{c_k\}$, 有 Parseval 恒等式

$$\|f\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 \quad (1.1.7)$$

成立.

在实际应用中, 各种信号可看作时间的函数, 而各种周期信号可用一个周期函数表示. 我们知道, 基函数 e^{ikt} 是一个“正弦波”, 而且 k 越大, 频率就越高, 所以可以将一个周期为 2π 的信号(函数)按公式(1.1.5)分解成各种频率的正弦波(e^{ikt})之和, 然后根据不同的需要进行不同的处理. 另外, 一个信号 f 的范数 $\|f\|$ 常常解释为它的能量. 如果信号 $f \in L^2(0, 2\pi)$, 则 f 是一个周期为 2π 的能量有限的信号. 从(1.1.5)式可以看出, 每个信号的 Fourier 系数的平方可表示对应频率成分的能量. 所以, 对 Parseval 恒等式(1.1.7)的物理解释是, 一个信号的能量等于它所包含的不同频率的能量之和.

1.2 Fourier 变换

我们知道, 如果一个函数是定义在某个有限区间上的, 可将该区间变换到 $[0, 2\pi]$, 并将这个函数周期化延拓, 变成实数集 \mathbb{R} 上的周期函数. 然而, 在各种问题中常出现定义在实数集 \mathbb{R} 上的非周期函数, 例如 $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$, $g(t) = e^{-t^2}$, $t \in \mathbb{R}$ 等, 这些函数无法周期化延拓, 从而不能展开成前面介绍的 Fourier 级数.

设 $p \geq 1$ 是任何自然数, 令 $L^p(\mathbb{R})$ 是由所有满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^p dt < +\infty$$

的函数组成的集合.

在 $L^p(\mathbb{R})$ 中定义范数为

$$\|f\|_p = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad f \in L^p(\mathbb{R}).$$

在不产生混淆的情况下, 常将 $\|\cdot\|_p$ 记为 $\|\cdot\|$.

我们主要考虑空间 $L^1(\mathbb{R})$ 和 $L^2(\mathbb{R})$. 注意, 空间 $L^1(\mathbb{R})$ 和 $L^2(\mathbb{R})$ 互不包含. 我们常用的函数一般都属于 $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

由于函数 e^{ix} 不属于 $L^2(\mathbb{R})$, 所以 $L^2(\mathbb{R})$ 中的函数不能写成像 (1.1.5) 式的 Fourier 级数那样的离散形式的和式, 但可写成连续形式的和式, 即积分.

设 $f(t)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的函数, $f(t)$ 的 Fourier 变换定义为

$$\mathcal{F}[f(t)] = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt; \quad (1.2.1)$$

$\hat{f}(\omega)$ 的 Fourier 逆变换定义为

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (1.2.2)$$

下面给出 Fourier 变换的一些主要结论.

定理 1.2.1 对任意 $f \in L^2(\mathbb{R})$, 则 $\hat{f}(\omega) \in L^2(\mathbb{R})$, 并且

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (1.2.3)$$

对于 $f(t), g(t) \in L^2(\mathbb{R})$, 定义内积如下:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{g(t)} dt. \quad (1.2.4)$$

那么, 对前面定义的范数, 有

$$\|f\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} = \langle f, f \rangle^{1/2}.$$

定理 1.2.2 对于任意 $f(t), g(t) \in L^2(\mathbb{R})$, 有 Parseval 恒等式成立:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle. \quad (1.2.5)$$

特别地, $\|f\|_2 = (2\pi)^{-1/2} \|\hat{f}\|_2$.

定理 1.2.3 设 $f(t) \in L^1(\mathbb{R})$, 则有:

(1) $|\hat{f}(t)| \leq \|f\|_1, t \in \mathbb{R}$;

(2) \hat{f} 在 \mathbb{R} 上一致连续;

(3) 如果 f 的导数 f' 也存在并且属于 $L^1(\mathbb{R})$, 则

$$\mathcal{F}[f'(t)] = i\omega \hat{f}(\omega);$$

(4) 如果 $tf(t) \in L^1(\mathbb{R})$, 则 $\hat{f}(\omega)$ 可微, 并且

$$[\hat{f}(\omega)]' = \mathcal{F}[-itf(t)];$$

(5) 当 $\omega \rightarrow -\infty$ 或 $\omega \rightarrow +\infty$ 时, $\hat{f}(\omega) \rightarrow 0$.

设 $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, f 与 g 的卷积定义为

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(t-x)dx. \quad (1.2.6)$$

显然有 $f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$.

定理 1.2.4 设 $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, 则 $f * g \in L^1(\mathbb{R})$, 并且有

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 \quad (1.2.7)$$

以及

$$\mathcal{F}[f(t) * g(t)] = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega). \quad (1.2.8)$$

以上我们介绍了 Fourier 变换的一些主要性质. Fourier 变换能较好地刻画信号的频率特性(ω 的特征),但不能提供信号在时频(t)上的任何局部信息. 利用 Fourier 变换研究信号的频域特性时,必须获得该信号在时域中的全部信息. 给定一个信号 $f(t)$,在许多情况下令人感兴趣的是信号局部范围内的特性,然而如果通过 Fourier 变换,信号的时域信息丢失了,就很难知道事件发生的确切时间. 小波变换解决了 Fourier 变换面临的时域和频域局部化的矛盾.

1.3 小波分析简介

我们知道,函数集 $\{e^{ikt}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 构成 $L^2(0, 2\pi)$ 的标准正交基,使 $L^2(0, 2\pi)$ 中的任意函数都能展成 Fourier 级数. 基函数 e^{ikt} 可看作是基本“建筑块”,一般的函数可由这些基本建筑块构成,从而给分析问题带来了方便. 另外,正交基 $\{e^{ikt}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 是由一个简单函数 $w(t) = e^{it}$ 的“膨胀”形成的,即 $w_k(t) = w(kt), k \in \mathbb{Z}$. 由此,我们可以将 $L^2(0, 2\pi)$ 看作是由单个函数 e^{it} 生成的空间. 我们知道, $L^2(\mathbb{R})$ 中的函数就不能写成 Fourier 级数的形式,这是由于 $L^2(\mathbb{R})$ 是和 $L^2(0, 2\pi)$ 完全不同的两个函数空间. 特别是,因为 $L^2(\mathbb{R})$ 中的每个函数(的局部平均值)在 $\pm\infty$ 必须“衰减”到零,显然“正弦波”函数 $w(t) = e^{it}$ 不属于 $L^2(\mathbb{R})$. 实际上,如果我们寻找产生 $L^2(\mathbb{R})$ 的“波”,那么这个波在 $\pm\infty$ 就衰减到零,而且在实际应用中,这个衰减应该是非常快的. 也就是说,我们要寻找小的波或称“小波”这样的函数 $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ 来生成 $L^2(\mathbb{R})$. 下面先介绍正交小波的概念(一般小波的概念在本书的 8.4 节介绍). 记

$$\psi_{jn}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - n), \quad j, n \in \mathbb{Z}; \quad (1.3.1)$$

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k, \end{cases} \quad j, k \in \mathbb{Z}. \quad (1.3.2)$$

定义 1.3.1 设一个函数 $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$, 如果函数族 $\{\psi_{jn}\}_{j, n \in \mathbb{Z}}$ 是 $L^2(\mathbb{R})$ 的一个标准正交基, 即

$$\langle \psi_{jn}, \psi_{km} \rangle = \delta_{jk} \cdot \delta_{nm}, \quad j, k, n, m \in \mathbb{Z}, \quad (1.3.3)$$

则称 $\psi(t)$ 为一个正交小波.

由定义, 如果函数 $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ 是一个正交小波, 则函数族 $\{\psi_{jn}\}_{j, n \in \mathbb{Z}}$ 构成 $L^2(\mathbb{R})$ 的一个标准正交基, 从而对任意函数 $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$, 有如下展开式:

$$f(t) = \sum_{j, n=-\infty}^{+\infty} c_{jn} \psi_{jn}(t), \quad (1.3.4)$$

其中(1.3.4)式中的级数是在 $L^2(\mathbb{R})$ 中收敛的, 即

$$\lim_{J, K, L, M \rightarrow +\infty} \left\| f - \sum_{j=-J}^K \sum_{n=-L}^M c_{jn} \psi_{jn} \right\|_2 = 0. \quad (8.3.1)$$

在(1.3.4)式中的级数称为函数 $f(t)$ 的小波级数, 其中 c_{jn} 称为小波系数. 在(1.3.4)式中, 两边关于 ψ_{jn} 取内积, 注意到正交性条件(1.3.3), 得到小波系数 c_{jn} 为

$$c_{jn} = \langle f, \psi_{jn} \rangle. \quad (1.3.5)$$

正交小波的最简单的例子是 Haar 小波:

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1/2, \\ -1, & 1/2 \leq t < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (1.3.6)$$

Haar 小波最初是由数学家 Haar 在 1910 年提出的, 那时还没有小波的概念, 叫做 Haar 函数. 按现在的观点, 它属于正交小波. 在第 2 章将给出关于 Haar 小波的较为详细的讨论, 并由此说明一般小波函数的构造方法.

1.4 MATLAB 简介

MATLAB 是 Matrix Laboratory(矩阵实验室)的简称, 是由美国 MathWorks 公司开发的集数值计算、符号计算和图形可视化三大基本功能于一体的功能强大、简单易学的软件. MATLAB 的命令和数学中的符号、公式非常接近, 可读性强, 容易掌握. 从 20 世纪 80 年代产生到现在, MATLAB 已发展成为适合多学科的大型软件, 除基本部分外, MATLAB 还根据各专门领域中的特殊需要提供了 30 多个工具箱, 如小波分析工具箱(Wavelet Toolbox)、信号处理工具箱(Signal Processing Toolbox), 以及图像处理工具箱(Image Processing Toolbox)等. 每一个工具箱都是为某一类学科专业和应用而定制的, 工具箱使用户能学习和应用专门的技术. 目前, 很多高校将 MATLAB 作为线性代数、数值分析、数理统计、优化方法、自动控制、数字信号处理以及小波分析等课程的基本教学工具.

本书每章最后一节将以 MATLAB 7.0 中的小波分析工具箱为工具, 结合本书内容给出一些 MATLAB 程序. 通过这些程序可以加深对所学知识的理解, 并掌握解决实际问题的方法.

下面介绍 MATLAB 的使用方法. 启动 MATLAB 后, 就进入 MATLAB 的界面. 在命令窗口(Command Window)的第一行中单击“MATLAB Help”或“Demos”, 可打开 MATLAB 帮助文件或演示文件, 了解 MATLAB 各部分的使用方法.

例 1.4.1 求解一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 当 $a=2, b=7, c=3$ 时的根.

1. 交互式方式(命令行方式)

在命令窗口的提示符“>>”后输入表达式或命令, 例如求解例 1.4.1 的命令如下:

```

>>a=2;
>>b=7;
>>c=3;
>>x1=(-b+sqrt(b*b-4*a*c))/(2*a)
x1 =
    -0.5000
>>x2=(-b-sqrt(b*b-4*a*c))/(2*a)
x2 =
    -3

```

命令所求方程的两个根分别是 $x_1 = -0.5$ 和 $x_2 = -3$ 。在命令(语句)或表达式后输入分号“;”，系统不显示结果，否则显示结果。函数 `sqrt` 是系统提供的求平方根的函数。MATLAB 提供了大量的函数，可供用户直接使用。用户可用 `help` 命令查看函数功能和使用方法，例如输入

```
help sqrt
```

则系统显示 `sqrt` 的功能。

2. 程序方式

在 MATLAB 语言中，包含代码的文件称为 M 文件。用文本编辑器创建 M 文件，像使用其他的 MATLAB 函数或命令一样使用它们。有两种 M 文件：

命令文件：不需要在其中输入参数或返回输出结果。可以在工作空间运行数据。

函数文件：需要给定输入参数和返回输出结果。函数文件内定义的变量仅在函数文件内部起作用。

(1) 求解例 1.4.1 的命令文件如下：

```

a=2;
b=7;
c=3;
x1=(-b+sqrt(b*b-4*a*c))/(2*a)
x2=(-b-sqrt(b*b-4*a*c))/(2*a)

```

说明 MATLAB 软件运行后，在命令窗口输入命令 `edit`，打开文本编辑器，将上面程序输入并存盘，文件名为 `root1.m`。然后在命令窗口输入 `root1` 后即可输出计算结果。

(2) 求解例 1.4.1 的函数文件如下：

```

function [x1,x2]=roots2(a,b,c)
% 函数 roots2 的功能是计算一元二次方程 ax^2+bx+c=0 的根
% a,b,c 是输入参数(方程的系数)

```

```
% x1,x2 是输出参数(方程的两个根)
x1=(-b+sqrt(b*b-4*a*c))/(2*a);
x2=(-b-sqrt(b*b-4*a*c))/(2*a);
```

说明 函数文件的基本结构为:

```
function 输出形参表=函数名(输入形参表)
注释说明部分
函数体语句
```

注释说明部分是由%引导的行,对程序进行说明.注释部分可以省略,不影响程序的执行效果.将上面程序输入并存盘,文件名为 roots2.m(要与函数名相同).然后在命令窗口输入 $[r1,r2]=\text{roots2}(2,7,3)$,即可输出计算结果 $r1$ 和 $r2$.

例 1.4.2 用 MATLAB 绘制 Haar 小波图形.

1. 根据(1.3.6)式编写计算 Haar 小波的函数文件 psi.m.

函数文件 psi.m 如下:

```
function y=psi(t)
%y=psi(t) 计算 Haar 小波函数值
n=length(t);
for k=1:n
    if t(k)<0 || t(k)>=1
        y(k)=0;
    elseif t(k)<0.5
        y(k)=1;
    else
        y(k)=-1;
    end
end
```

2. 根据(1.3.1)式编写计算 Haar 正交小波基的几个函数的命令文件 haar.m.

命令文件 haar.m 如下:

```
clear; %清除内存中的变量和函数
t=linspace(-0.5,2.5,1000); %产生-0.5,2.5之间的1000点行向量
psi00=psi(t); %计算 Haar 小波函数值 psi00
subplot(221); %将图形窗口分成 2x2 个坐标轴,并选第 1 个输出下面图形
plot(t,psi00); %画出数据 psi00 的图形
```



```

axis([-0.5 2.5 -2.2 2.2]);           %设置坐标轴
title('函数{\sl\psi_{00}}(t)的图形'); %显示图形标题
%计算并画出 psi01 的图形
psi01=psi(t-1);
subplot(222);
plot(t,psi01);
axis([-0.5 2.5 -2.2 2.2]);
title('函数{\sl\psi_{01}}(t)的图形');
%计算并画出 psi11 的图形
psi10=sqrt(2) * psi(2 * t);
subplot(223);
plot(t,psi10);
axis([-0.5 2.5 -2.2 2.2]);
title('函数{\sl\psi_{10}}(t)的图形');
%计算并画出 psi21 的图形
psi21=2 * psi(4 * t-1);
subplot(224);
plot(t,psi21);
axis([-0.5 2.5 -2.2 2.2]);
title('函数{\sl\psi_{21}}(t)的图形');

```

程序 haar.m 运行输出结果如图 1.4.1 所示。

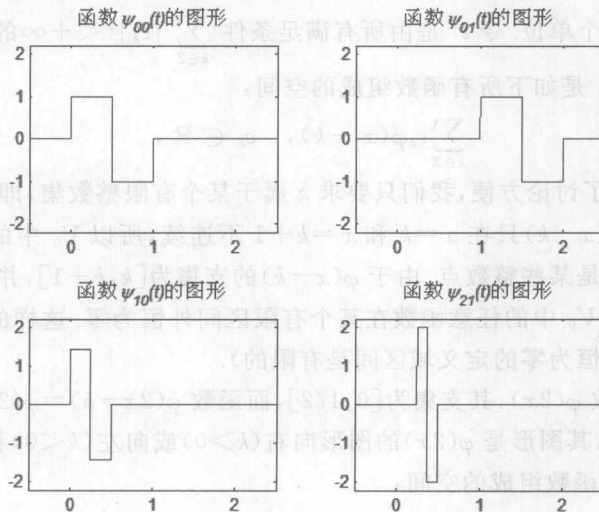


图 1.4.1 Haar 小波基的几个函数图形