研究生教学用书

公共基础课系列

实用小波方法

（第二版）

Practical Wavelet Method

徐长发　李国宽

BOOKS FOR GRADUATE STUDENTS

华中科技大学出版社

研究生教学用书

公 共 基 础 课 系 列

实用小波方法

（第二版）

徐长发　李国宽

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

实用小波方法(第二版)/徐长发　李国宽
武汉:华中科技大学出版社，2004年1月
ISBN 7-5609-2454-9

Ⅰ.实…
Ⅱ.①徐…　②李…
Ⅲ.小波分析-研究生-教材
Ⅳ.O177

实用小波方法(第二版)　　　　徐长发　李国宽

责任编辑:徐正达　　　　封面设计:潘　群
责任校对:刘　飞　　　　责任监印:熊庆玉

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87542624

录　排:华中科技大学出版社照排室
印　刷:湖北科学技术出版社黄冈印刷厂

开本:787×960　1/16　　印张:13　　字数:228 000
版次:2004年1月第2版　　印次:2004年1月第2次印刷　　定价:16.80元
ISBN 7-5609-2454-9/O·229

内容简介

本书用通俗的数学语言介绍了小波理论及其应用的基本知识，围绕时-频分析需要的问题，讨论了 Fourier 变换和窗口 Fourier 变换的不足之处，详细分析了小波变换的基本原理，详细阐述了多分辨逼近和小波分解的基本思想，详细讨论了离散小波变换及其快速算法的实现过程，介绍了几种常用的小波及其构造方法，还给出了多方面应用例子并分析了小波方法在应用中的基本原理.

本书内容丰富，深入浅出，利于实用和读者自学，可作为高等院校理工科本科高年级学生和研究生的教材，也可作为从事信号处理研究的技术人员的参考书.

Abstract

This book aims at providing the reader with the basic knowledge of wavelet theory and its practical application in concise mathematical language. In this book, centering on the question of the requirement for time-frequency analysis, the defects of Fourier Transform and Window Fourier Transform are discussed. The basic principle of wavelet is introduced in detail. The fundamental concept of multi-resolution and wavelet decomposition are illustrated. Implementation of discrete wavelet transform and its fast algorithms, several commonly-used wavelets and their construction methods are investigated. In addition, some application examples in many respects are demonstrated, and principle of wavelet application is analyzed.

This book is characterized by substantial content and beneficial to self-study learners. It can be used as teaching material for senior undergraduates postgraduates, and serve as a reference for researchers in signal processing area.

写在“研究生教学用书”出版15周年前岁

“接天莲叶无穷碧，映日荷花别样红.”今天，我国的教育正处在一个大发展的崭新时期，而高等教育即将跨入“大众化”的阶段，蓬蓬勃勃，生机无限. 在高等教育中，研究生教育的发展尤为迅速. 在盛夏已临，面对池塘中亭亭玉立的荷花，风来舞举的莲叶，我深深感到，我国研究生教育就似夏季映日的红莲，别样多姿.

党的十六大报告以空前的力度强调了“科教兴国”的发展战略，强调了教育的重大作用，强调了教育的基础性全局性先导性，强调了在社会主义建设中教育的优先发展的战略地位. 从报告中，我们可以清楚看到，对高等教育而言，不仅赋予了重大的历史任务，而且更明确提出了要培养一大批拔尖创新人才. 不言而喻，培养一大批拔尖创新人才的历史任务主要落在研究生教育肩上. “百年大计，教育为本；国家兴亡，人才为基.”国家之间的激烈竞争，在今天，归根结底，最关键的就是高级专门人才，特别是拔尖创新人才的竞争. 由此观之，研究生教育的任务可谓重矣！ 重如泰山！

前事不忘，后事之师. 历史经验已一而再、再而三地证明：一个国家的富强，一个民族的繁荣，最根本的是要依靠自己，要以“自力更生”为主.《国际歌》讲得十分深刻，世界上从来就没有什么救世主，只有依靠自己救自己. 寄希望于别人，期美好于外力，只能是一种幼稚的幻想. 内因是发展的决定性的因素. 当然，我们决不应该也决不可能采取“闭关锁国”，自我封闭，固步自封的方式来谋求发展，重犯历史错误. 外因始终是发展的必要条件. 正因为如此，我们清醒看到了，“自助者人助”，只有“自信、自尊、自主、自强”，只有独立自主，自强不息，走以“自力更生”为主的发展道路，才有可能在向世界开放中，争取到更多的朋友，争取到更多的支持，充分利用好外部的各种有利条件，来扎扎实实地而又尽可能快地发展自己. 这一切的关键就在于，我们要有数量与质量足够的高级专门人才，特别是拔尖创新人才. 何况，在科技高速发展与高度发达，而知识经济已初见端倪的今天，更加如此. 人才，

高级专门人才，拔尖创新人才，是我们一切事业发展的基础.基础不牢，地动山摇；基础坚牢，大厦凌霄；基础不固，木凋树枯；基础深固，硕茂葱绿！

“工欲善其事，必先利其器.”自古凡事皆然，教育也不例外.教学用书是“传道授业解惑”培育人才的基本条件之一.“巧妇难为无米之炊”.特别是在今天，学科的交叉及其发展越来越多及越快，人才的知识基础及其要求越来越广及越高，因此，我一贯赞成与支持出版“研究生教学用书”，供研究生自己主动地选用.早在1990年，本套用书中的第一本即《机械工程测试·信息·信号分析》出版时，我就为此书写了个“代序”，其中提出：一个研究生应该博览群书，博采百家，思路开阔，有所创见.但这不等于他在一切方面均能如此，有所不为才能有所为.如果一个研究生的主要兴趣与工作不在某一特定方面，他也可选择一本有关这一特定方面的书作为了解与学习这方面知识的参考；如果一个研究生的主要兴趣与工作在这一特定方面，他更应选择一本有关的书作为主要的学习用书，寻觅主要学习线索，并缘此展开，博览群书.这就是我赞成要为研究生编写系列的“研究生教学用书”的原因.今天，我仍然如此来看.

还应提及一点，在教育界有人讲，要教学生“做中学”，这有道理；但须补充一句，“学中做”.既要在实践中学习，又要在学习中实践，学习与实践紧密结合，方为全面；重要的是，结合的关键在于引导学生思考，学生积极主动思考.当然，学生的层次不同，结合的方式与程度就应不同，思考的深度也应同.对研究生特别是对博士研究生，就必须是而且也应该是“研中学，学中研”，在研究这一实践中，开动脑筋，努力学习，在学习这一过程中，开动脑筋，努力研究；甚至可以讲，研与学通过思考就是一回事情了.正因为如此，“研究生教学用书”就大有英雄用武之地，供学习之用，供研究之用，供思考之用.

在此，还应进一步讲明一点.作为一个研究生，来读“研究生教学用书”中的某书或其他有关的书，有的书要精读，有的书可泛读.记住了书上的知识，明白了书上的知识，当然重要；如果能照着用，当然更重要.因为知识是基础.有知识不一定有力量，没有知识就一定没有力量，千万千万不要轻视知识.对研究生特别是博士研究生而言，最为重要的还不是知识本身这个形而下，而是以知识作为基础，努力通过某

种实践，同时深入独立思考而体悟到的形而上，即《老子》所讲的不可道的“常道”，即思维能力的提高，即精神境界的升华.《周易·系辞》讲了：“形而上谓之道，形而下谓之器.”我们的研究生要有器，要有具体的知识，要读书，这是基础；但更要有“道”，更要一般，要体悟出的形而上.《庄子·天道》讲得多么好：“书不过语.语之所贵者意也，意有所随.意之所随者，不可以言传也.”这个“意”，就是孔子所讲的“一以贯之”的“一”，就是“道”，就是形而上.它比语、比书，重要多了.要能体悟出形而上，一定要有足够数量的知识作为必不可缺的基础，一定要在读书去获得知识时，整体地读，重点地读，反复地读；整体地想，重点地想，反复地想.如同韩愈在《进学解》中所讲的那样，能“提其要”，“钩其玄”，以达到南宋张孝祥所讲的“悠然心会，妙处难与君说”的体悟，化知识为己之素质，为“活水源头”.这样，就可驾驭知识，发展知识，创新知识，而不是为知识所驾驭，为知识所奴役，成为计算机的存储装置.

这套“研究生教学用书”从第一本于 1990 年问世以来，到明年，就经历了不平凡的 15 个春秋.从研究生教育开始以来，我校历届领导都十分关心研究生教育，高度重视研究生教学用书建设，亲自抓研究生教学用书建设；饮水思源，实难忘怀！“逝者如斯夫，不舍昼夜.”截至今天，“研究生教学用书”的出版已成了规模，蓬勃发展.目前已出版了用书 69 种，有的书发行了数万册，有 22 种分别获得了国家级、省部级教材奖、图书奖，有数种已为教育部列入向全国推荐的研究生教材，有 20 种一印再印，久销不衰.采用此书的一些兄弟院校教师纷纷来信，称赞此书为研究生培养与学科建设做出了贡献.我们深深感激这些鼓励，“衷心藏之，何日忘之?!”没有读者与专家的关爱，就没有我们“研究生教学用书”的发展.

唐代大文豪李白讲得十分正确：“人非尧舜，谁能尽善?”我始终认为，金无足赤，物无足纯，人无完人，文无完文，书无完书.“完”全了，就没有发展了，也就“完”蛋了.江泽民同志在党的十六大报告中讲得多么深刻：“实践没有止境，创新也没有止境.”他又指出，坚持“三个代表”重要思想的关键是与时俱进.这套“研究生教学用书”更不会例外.这套书如何?某本书如何?这样的或那样的错误、不妥、疏忽或不足，必然会有.但是，我们又必须积极、及时、认真而不断地加以改进，与时俱进，奋发前进.我们衷心希望与真挚感谢读者与专家不吝指教，及时批

评.当局者迷,兼听则明;“嘤其鸣矣,求其友声.”这就是我们肺腑之言.当然,在这里,还应该深深感谢“研究生教学用书”的作者、审阅者、组织者(华中科技大学研究生院的有关领导和工作人员)与出版者(华中科技大学出版社的编辑、校对及其全体同志);深深感谢对“研究生教学用书”的一切关心者与支持者,没有他们,就决不会有今天的“研究生教学用书”.

我们真挚祝愿,在我们举国上下,万众一心,在“三个代表”重要思想的指引下,努力全面建设小康社会,加速推进社会主义现代化,为实现中华民族伟大复兴,“芙蓉国里尽朝晖”这一壮丽事业中,让我们共同努力,为培养数以千万计高级专门人才、特别是一大批拔尖创新人才,完成历史赋予研究生教育的重大任务而做出应有的贡献.

谨为之序.

中国科学院院士
华中科技大学学术委员会主任
杨叔子
2003年7月于喻园

前　言

小波分析是在 Fourier 分析的基础上发展起来的.作为时-频分析方法,小波分析比 Fourier 分析有着许多本质性的进步.小波分析提供了一种自适应的时域和频域同时局部化的分析方法,无论分析低频或高频局部信号,它都能自动调节时-频窗,以适应实际分析的需要.小波分析在局部时-频分析中具有很强的灵活性,能聚焦到信号时段和频段的任意细节,被喻为时-频分析的显微镜.小波分析的快速算法为分析和解决实际问题带来极大的方便.它的这些特点使得时-频分析的方法和应用得到了辉煌的发展.现在,小波分析方法已广泛应用于信号处理、图像处理、模式识别、语音识别、地震勘探、CT 成像、计算机视觉、航空航天技术、故障监控、通信与电子系统等众多的学科和相关技术的研究中.由小波分析方法带来的高新技术成果迅速增加,其研究正在向纵深发展.

小波分析之所以得到如此广泛的应用,完全归功于它的数学机理的创见性和完善性.小波分析是泛函分析、调和分析、时-频分析、数值分析、逼近论和广义函数论等众多学科知识完美结合的结晶,具有完善的理论体系.然而,小波分析的研究背景是具体的,理论和方法是实用的,实现过程是简便的.**数学工作者有责任**突破其复杂的数学障碍,显现其实用本质,**让小波分析方法和 Fourier 分析方法一样,成为一种基础的、普及的、容易为广大读者所掌握和应用的数学工具**.

作者试图为广大读者提供一本便于自学和实用的小波分析教科书.为此,本书以阐述小波分析的基本原理、算法实现和基本应用为出发点,贯串着便于自学、理解的主线条,层层深入地讨论和解决问题,用通俗易懂的数学形式来描述和解释全书内容.读者仅具备高等数学基础知识和一般的计算方法方面的基础知识就可顺利阅读.因此,**强调可读性、强调实用性、强调理论和实践的统一是本书的特点**.

作者研究小波分析及其应用十多年,多次讲授小波分析课程,本书在原讲义的基础上修改而成.借本书出版之际,对支持本书写作的同仁们一并表示感谢,也敬请广大读者指出本书中的不足之处.

作　者

2003 年 10 月

目　录

第1章 Fourier 分析

众所周知,一个复杂的波形可以看做一个函数或模拟信号,也可以看做一种复杂的振动现象,它是由许多不同频率、不同振幅的谐波叠加而成的. 例如,光波为不同强度、不同波长的单色光的叠加,光波可分解为光谱. 声音也可分解为不同音调、不同音强的声谱. 天线回路中的复杂电信号可分解为不同频率、不同振幅的简谐电磁波. Fourier 分析就是对函数(模拟信号)作谐波分解、合成和分析的有力的数学工具,它在声学、光学、电学、力学等学科,特别是在数字信号处理方面,都有着非常广泛的应用.

本章介绍 Fourier 分析的基本性质、基本应用和基本注意事项,这些知识是学习以后各章节的基础知识.

1.1 函数(模拟信号)的 Fourier 级数

1. 物理背景

众所周知,以 2π 为周期的复杂的波都可以用以 2π 为周期的函数(模拟信号) $f(t)$ 来描述,物理实验也表明,它可由形如 $A_n\sin(nt+\theta_n)$ 的若干谐波叠加而成. 换句话说,以 2π 为周期的函数(模拟信号) $f(t)$ 可分解为不同频率、不同振幅和不同相位的谐波信号. 因此,完全有理由认为 $f(t)$ 有如下的表现形式:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n\sin(nt+\theta_n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n\sin\theta_n\cos nt + A_n\cos\theta_n\sin nt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos nt + b_n\sin nt. \end{aligned} \tag{1.1}$$

其中, $A_n\sin(nt+\theta_n)$ 称为**第 n 次谐波**, A_n 表现**振幅**, n 表现**频率**, θ_n 表现**相位**.

为了确定式(1.1)中的系数 a_n 和 b_n,要用公式

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx\,\mathrm{d}x = 0,\ m,n = 0,1,\cdots,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,\mathrm{d}x = \begin{cases}0, & m\neq n,\\ \pi, & m=n,\end{cases}\quad m,n=1,2,\cdots,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,\mathrm{d}x = \begin{cases}0, & m\neq n,\\ \pi, & m=n,\end{cases}\quad m,n=1,2,\cdots.$$

在式(1.1)两边同乘以 $\cos nx$ 或 $\sin nx$，并在$[-\pi,\pi]$上积分，就可得到以 2π 为周期的函数(模拟信号)的 Fourier 级数，即

$$\begin{cases} f(t)=\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nt+b_n\sin nt, \\ a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\mathrm{d}t,\ n=0,1,\cdots, \\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nt\mathrm{d}t,\ n=1,2,\cdots. \end{cases} \tag{1.2}$$

只要对式(1.2)的自变量 t 作变换，令

$$t=\frac{2\pi}{T}x,$$

就可得到以 T 为周期的函数(模拟信号)的 Fourier 级数，即

$$\begin{cases} f(t)=\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\Delta\omega t+b_n\sin n\Delta\omega t), \\ a_n=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\cos n\Delta\omega t\mathrm{d}t,\ n=0,1,\cdots, \\ b_n=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\sin n\Delta\omega t\mathrm{d}t,\ n=1,2,\cdots, \\ \Delta\omega=2\pi/T. \end{cases} \tag{1.3}$$

对式(1.2)作简单变形，$f(t)$的 Fourier 级数还可表现为另一形式，即

$$f(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}A_n\sin(n\Delta\omega t+\theta_n).$$

其中，$A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$和 $\theta_n=\arctan(b_n/a_n)$分别表现频率为$n\Delta\omega$的谐波的振幅和相位.

式(1.2)和式(1.3)表明，周期为 T 的函数确实可以分解为若干简谐波之和，但这些谐波的频率是离散出现的，不是连续出现的，它们是基频 $\Delta\omega$ 的整数倍.

2. 可用 Fourier 级数表示的函数

函数(模拟信号)可能有间断，这类函数可以展开为 Fourier 级数吗?

定理 1.1　设 $f(t)$是以 T 为周期的实函数，且在$[-T/2,T/2]$上连续或仅有有限个第一类间断点，允许有有限个极值点而不允许无穷振荡. 那么在 $f(t)$的连续点处，级数(1.2)收敛于 $f(t)$；在$f(t)$的间断点处，级数(1.2)收敛于

$$[f(t-0)+f(t+0)]/2,\text{即收敛于左、右端值的中间值}.$$

若仅在$[-T/2,T/2]$上有一段信号 $f(t)$，可从两个方面理解它的 Fourier 级数. 一方面是关于 $f(t)$表现为级数的，可理解 $f(t)$作周期延拓成周期为 T 的函数，利用定理 1.1，$f(t)$可表示为 Fourier 级数；另一方面是关于 Fourier 级数表现实际信号 $f(t)$的，虽然级数在 $\mathbf{R}$ 上都有表现，但在$[-T/2,T/2]$区段上才是表现真实信号的. 另外，虽然在间断点处出现中间值，实际信号并无此表现，但是这不会影响

对原信号的讨论.

将一段信号 $f(t), t\in[0,T/2]$延拓成周期为 T 的函数,可作奇延拓,也可作偶延拓. 若作奇延拓,则 $f(t)$是周期为 T 的函数,在$[-T/2,T/2]$上是奇函数,它的 Fourier 级数中仅含 $\sin n\Delta\omega t$ 项. 若作偶延拓,$f(t)$在$[-T/2,T/2]$上是偶函数,它的 Fourier 级数中仅含 $\cos n\Delta\omega t$ 项.

3. Fourier 级数的复指数形式

利用复变函数的基本知识,把

$$\cos n\Delta\omega t = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\Delta\omega t} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\Delta\omega t}),$$

$$\sin n\Delta\omega t = \frac{\mathrm{i}}{2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\Delta\omega t} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\Delta\omega t})$$

代入式(1.2),就有

$$\begin{cases} f(t) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\Delta\omega t}, \\ c_n = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\Delta\omega t}\mathrm{d}t, \end{cases} \quad n \in \mathbf{Z}. \tag{1.4}$$

称式(1.2)和式(1.3)为 Fourier 级数的三角形式,称式(1.4)为 Fourier 级数的复指数形式. 这两种表现形式之间的联系可由下面的关系式来体现:

$$\begin{cases} c_n = \mathrm{Re}c_n + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}c_n, \\ \mathrm{Re}c_n = a_n/2, \quad \mathrm{Im}c_n = b_n/2, \\ \mathrm{Re}c_n = \mathrm{Re}c_{-n}, \quad \mathrm{Im}c_n = -\mathrm{Im}c_{-n}, \\ |c_n| = |c_{-n}| = \dfrac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2} = A_n/2, \\ \arg c_n = -\arg c_{-n} = \theta_n = \arctan(b_n/a_n), \quad n = 0,1,2,\cdots. \end{cases} \tag{1.5}$$

Fourier 级数的三角形式是仅用正频率的谐波来表现周期函数 $f(t)$的,这是一种接近物理实验的形式;Fourier 级数的复指数形式要用正频率和负频率一起来表现周期函数 $f(t)$,它不仅可以转化为三角形式,而且在表现方面接近于后面即将介绍的 Fourier 变换的形式.

时域中以 T 为周期的函数(模拟信号)$f(t)$展开为 Fourier 级数,从数学角度看,它有两方面的应用. 一方面,时域中的 $f(t)$仅是宏观表现的,但其 Fourier 级数却表现了频域中的细节(各种谐波成分),时域中周期函数(模拟信号)关于叠加、平移、放缩、卷积、相关、微分、积分等数学运算也可转化到频域中作细致分析. 这些分析性质类似于 Fourier 变换的相关性质,将在后面讨论. 另一方面,Fourier 级数是一个无穷项的级数,取其有限项可近似地表现原来的 $f(t)$,项数取得越多,逼近程度越好. 人们可进一步分析这种近似逼近的误差、特点和效果.

$f(t)$展开为 Fourier 级数,从离散实际模拟信号的时-频分析角度看,$f(t)$与一组离散数据$\{c_n\}$是一一对应的,这种表现也有相应的两方面的应用.一方面,人们可以将时域周期信号 $f(t)$转化为离散数据$\{c_n\}$来分析,这能区别不同信号在谐波分量方面的不同之处,找出细微的区别特征.另一方面,人们可利用离散数据$\{c_n\}$回复表现时域中的周期信号.修改离散数据就相当于修改了时域中的周期信号.

4. 函数(模拟信号)的频谱

根据 Fourier 级数定义和物理含义可知,要观察和分析某个时域周期函数(模拟信号),只要观察和分析 Fourier 级数的展开系数$\{c_n\}$就可以了. $\mathrm{Re}c_n=a_n/2=\mathrm{Re}c_{-n}$,它们关于 $n=0$ 偶对称,c_n 的实部能表现谐波分量 $\cos n\Delta\omega t$ 的大小;$\mathrm{Im}c_n=b_n/2=-\mathrm{Im}c_n$,它们关于 $n=0$ 奇对称,c_n 的虚部能表现谐波分量 $\sin n\Delta\omega t$ 的大小.据此理由,称$\{c_n\}$为**离散频谱**.复系数 c_n 的模量$|c_n|=A_n/2$,它反映了频率为 $n\Delta\omega$ 的谐波分量的幅值大小,它是关于 $n=0$ 偶对称的,称$\{|c_n|\}$为**离散振幅谱**. $|c_n|^2=A_n^2/4$ 反映了关于频率为 $n\Delta\omega$ 谐波分量的能量,它关于 $n=0$ 偶对称,称$\{|c_n|^2\}$为**离散功率谱**. c_n 的复角 $\arg c_n=\theta_n=\arctan(b_n/a_n)$关于 $n=0$ 奇对称,它反映了频率为 $n\Delta\omega$ 谐波分量的相位,称$\{\arg c_n\}$为**离散相位谱**.现将这些量示意于图 1.1 中.通常分析中仅用到振幅谱、功率谱和相位谱这三种图谱.

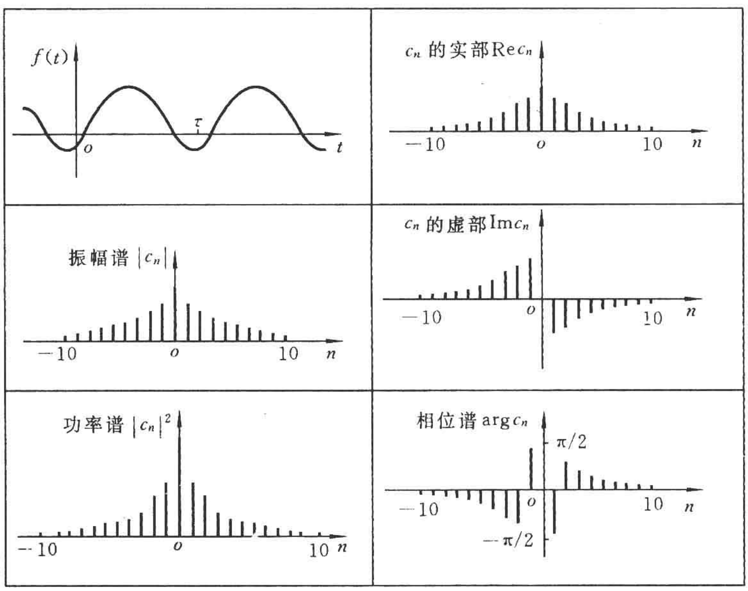

图 1.1　Fourier **级数频谱示意图**

应该看到,完全不同性质的两个信号或者有局部区别的两个信号,它们的区别一定会在频谱图中有所表现.可结合 Fourier 级数的性质具体地判断时域和频域

的不同表现. 例如,对同一周期信号的不同周期段而言,因为它仅仅是原周期信号的平移表现,所以它们的离散振幅谱和离散功率谱是相同的,但它们的离散相位谱有区别. 又例如,对不同性质的两个信号而言,因为它们的本质特性有区别,所以它们的离散振幅谱、离散功率谱和离散相位谱都是不相同的. 这就是说,时域信号的不同特征都会细微地表现在离散频谱中,这就是 Fourier 级数能够用于分析信号特征的应用原理.

5. 时域函数(模拟信号)的回复

利用 $f(t)$ 的频谱 $\{c_n\}$ 数据,利用它与 Fourier 级数的关系,理论上可准确地回复 $f(t)$;但在实际应用中,仅能利用 $\{c_n\}$ 的有限数据来近似回复 $f(t)$.

若 $f(t)$ 是光滑的周期函数,通过理论分析知,当 $f(t)$ 是 m 次连续可微函数即 $f(t)\in C^m$ 时,有

$$|c_n| = O\left(\frac{1}{|n|^{m+2}}\right),\ n\in \mathbf{Z},\ |n|\to\infty.$$

这就是说,函数越光滑,当 $|n|\to\infty$ 时 $|c_n|$ 下降就越快,在这种情况下,就可以用较少项数的 Fourier 级数较好地近似回复 $f(t)$.

若 $f(t)$ 是有间断的周期函数,t_0 是其间断点,用不同项数的 Fourier 级数近似回复 $f(t)$ 的表现如图 1.2 所示. 由图可见,无论取多少项,其回复结果在间断点 t_0 处的值总是等于 $[f(t_0-0)+f(t_0+0)]/2$;级数的项数取得越多,对曲线的光滑部分的近似效果越好,但在曲线的间断点附近会出现振荡且振荡越来越激剧,振荡超调量 ε 总维持在 0.089 左右. 这一现象称为 Gibs 现象,是由于过多引进高频量且高频量的幅值不能减小所造成的.

Fourier 级数对函数(模拟信号)的逼近效果在数值分析中有相关的描述. 在 Fourier 级数中 $\{e^{-in\Delta\omega t}\}$ 是正交基. 若记近似回复函数为

$$f_k(t) = \sum_{n=-k}^{k} c_n e^{-in\Delta\omega t},$$

记其误差为

$$\|f(t)-f_k(t)\|_2^2 = \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)-f_k(t)|^2 dt,$$

则 $f_k(t)$ 是对 $f(t)$ 的最佳平方逼近,且

$$\|f(t)\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2,$$

$$\|f_k(t)\|_2^2 = \sum_{n=-k}^{k} |c_n|^2,$$

$$\|f(t)-f_k(t)\|_2^2 = \sum_{|n|\geqslant k+1} |c_n|^2,$$

$$\|f(t)-f_{k+1}(t)\| \leqslant \|f(t)-f_k(t)\|_2.$$

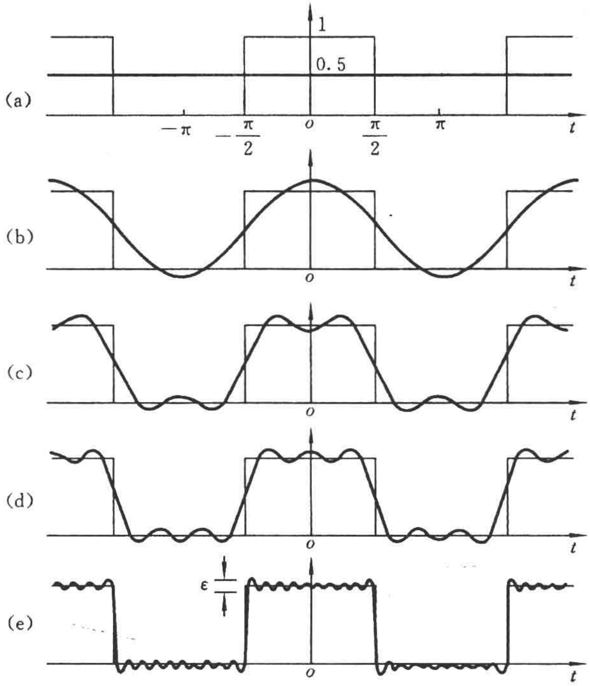

图 1.2　方波信号、高次谐波之和与 Gibs 现象

从 Fourier 级数的时域和频域的对应关系方面来考虑问题，因为修改频谱 $\{c_n\}$ 相当于修改信号 $f(t)$ 的时域表现，所以可以按照某些实际要求去修改频谱，也可以在频域中设计出具有某种特性(例如对谐波频率的低通、带通、高通特性)的频谱，再将其回复到时域则可得到满足各种要求和特性的时域信号了.

1.2　函数(模拟信号)的 Fourier 变换

前面讨论了周期函数可用离散频率为 $n\Delta\omega$ 的谐波来表现. 一个定义在 $\mathbf{R}$ 上的非周期函数 $f(t)$ 能否用谐波来表现呢？

1. Fourier 积分公式

将非周期函数 $f(t)$ 看做周期为 T 的函数 $f_T(t)$ 当周期 $T \to +\infty$ 时转化的结果. 于是，利用式(1.4)，有

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \lim_{T \to +\infty} f_T(t) \\
&= \lim_{T \to +\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(\tau) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\Delta\omega\tau} \mathrm{d}\tau \right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\Delta\omega t} \\
&= \frac{1}{2\pi} \lim_{\Delta\omega \to 0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\left(\int_{-\pi/\Delta\omega}^{\pi/\Delta\omega} f_T(\tau) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\Delta\omega\tau} \mathrm{d}\tau \right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\Delta\omega t} \right] \Delta\omega
\end{aligned}
$$