高等学校试用教材

高等数学

线性代数与矢量分析

（物理专业用）

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

主编：李金铭　刘金海

西南交通大学出版社
SOUTHWEST JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

高等学校试用教材

高 等 数 学

线性代数与矢量分析

物理专业用

主　编　李金铭　刘金海
副主编　林梅英　赵先林
编　委　李金铭　刘金海
林梅英　赵先林
黄留锁

西南交通大学出版社
·成都·

内容提要

本书根据国家教育部颁发的教学大纲编写，共十章. 前六章为线性代数部分，后四章为矢量分析部分，其中带 * 的章节为选学内容. 为便于读者掌握教材内容，每章末安排有适当的习题.

本书可作为师范院校、教育学院等高等学校物理专业线性代数与矢量分析的试用教材，也可供其他院校物理专业师生参考.

高等学校试用教材
高　等　数　学
线性代数与矢量分析
（物 理 专 业 用）
主编　李金铭　刘金海
*
出 版 人　宋绍南
责任编辑　苏　宁
封面设计　毕雪屏
西南交通大学出版社出版发行
（成都二环路北一段 111 号　邮政编码：610031　发行科电话：7600564）
http://press.swjtu.edu.cn
E-mail:cbs@center2.swjtu.edu.cn
成都飞机工业公司印刷厂印刷
*
开本：787mm×1092mm 1/32　印张：9
字数：170 千字　印数：1～3800 册
2000 年 5 月第 1 版　2000 年 5 月第 1 次印刷
ISBN 7-81057-451-5/O·025
定价：16.00 元

前　言

在长期从事中学物理教师培训的教学工作中，我们发现目前的该课程教材不能完全适应成人师范院校物理专业的教学特点. 为此，我们根据国家教育部颁发的教学大纲，并考虑到中学物理教师培训的实际情况，在听取多方面建议的基础上，编写了这本教材. 本书包括线性代数和矢量分析两部分，主要阐述了线性代数和矢量分析的基本概念和基本运算方法. 编写过程中，在考虑了结构的严谨性和体系的完整性的基础上，力求使内容精炼、推理简明. 同时为了便于自学，本书通过题例配合，加强了对重点和难点的剖析.

本书的第一、二、三、四章由李金铭编写；第五、六章由林梅英编写；第七、八章由刘金海编写；第九章由赵先林编写. 黄留锁编写了本书的第十章并绘制了本书的插图.

中学教师的培训工作是一项艰巨的任务，我们正在不断地探索、研究. 希望读者提出宝贵的建议.

编　者

1999 年 12 月

目　　录

第一编　线性代数

第二编　矢量基础

第一编　线性代数

第一章　行列式

在生产实践和科学研究中，一些变量之间的关系可以直接地或近似地表示为线性函数，线性代数主要研究线性函数. 在线性代数中，线性方程组是一个基础的部分，也是一个重要的部分，而研究线性方程组，首先需要一个重要的工具——行列式. 行列式这个概念不仅在数学许多分支中，而且在数学以外的许多学科中都有广泛的应用.

在中学的代数里，由二元、三元线性方程组的求解问题引入了二阶、三阶行列式，但在实际应用中常遇到要解含更多个未知量的线性方程组的问题. 为此，我们在二阶、三阶行列式的概念的基础上，引入 n 阶行列式的概念. 本章的主要内容就是介绍 n 阶行列式的定义、性质及计算方法，并利用它们来解线性方程组.

1.1　行列式的定义、性质及计算

1.1.1　二阶和三阶行列式

在中学的代数中，曾得出利用二阶、三阶行列式解二元、三元线性方程组的方法. 对于二元线性方程组有如下的结果：

若二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

的系数行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$$

则方程(1.1)有唯一解

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$称为二阶行列式,它由 2^2 个数组成. $a_{ij}(i = 1, 2, j = 1,2)$ 称为行列式的元素,第一个下标 i 表示第 i 行,第二个下标 j 表示第 j 列,a_{ij} 就是表示行列式第 i 行第 j 列相交处的那个元素.

同样对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1.2}$$

它的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

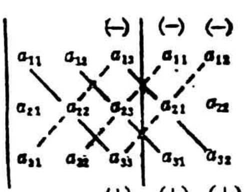
为三阶行列式,它由 3^2 个数组成,也代表一个算式. 若 $D \neq 0$,

则(1.2)有唯一解

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

$$x_3=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

我们把二阶和三阶行列式推广到一般的 n 阶行列式,然后利用这一工具来解含有 n 个未知量、n 个方程的线性方程组.计算三阶行列式有几种不同的方法,常见的方法是对角线法,即



$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-$$

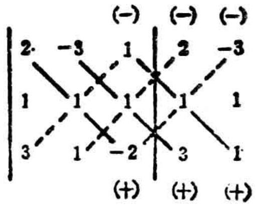
$$a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

图中位于三条实线上三个元素的乘积带正号，位于三条虚线上的三个元素的乘积带负号.

例 1.1　计算行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

解　按对角线法有



$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2\times1\times(-2)+(-3)\times1\times3+$$

$$1\times1\times1-1\times1\times3-$$

$$2\times1\times1-(-3)\times1\times(-2)$$

$$=-23$$

1.1.2　行列式的性质及其计算

为了解决行列式的计算方法及应用，下面讨论行列式的一些重要性质.

将行列式 D 的行与相应的列互换后得到的新行列式，称为 D 的转置行列式记为 D^T.

即若

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{23} & a_{33} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

行列式具有如下性质：

性质 1　行列式转置后，其值不变.

即

$$D=D^T$$

性质 2　互换行列式中任意两行(列)，行列式仅改变符号.

性质 3　如果行列式中有一行元素全为零，则这个行列式等于零.

性质 4　如果行列式中有两行(列)的对应元素相同，则此行列式为零.

性质 5　把行列式的某一行(列)的每个元素同乘以数 k，等于以数 k 乘该行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

推论 1　如果行列式某行(列)的所有元素有公因子，则公因子可以提到行列式外面.

推论 2　如果行列式有两行(列)的对应元素成比例，则行列式等于零.

性质 6 如果行列式中的某一行(列)所有元素都是两个数的和,则此行列式等于两个行列式的和,而且这两个行列式除了这一行(列)以外,其余的元素与原来行列式的对应元素相同.

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a'_{21} & a_{22}+a'_{22} & a_{23}+a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

性质 7 以数 k 乘行列式的某行(列)的所有元素,然后加到另一行(列)的对应元素上,则行列式的值不变.

数 k 乘第 i 行(列)加到第 j 行(列),记作

$$kr_i + r_j(kc_i + c_j)$$

1.1.3 行列式的展开

为了讲述行列式的展开,先引进余子式和代数余子式的概念. 在三阶行列式中划去 a_{ij} 元素所在的第 i 行和第 j 列的元素,剩下的元素按原次序构成的二阶行列式称为 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij},a_{ij} 的余子式乘上 $(-1)^{i+j}$ 称为 a_{ij} 的代数余子式,记作 A_{ij},即 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

例如三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

中元素 a_{23} 的代数余子式是

$$A_{23} = (-1)^{2+3}M_{23} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

定理　三阶行列式 D 的值等于它任意一行(列)的所有元素与它们对应的代数余子式乘积之和.

即

$$\begin{aligned} D &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\ &= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \\ &= a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \\ &= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} \\ &= a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} \\ &= a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} \end{aligned} \tag{1.3}$$

或简写为:

$$D = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}A_{ij} = \sum_{i=1}^{3} a_{ij}A_{ij}, \quad \begin{pmatrix} i = 1,2,3 \\ j = 1,2,3 \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

证　我们证明(1.3)中的第一个等式,其余证法相同.

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ &\quad a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + \\ &\quad a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \end{aligned}$$

这样，我们可以通过计算三个二阶行列式来计算三阶行列式，这个定理称为**拉普拉斯定理**，式(1.3)或(1.4)称为**拉普拉斯展开式**.

例 1.2 将行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

按第一行，第三列展开.

解 按第一行展开得

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -32$$

按第三列展开得：

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 3(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -32$$

从以上可知行列式按不同行或不同列展开计算的结果相等.

推论 三阶行列式 D 的某一行(列)的元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和等于零.

即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+a_{i3}A_{j3}=0 \quad , \quad i\neq j$$
$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+a_{3i}A_{3j}=0 \quad , \quad i\neq j \qquad (1.5)$$

证　行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

把 D 中的第三行用第二行的各对应元素代替，有

$$D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

由性质 5 的推论 2 可知 $D'=0$，对 D' 再按第三行展开，即得

$$a_{21}A_{31}+a_{22}A_{32}+a_{23}A_{33}=0$$

从而得

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+a_{i3}A_{j3}=0 \quad , \quad (i\neq j,\ i,j=1,2,3)$$

同理可证

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+a_{3i}A_{3j}=0 \quad , \quad (i\neq j,\ i,j=1,2,3)$$

把(1.4)式和(1.5)式结合起来可写成：

$$\sum_{k=1}^{3}a_{ik}A_{jk}=\sum_{k=1}^{3}a_{ki}A_{kj}=\begin{cases} D, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$$

把定理和行列式的性质结合起来，可以使行列式的计算大为简化. 计算行列式时，常利用行列式的性质使某一行(列)的元素出现尽可能多的零，这种运算叫做化零运算.

例 1.3　计算 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 35 & 37 & 34 \\ 23 & 26 & 25 \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 35 & 37 & 34 \\ 23 & 26 & 25 \end{vmatrix} \xlongequal{-35\times r_1+r_2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 23 & 26 & 25 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{-23\times r_1+r_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=1\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=7$$

1.1.4 n 阶行列式

从拉普拉斯定理,就可以给出 n 阶行列式的定义. 以上讨论我们知道,行列式某一元素的代数余子式总是比原行列式降低一阶的,而三阶行列式的余子式和代数余子式的概念完全适用于 n 阶行列式,其定义和性质亦可以类推到 n 阶行列式. 有了三阶行列式,用拉普拉斯展开式的方法,可定义四阶行列式;同样有了四阶行列式就可以定义五阶行列式. 依此类推,假定有了 $n-1$ 阶行列式,我们给出 n 阶行列式的定义.

定义 由 n^2 个数组成的记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式(横排称为行,纵排称为列). 它是一个算式,其值定义为:

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}$$

(按第 i 行展开,$i=1,2,3,\cdots,n$)