

# 数学

统编教材

高中一年级

中学各科同步帮教帮学丛书

- 知识要点
- 疏理与解疑
- 能力测试



帮学茅塞顿开



《中学各科同步帮教帮学》丛书

6633.63/1

# 数 学

(高中一年级)

总策划	焦向英		
主 编	常文启		
编 著	杨玉蓉	陈召林	
	李 青	张天国	

开明出版社

(京)新登字 104 号

《中学各科同步帮教帮学》丛书

数 学

(高中一年级)

常文启 主编

\*

开明出版社出版发行

(北京海淀区车道沟 8 号)

唐山胶印厂印刷

新华书店北京发行所经销

开本 787×1092 1/32 印张 10.875 字数 195 千字

1994 年 12 月北京第 1 版 1995 年 10 月北京第 5 次印刷

印数:40,001—55,000

ISBN 7-80077-858-4/G·616 定价:10.80 元

《中学各科同步帮教帮学》丛书

编 委 会

总策划 焦向英

主 编 常文启

编 委 (以姓氏笔画为序)

安贵增 李天泽 李宝忱

杨玉蓉 宗桂永 赵德民

鲍难先

## 前 言

教学，包括教师的教和学生的学两个方面。教学，是教与学的辩证统一，二者是相辅相成，互为依存的。但二者又不能混淆，教不能代替学，学更不能代替教，教学过程，是学生由不知到知、由知少到知多的矛盾转化过程。为加速这一转化过程，增强单位时间内的学习效益，培养同学更有效地积累知识，发展智力，以达到变知识为能力的目的，同时，也为教师更好地教，我们特组织编写了这套《中学各科同步帮教帮学》丛书。

本丛书有以下特点：

(1) 以国家教委颁布的各科教学大纲为依据，兼顾国家教委审定的各种相关教材的特点。

(2) 以基础知识为主体，配合课堂教学，与教学进度同步；既源于教材，又拓宽课堂，提高同学知识正迁移的能力。这是编写本丛书的出发点和归宿。

(3) 各学科每学年一本，以教材内容先后为序，按单元(章)编写。每单元包括以下三部分内容：

### ①知识要点

扼要地指出本单元的“知识点”，明确重点、难点和考点。

### ②疏理与解疑

以设疑或典型试题引入，分析重点，剖析难点，释解疑点；给方法，讲思路，让同学明确知识所属，清楚问题所在。

要着力解决的是：同学听完课可能还不太明白的那部分内容。

### ③能力测试

设计精当的检测题，参照各地中考、全国高考题路，力求做到题型全，题型新，试题覆盖面广，以期达到举一反三，触类旁通的目的，从而加强对知识的理解、掌握和运用。

试题分为A、B两组。A组，紧扣课本的基础知识，侧重于“双基”的检查。B组，源于并宽于课本，着重检查灵活运用知识的能力，以满足同学求新寻异的学习心态，开发智能，激发深层次的求知欲望。

每册书后均有二套综合练习题（第一套侧重第一学期的内容，第二套兼顾全学年的内容）。所有测试题的参考答案与提示一并附于书后。

本丛书由北京二中，北京八中，北京一六一中，北京回民学校，北京一〇九中，北京育才学校，北京日坛中学等市、区重点学校和北京朝阳区教科所的特级高级教师编写。

由于时间仓促，缺点、错误在所难免，恳请广大读者批评指正。

编者

1994年6月于北京

# 目 录

## 前 言

<b>第一章 幂函数、指数函数和对数函数</b> .....	1
知识要点 .....	1
疏理与解疑 .....	3
(一) 集合 .....	3
(二) 映射与函数 .....	8
(三) 函数的一般性质 .....	11
(四) 函数的定义域 .....	17
(五) 求函数值域常用的方法 .....	19
(六) 对函数的对应关系“ $f$ ”的理解 .....	24
(七) 幂函数 .....	25
(八) 指数函数 .....	30
(九) 对数函数 .....	32
(十) 函数值比大小常用的方法 .....	34
(十一) 函数图象 .....	39
(十二) 指数方程与对数方程 .....	42
能力测试 .....	47
<b>第二章 三角函数</b> .....	69
知识要点 .....	69
疏理与解疑 .....	71
(一) 角的表示及度量 .....	71
(二) 任意角的三角函数 .....	73
(三) 同角三角函数的基本关系式 .....	77

(四) 单位圆中的三角函数线 .....	80
(五) 诱导公式 .....	88
(六) 三角函数图象和性质 .....	92
能力测试 .....	103
<b>第三章 两角和与差的三角函数</b> .....	115
知识要点 .....	115
疏理与解疑 .....	116
(一) 和角、差角公式 .....	116
(二) 倍角、半角公式 .....	118
(三) 万能公式 .....	121
(四) 三角函数和差与积的互化 .....	123
(五) 求三角函数值 .....	126
(六) 知三角函数值求角 .....	130
(七) 三角恒等式证明 .....	133
(八) 三角函数的最值 .....	141
能力测试 .....	143
<b>第四章 直线和平面</b> .....	155
知识要点 .....	155
疏理与解疑 .....	158
(一) 平面 .....	158
(二) 空间两条直线、直线与平面、平面与平面的位置关系 .....	160
(三) 点、线、面在平面上的射影 .....	167
(四) 角 .....	169
(五) 距离 .....	174
能力测试 .....	181
<b>第五章 多面体和旋转体</b> .....	201



知识要点 .....	201
疏理与解疑 .....	203
(一) 多面体 .....	203
(二) 旋转体 .....	214
(三) 侧面展开问题 .....	225
(四) 组合体 .....	226
(五) 利用体积法求“距离” .....	232
能力测试 .....	236
<b>综合练习题 (一)</b> .....	<b>250</b>
<b>综合练习题 (二)</b> .....	<b>254</b>
<b>参考答案与提示</b> .....	<b>258</b>

# 第一章 幂函数、指数函数和对数函数

## 知识要点

单元	节次	知 识 要 点	学习水平			
			A	B	C	D
一、 集 合	1-1 集合	(1) 集合与元素		√		
		(2) 集合表示法			√	
		(3) 元素集合间关系表示法			√	
		(4) 常用数集及其表示法			√	
	1-2 子集 交集 并集 补集	(1) 子集(真子集、等集)表示法			√	
		(2) 交集及其表示法				√
(3) 并集及其表示法					√	
(4) 全集与补集及其表示法					√	
二、 映射 函数 概念	1-3 映射	(1) 映射及其表示法			√	
		(2) 象与原象			√	
	1-4 函数	(1) 函数与函数记号			√	
		(2) 函数定义域			√	
		(3) 函数值域			√	
		(4) 区间表示法		√		
	(5) 函数图象				√	
	(6) 函数解析式的确定				√	

单元	节次	知 识 要 点	学习水平*			
			A	B	C	D
三、 幂 函 数	1-5	(1) 幂函数的概念和性质 (2) 幂函数的定义域及图象				✓ ✓
	幂函数	(3) 比较两个函数值大小		✓		
四、 函 数 性 质	1-6 单调性	(1) 函数的单调性 (2) 简单函数单调性证明			✓	✓
	1-7 奇偶性	(1) 函数的奇偶性 (2) 简单函数奇偶性判断 (3) 奇、偶函数的图象特征			✓	✓
	1-8 反函数	(1) 反函数 (2) 简单函数的反函数求法			✓ ✓	
	1-9 互为反 函数图 象	(1) 互为反函数图象间关系 (2) 互为反函数函数图象对称性定理 的证明			✓ ✓	
	1-10 指数 函数	(1) 指数函数及性质 (2) 指数函数的图象 (3) 同底的两个函数值大小的比较				✓ ✓
五、 指 数 对 数 函 数	1-11 对数 函数	(1) 对数函数及性质 (2) 对数函数的图象 (3) 同底的两个函数值大小的比较		✓		✓ ✓

单元	节次	知 识 要 点	学习水平			
			A	B	C	D
五、 指数 对数 函数	1-12 换底 公式	(1) 对数换底公式 (2) 自然对数			✓	
	1-13 指数方 程与对 数方程	(1) 指数、对数方程概念 (2) 简单指数、对数方程的解法 (3) 用图象解方程	✓			✓

\* 学习水平分四个层次，了解 (A)，理解 (B)，简单应用 (C)，综合运用 (D)，四个层次的具体涵义如下：

**了解：**认识和记忆数学的基本概念、公理、定理、公式、法则及基本图形，图象和曲线。

**理解：**弄懂数学基本概念的涵义、定理、公理的条件和结论，公式、法则应用的条件和范围，领会数学基本方法、弄懂数学的基本图形和曲线的性质，并能利用它们进行实际的判断、推理和计算，并会画出它们的图形。

**掌握：**会用数学基本知识、基本技能和基本方法分析、解决一些数学问题。

**综合运用：**综合运用所学知识并达到了灵活的程度，从而形成能力。(该说明对后面各章均适用)

## 疏理与解疑

函数在高中数学中占有很重要的地位，函数思想是解决数学问题的重要数学思想之一，同时函数知识在解决其它数学问题时也有着广泛的应用，因此掌握好函数性质及有关概念是非常必要的。

### (一) 集合

1. 集合的概念：集合是在数学中不加定义的原始概念，把一些确定的元素看作一个整体便形成一个集合。例如 {桌

子、人、笔}组合在一起,便形成一个集合,当然这样的集合中的元素间没有什么共同的属性,没有进一步研究的必要,我们所研究的集合,其元素是具有某种共同属性的.

## 2. 集合中元素的三个特性

### (1) 确定性

集合中的元素必须是完全确定的,因此对于某个元素是否属于这个集合也是确定的,如集合  $A = \{a, b, c, d\}$  则  $b$  元素是属于集合  $A$  的,而  $e$  元素不属于集合  $A$ .

### (2) 互异性

对于给定的集合,集合中的元素是互异的,这就是说集合中任何两个元素都是不同的对象,集合中的一个元素只能在集合中出现一次,如有 5 个梨,4 个苹果,三串葡萄,一堆大枣组成一个集合  $M$ ,则  $M$  中元素只能写成  $M = \{\text{梨, 苹果, 葡萄, 枣}\}$ ,又如一个同学五次数学考试成绩为:120 分,130 分,120 分,125 分,130 分,把这些成绩写成一个集合,则应写成:  $A = \{120, 125, 130\}$ .

### (3) 无顺序性

一个集合只须元素确定,集合就确定,而与集合中元素的排列顺序无关,如  $\{a, b, c\}$  可写成  $\{b, a, c\}$ ,它们表示同一个集合.

## 3. 集合的表示方法

(1) 列举法:把集合中的元素一一列举出来,它一目了然地可看出集合中含有哪些元素,但是这种表示法比较繁琐,而且有些集合用此法不能表示,如:小于  $\sqrt{2}$  的一切实数.

(2) 描述法:将集合中元素的共同属性或元素间规律描述出来,写在  $\{\}$  括号内,例如小于  $\sqrt{2}$  的一切实数写成:

$$\{x|x < \sqrt{2}\}.$$

研究集合间关系时，还可利用韦恩图帮助解题。(A)

4. 空集：是指不含任何元素的集合，用字母  $\Phi$  表示，或写成空集两字表示。注意字母  $O$  不表示空集，而  $\{O\}$  也不表示空集，它表示含有  $O$  元素的集合， $\{\Phi\}$  表示含有  $\Phi$  元素的集合，也不表示空集。

5. 符号表示

元素与集合间用符号  $\in$  —— 属于， $\notin$  —— 不属于表示，如： $a \in \{a, b\}$ ,  $d \notin \{a, b\}$ 。

集合与集合间用符号  $\supseteq$  —— 包含， $\supset$  —— 真包含表示，如： $\{1, 2, 3\} \supseteq \{1, 2\}$ ，符号  $\supseteq$  表示真包含或相等，如  $\{a, b, c\} \supseteq M$ ，则这样的  $M$  集合可能是  $\{a\}$ ,  $\{b\}$ ,  $\{c\}$ ,  $\{a, b\}$ ,  $\{a, c\}$ ,  $\{b, c\}$ ,  $\{a, b, c\}$ 。

$N$  —— 自然数集， $Z$  —— 整数集， $R$  —— 实数集， $Q$  —— 有理数集……

6. 子集、交集、并集、补集的主要性质。

(1) 掌握好子、交、并、补集的概念。

(2) 它们具有的性质：

子集： $\Phi \subseteq A$ ;  $A \subseteq A$ ; 或  $A \supseteq B$  且  $B \supseteq A$  则  $A=B$ ; 若  $A \subseteq B$ ,  $B \subseteq D \Rightarrow A \subseteq D$ , 若  $A \subset B$ ,  $B \subset D$ , 则  $A \subset D$ 。

交集： $A \cap A = A$ ;  $A \cap \Phi = \Phi$ ;  
 $\Phi \subseteq A \cap B \subseteq A$   $\Phi \subseteq A \cap B \subseteq B$ 。

并集： $A \cup A = A$ ;  $A \cup \Phi = A$ ;  $A \cap B \subseteq A \cup B$ ;  $A \cup B \supseteq A \supseteq \Phi$ ,  $A \cup B \supseteq B \supseteq \Phi$ 。

补集： $A \cap \bar{A} = \Phi$ 。

〔例1〕 若  $P, Q$  是两个非空集合， $P \not\subseteq Q$ ,  $Q \not\subseteq P$ , 令

$M=P \cap Q$ , 则  $P \cup M$  等于 ( ).

- (A)  $M$  (B)  $Q$  (C)  $\Phi$  (D)  $P$

分析:  $\because M=P \cap Q \subseteq P, \therefore M \cup P=P$ , 故选 (D).

〔例2〕 全集  $I=R$ , 集合  $P=\{x|x^2-2x-8<0\}$ , 集合  $Q=\{x|x>a\}$ , 集合  $S=\{x|x>-2\}$ , ①  $P \subset Q$ , 则  $a \in$  \_\_\_\_\_, ②  $P \cap Q \neq \Phi$ , 则  $a \in$  \_\_\_\_\_, ③  $P \cup Q=S$ , 则  $a \in$  \_\_\_\_\_, ④  $\bar{P} \cup \bar{Q}=I$ ,  $a \in$  \_\_\_\_\_

分析:  $P=\{x|-2<x<4\}$ , 由条件可得:

(1)  $a \in (-\infty, -2]$

(2)  $a \in (-\infty, 4)$

(3)  $a \in (-2, 4)$

(4)  $a \in (4, +\infty)$

$\therefore \bar{P}=\{x|x \leq -2 \text{ 或 } x \geq 4\}$ ,

$\bar{Q}=\{x|x \leq a\}$

〔例3〕 设  $I$  为全集,  $A, B$  是非空集合, 且  $A \subset B \subset I$ , 下列集合中表示空集的是 ( ).

- (A)  $A \cap B$  (B)  $\bar{A} \cap B$   
(C)  $A \cap \bar{B}$  (D)  $\bar{A} \cap \bar{B}$

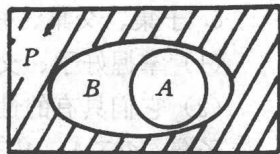


图 1-1

分析: 由图 1-1,  $\bar{B}=P$ , 显见  $A \cap \bar{B}=\Phi$ ,  $\therefore$  选 (C).

〔例4〕 若  $\{1, 2\} \subseteq M \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , 则这样的集合  $M$  的个数为多少?

分析: 这样的集合  $M$  必须含元素 1, 2 在内且又是  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  集合的子集.

解: 符合条件的集合  $M$  为:  $\{1, 2\}; \{1, 2, 3\}; \{1, 2,$

4}; {1, 2, 5}; {1, 2, 3, 4}; {1, 2, 3, 5}; {1, 2, 4, 5}; {1, 2, 3, 4, 5} 共 8 个.

注意: 若已知条件为:  $\{1, 2\} \subset M \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , 这样的集合  $M$  应为 6 个, 去掉  $\{1, 2\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

[例 5]  $A, B$  是以某些实数为元素的两个集合,  $A = \{1, 2, a^3 - 3a^2 - a + 7\}$ ,  $B = \{-2, a + 1, a^2 - 2a + 5, a^3 + 3a - 4\}$ , 又  $A \cap B = \{2, 4\}$ , 求实数  $a$  值, 并求集合  $A, B$ .

解:  $\because A \cap B = \{2, 4\}$ ,  $\therefore$  集合  $A$  中有:  $a^3 - 3a^2 - a + 7 = 4$   $\therefore a = 3$  或  $a = \pm 1$ ,

将  $a = 3, a = \pm 1$  分别代入  $B$  中, 只有  $a = 1$  时,  $B = \{-2, 2, 4, 0\}$  符号条件, 此时  $A = \{1, 2, 4\}$ .

[例 6] 集合  $M$  含有 4 个元素, 集合  $N$  含有 3 个元素,  $M \cap N$  含有 2 个元素, 求同时满足①  $Q \subset M \cup N$ , 且  $Q$  含 2 个元素, ②  $Q \cap M \neq \emptyset$ , 这样两个条件的集合  $Q$  的个数.

解: 图 1-2, 假设  $M = \{a, b, c, d\}$ ,  $N = \{a, b, e\}$ , 则  $M \cap N = \{a, b\}$ ,  $M \cup N = \{a, b, c, d, e\}$ .

由条件①、②知, 符合条件的集合  $Q$  取法为:

在  $M$  中取一个元素与  $e$  组成集合  $\{c, e\}; \{d, e\}; \{a, e\}; \{b, e\}$  共 4 个.

在  $M$  中任取两个元素组成集合  $\{a, b\}; \{a, c\}; \{a, d\}; \{b, c\}; \{b, d\}; \{c, d\}$  共 6 个.

$\therefore$  满足条件①、②的集合  $Q$  个数为  $4 + 6 = 10$  (个).

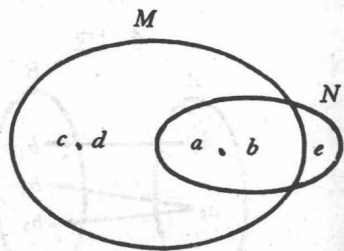


图 1-2



## (二) 映射与函数

### 1. 四种对应

若两个集合  $A, B$ , 从  $A$  中取出元素  $a_1$ , 从  $B$  中取出元素  $b_1$ , 作成一对偶  $(a_1, b_1)$ , 则说元素  $a_1$  与元素  $b_1$  对应.

如果对于集合  $A$  中的每一个元素, 在集合  $B$  中都有与之对应的元素 (一个, 多个不限), 则为  $A$  到  $B$  的对应. 注意:  $A$  中每一个元素都取到, 但  $B$  中元素不要求都有  $A$  中元素对应. 这样的对应一般分为四类. 图 1-3

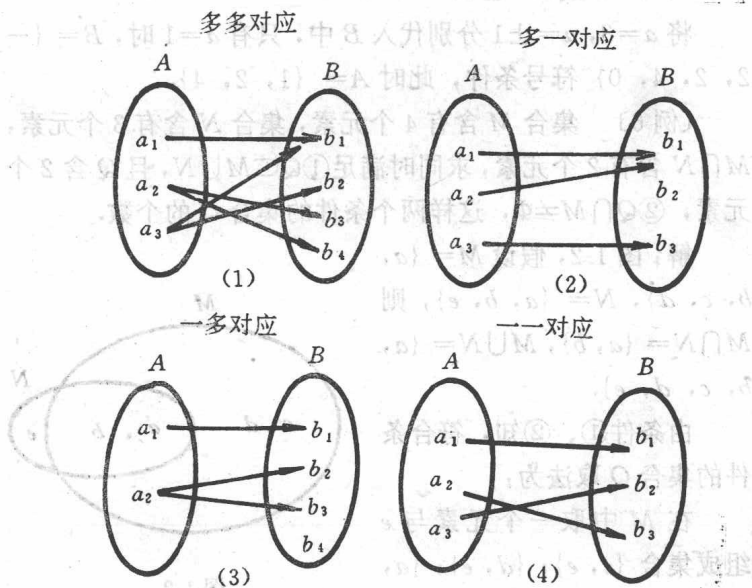


图 1-3

在上述四种对应中 (2) (4) 都是对一的, 即多一对应, (4) 是一一对应, 这样的对应称为映射.