



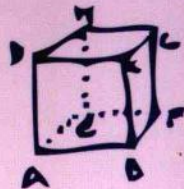
中育联合



$$a^2 = b^2 + c^2$$

数学
人类智慧的源泉

周阳◎编著

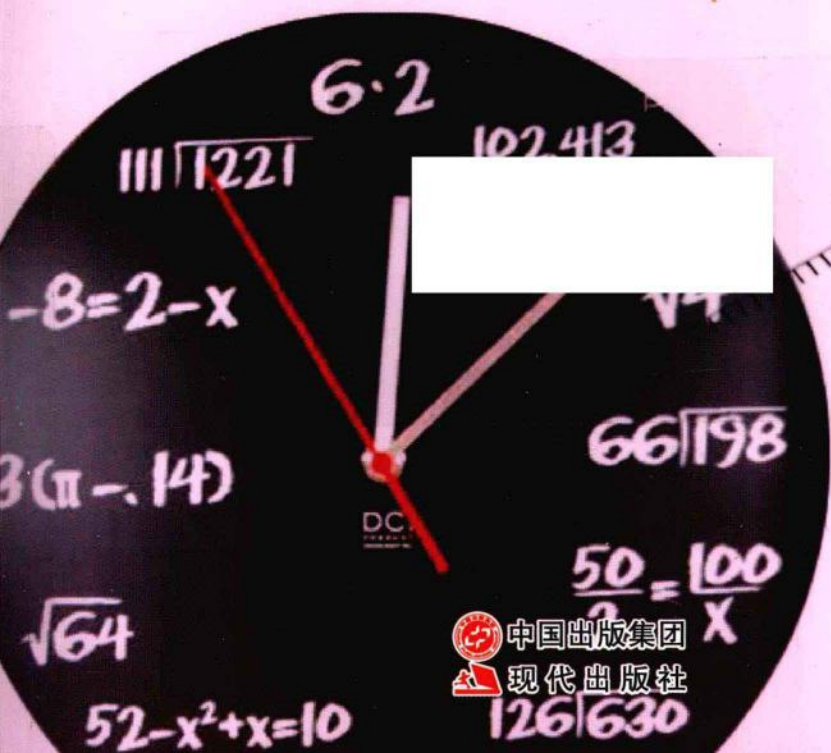


数学谜题

巧解答

RENLEIZHIHUIDEYUANQUAN

SHUXUEMITI
QIAOJIEDA



中国出版集团



现代出版社

126|630

数学
人类智慧的源泉

数学谜题

巧解答

RENLEIZHIHUIDEYUANQUAN

周阳◎编著



中国出版集团
现代出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

数学谜题巧解答 / 周阳编著. —北京: 现代出版社, 2012. 12

(数学: 人类智慧的源泉)

ISBN 978 - 7 - 5143 - 0923 - 2

I. ①数… II. ①周… III. ①数学 - 青年读物②数学 - 少年读物 IV. ①O1 - 49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 274990 号

数学谜题巧解答

- | | |
|------|-------------------------------------|
| 编 著 | 周 阳 |
| 责任编辑 | 李 鹏 |
| 出版发行 | 现代出版社 |
| 地 址 | 北京市安定门外安华里 504 号 |
| 邮政编码 | 100011 |
| 电 话 | 010 - 64267325 010 - 64245264 (兼传真) |
| 网 址 | www.xdcb.com |
| 电子信箱 | xiandai@cnpitc.com.cn |
| 印 刷 | 北京市业和印务有限公司 |
| 开 本 | 710mm × 1000mm 1/16 |
| 印 张 | 12 |
| 版 次 | 2013 年 3 月第 1 版 2013 年 3 月第 2 次印刷 |
| 书 号 | ISBN 978 - 7 - 5143 - 0923 - 2 |
| 定 价 | 29.80 元 |
-

版权所有, 翻印必究; 未经许可, 不得转载



前言

古希腊著名的思想家、哲学家、教育家苏格拉底曾说过：“我平生只知道一件事，我为什么是那么无知。”他无非是想告诉人们知道的东西多了才明白世界之大，人是多么的渺小，可悲的是天地万物我们不可能一一去了解，才感觉知识的无限。所以，他又说：“知道的越多，才知知道的越少。”数学好似这个世界里到处漫游的一个精灵，它能帮助你从另一种角度去认识和感知身边的世界和生活。如果你愿意抛去对数学的偏见，把掌握数学的思想和方法作为增长见识和提高感悟能力的话，就会发现数学是一个多么神奇而美妙的世界。数学不仅仅是枯燥的各种数字和难以理解的各种图形，它就是我们的影子，与生活如影随行、无处不在、无时不有。

既然数学与我们的生活如此密切，那么作为新世纪的生力军，所有的中学生都有责任去继承数学先驱们留下的宝贵的思想和方法，不但要刻苦钻研、深刻领悟，而且要用自己的智慧去开辟更为广阔的数学天地。本书将带你到奇妙的数学世界里遨游一番，领略那些被尘封已久的数学宝藏，采撷那些精妙的数学思想，探索更深远的数学领域，在数学的世界里挖掘宝物、收获思想。本书共分九章：第一章数学的渊源，第二章数学的宝藏，第三章数的奥秘，第四章数学的工具和符号，第五章你不知道的数字，第六章千“形”万状，第七章数学多棱镜，第八章是非难辨的悖论，第九章经典的数学名题。



目 录

数学的渊源

为什么会产生数学	1
谁构筑了数学王国	3

数学的宝藏

几何学的两大瑰宝是什么	8
费马大定理留下的疑团是什么	10
“哥德巴赫猜想”到底是什么	16
中国古代数学的贡献有哪些	21

数的奥秘

你知道生活中的这些数字奥秘吗	24
数的家族成员有哪些	26
你知道这些数的由来吗	29
你知道关于自然数的趣事吗	32
你知道这些特殊的数吗	35



你了解孪生质数吗	40
质数公式你在哪里	47
你知道这些奇妙的数学关系吗	54

数学的工具和符号

计算和测量的工具有哪些	56
常用的数学表有哪些	61
常用的数学符号有哪些	65

你不知道的数字

知道宇宙里的这些数字吗	68
知道自然界的这些数据吗	70
知道这些生物数字吗	73
知道人类生活的数据吗	75

千“形”万状

如何堆垛有学问	79
对称带来了什么	81
地球仪上的纸是如何贴上去的	83
“形”的奥秘有哪些	85
怎样找到最短距离	93
路上的学问知多少	99
圆的奥秘在哪里	103

数学多棱镜

谁能揭开这些谜	109
---------------	-----

尺规作图三大难题解决了么	115
概率是什么	122
中国数学有哪些辉煌成就	125

是非难辨的悖论

悖论的力量有多大	128
这些悖论你知道吗	130

经典的数学名题

关于几何的经典名题有哪些	136
关于计算的经典名题有哪些	139
什么是希尔伯特问题	152
思维怎样转个弯	158
你知道这些有趣的问题吗	162
关于“第五公设”的争论停止了吗	168
经典的算题有哪些	180

数学的渊源

数学的渊源可以追溯到人类社会发端之时，它是作为人类的一种特殊的思维工具在社会中“隐藏”地存在着。数学也是一门完全融于生活的科学，生活是数学的摇篮，永远都是数学的出发点和归宿。生活的各个方面都离不开数学，古人很早就开始了对数学的各种探索，并取得了辉煌的成果，他们为后人构筑了一个奇妙的数学王国。

为什么会产生数学

数学就像空气一样，无时不有，无处不在。谁都离不开它，但谁都不能直接看清它的面貌、它的影子。

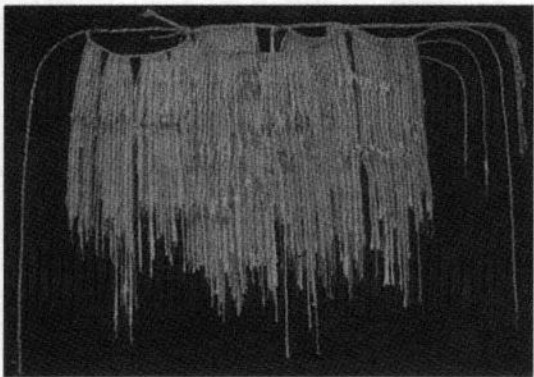
我们观看精彩的体育比赛，比分牌记录着赛场风云的是数字，显示球员们位置的是他们背上的数字；考试卷上标明成绩的也是数字；我们乘车旅行，对号入座靠的是数字；市场里的商品、股市上的股票，更是离不开数字；每个人的年龄、身高、体重等等都离不开数字。总之，我们每天都要与数字打交道。我们看到的日月星辰，高山大河，花草树木，鱼虫鸟兽；从庄严的天安门和雄伟的长城，一直到小小的文具盒、铅笔、橡皮等等，世界上的一切事物都有各不相同的形状。所以，科学家们发现，数量和形状是事物最基本的性质。

恩格斯在谈到数学的时候，曾经指出：“纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系。”所以，什么是数学呢？可以说，数学是一门研究客观物质世界的数量关系和空间形式的科学。当然，数学所研究的数量和形状，其含义要比日



常生活中所讲的要深广得多，它既是一门科学，也是人类活动的重要工具。

数学最初是从结绳记事开始的。从大约三百万年前的原始时代起，人们通过劳动逐渐产生了数量的概念。他们学会了在捕获一头野兽后用一块石子、一根木条来代表，或用绳打结的方法来记事、计数。这在原始人眼里，一个绳结就代表一头野兽，两个结代表两头，或者一个大结代表一头大的野兽，一个小结代表一头小的野兽。数量的观念就是在这些过程中逐渐发展起来的。



结绳记事

在距今约五六千年前，非洲的尼罗河流域的文明古国埃及较早地学会了农业生产。他们通过天文观测进行农业生产以获得好收成，其中就有一些数学知识的应用；另一方面，古埃及的农业制度是把同样大小的正方形土地分配给每一个人。因这种对土地的测量产生了几何学。数学正是从打结记数和土地测量开始的。

与古埃及同时，亚洲西部的古巴比伦、南部的古印度和东部的古代中国等几个同样伟大的文明社会也产生了各自的记数法和最初的数学知识。在距今约两千年前的古希腊人，继承了这些数学知识，并将数学发展成为一门系统的理论科学。古希腊文明毁灭后，阿拉伯人继承了他们的文化，使数学重新发展起来，并最终创立了近代数学。



知识点

结绳记事

结绳记事是文字发明前，人们所使用的一种记事方法，即在一根绳子上打结，用以记事。上古时期的中国及秘鲁印地安人皆有此习惯，即使到了近代，一些没有文字的民族，仍然采用结绳记事来传播信息。

延伸阅读

十进制和二进制的故乡

中国数学在人类文化发展的初期，远远领先于古巴比伦和古埃及。中国早在五六千年前，就有了数字符号。到三千多年前的商朝，刻在甲骨或陶器上的数字已十分常见。1899 年从河南安阳发掘出来的龟甲和兽骨上所刻的象形文字（甲骨文）中载有许多数字记录，比如：八日辛亥允戈伐二千六百五十六人。这说明当时已采用十进制的计数方法，而且有从一到百、千等十三个计数单位。当时在运算过程中用的算筹，纵横布置就可以表示任何一个自然数。据考证，至少在公元前 8 世纪到前 5 世纪，我国的算筹已经完备，而印度是在公元 876 年才正式使用“0”这一符号，所以我国是名副其实的十进制的故乡。

中国的二进制源于八卦，记载于《易经》一书中。计算机的创始人莱布尼茨通过对《易经》的研究，认为《易经》图形表示从零开始到前 64 个数，所记录的就是二进制。这就是我国常说的太极生两仪，两仪生四象，四象生八卦……

谁构筑了数学王国

古巴比伦人

19 世纪前期，人们在亚洲西部伊拉克境内发现了 50 万块泥版，上面密密麻麻地刻有奇怪的符号，这些符号是古巴比伦人使用的“楔形文字”。科学家们经过研究，发现泥版上记载了大量的数学知识。

古巴比伦人用“▼”表示 1，用“<”表示 10，从 1~9 是把“▼”写相应的次数，从 10~50 是把“<”和“▼”结合起来写相应的次数。他们还根据人有 10 根手指，月亮一年有 12 次圆缺，从而产生了十进制和六十进制的想法，如现在的 1 小时 = 60 分钟，1 分钟 = 60 秒就是源于古巴比伦人的六十进



古巴比伦人的泥版

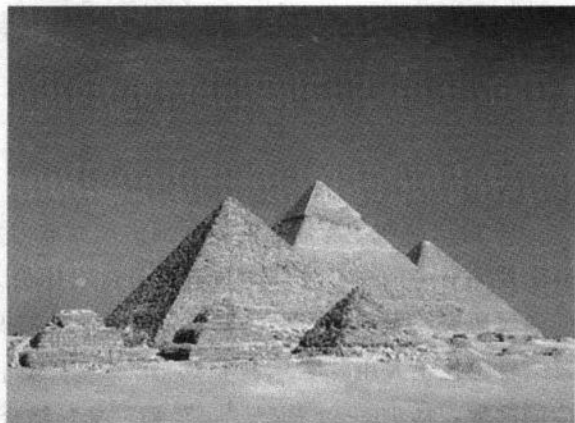
制。从那些泥版上，人们还发现古巴比伦人掌握了许多计算方法，并且编成了各种表帮助计算，如乘法表、倒数表、平方和立方表、平方根和立方根表。他们还运用了代数的概念。

古巴比伦人也具备了初步的几何知识。他们会把不规则形状的田地分割为长方形、三角形和梯形来计算面积，也能

古埃及的金字塔和纸草书

闻名世界的金字塔不仅以宏伟的气势吸引了无数旅游观光者，更以建造的精巧吸引了世界各地的科学家。据对最大的胡夫金字塔测量，发现它高 146.5 米（现因损坏高 137 米），基底正方形边长为 233 米（现为 227 米），但是各底边误差仅为 1.6 厘米，只是全长的 $\frac{1}{14\ 600}$ ；基底直角误差为 $12''$ ，仅为直角的 $\frac{1}{27\ 000}$ 。此外，金字塔的四个面正向着东南西北四个方向。这么高大的金字塔，古埃及人怎么能建造得如此精确？古埃及人一定掌握非常丰富的几何知识。

原来，在尼罗河三角洲盛产一种纸莎草，古埃及人



埃及胡夫金字塔

把这种草从纵面割成小条，拼排整齐，连接成片，压榨晒干，在上面写字，叫纸草书。1822年，一位名叫高博良的法国人弄清了一部分整理出来的纸草书的含义。

由此人们得知，古埃及人早已学会用数学来管理国家，确定谷仓容积和田地的面积，计算造房屋和防御工程所需的砖数，计算付给劳役者的报酬等等。

换成数学语言就是，古埃及人已掌握了加减乘除及分数的运算。他们还解决了一元一次方程和一类相当于二元二次方程的特殊问题，纸草书上还有关于等差、等比数列的问题。他们计算矩形、三角形和梯形面积、长方体、圆柱的体积等与现代的计算值非常相近。由于具有了这样的数学知识，古埃及人能够建成金字塔就不足为奇了。

古代中国的“九九歌”

我国古代对于整数的四则运算和应用的认识，已经是很早的事了。我们都知道“九九歌”是个正整数的乘法歌诀；在古时候，这个歌诀是从“九九八十一”开始，而不是从“一一得一”开始的，所以叫做“九九歌”。“九九”在古书《荀子》、《管子》中有记载，在出土文物的汉竹简上也有记录。

相传春秋时期的齐桓公，专设一个招贤馆征求各方人才，等了很久也没有人应召；一年以后来了一个人，把“九九歌”当作见面礼献给齐桓公。齐桓公笑道：“‘九九歌’能当见面礼吗？”这人答道：“‘九九歌’确实不够资格拿来作为见面礼，但是您对我这个仅懂得‘九九’的人都能重视的话，还愁比我高明的人不接连来吗？”齐桓公认为很对，就批准把他请进招贤馆招待，果然不出一个月，许多有才能的人都从四面八方前来应召了。这个故事告诉我们，在春秋时期，“九九歌”已经被人们广泛掌握了。

古印度数学

古印度人对古代数学的贡献，犹如印度佛掌上的明珠那样耀眼夺目。在公元前3世纪，古印度出现了数的记号。在公元200年到1200年之间，古印度人就知道了数字符号和“0”符号的应用，这些符号在某些情况下与现在的数字很相似。此后，古印度数学引进十进制的数学和确立数字的位值制，大大简化了数的运算，并使计数法更加明确。如古巴比伦的小记号▼，既可以表示



1, 也可以表示 $1/60$, 而在古印度人那里符号 1 只能表示 1 个单位, 若表示十、百等, 需在 1 的后面写上相应个数的 0, 现代人就是这样计数的。古印度人很早就会用负数表示欠债和反方向运动。他们还接受了无理数概念, 并把适用于有理数的运算步骤用到无理数中去。他们还解出了一次方程和二次方程。

古印度数学在几何方面没有取得多大进展, 但对三角学贡献很多, 如在他们的计算中已经用了三种量——一种相当于现在的正弦, 一种相当于余弦, 另一种是正矢, 等于 $1 - \cos\alpha$, 现在已不采用。他们已经知道三角函数的某些关系式, 如 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$ 等, 还利用半角表达式计算某些特殊角的三角函数值。

古希腊数学

古希腊人从阿拉伯人那里学到了许多数学经验, 并对其进行了精细的思考和严密的推理, 才逐渐产生了现代意义上的数学科学。第一个对数学诞生作出巨大贡献的是泰勒斯, 他曾利用太阳影子计算出金字塔的高度, 实际上是利用了相似三角形的性质, 这在当时是非常了不起的。

在泰勒斯之后, 以毕达哥拉斯为首的一批学者也对数学作出了巨大的贡献。他们最出色的成就是发现了“勾股定理”, 在西方称为“毕达哥拉斯”定理。正是因为这一定理, 才导致了无理数的发现, 引起了第一次数学危机。欧几里得又吸收了前人的精华, 写成了《几何原本》这本数学著作, 今天人们所学的平面几何知识, 都源于这本书。继欧几里得之后, 阿基米德开创了希腊数学的新时代, 被后人称为“数学之神”。在阿基米德之后, 在天文学的促进下, 希帕恰、托勒密等人又创立了三角学; 尼可马修斯写了第一本数论典籍——《算术入门》; 丢番图则系统地研究了各种方程。

正是他们的努力, 初等数学建立起来了, 这意味着由古巴比伦人和古埃及人孕育的数学“婴儿”, 终于在古希腊的摇篮中诞生了。

阿拉伯数学

阿拉伯人对古代数学的贡献, 是现在人们最熟悉的 1、2、3、…、9、0 这十个数字, 称为阿拉伯数字。但是, 阿拉伯也吸收、保留了希腊、印度的数字, 并将它们传到欧洲, 架起了一座“数学之桥”。进位计法, 也采用印度的

无理数运算，但放弃了负数的运算。代数这门学科的名称就是由阿拉伯人发明的。阿拉伯人还解出一些一次、二次方程，甚至三次方程，并且用几何图形来解释它们的解法。阿拉伯数学作为“数学之桥”，还在于翻译并著述了大量数学文献，这些著作传到欧洲后，数学从此进入了新的发展阶段。

知识点

金字塔

在建筑学上，金字塔指角锥形建筑物。著名的有埃及金字塔，还有玛雅金字塔、阿兹特克金字塔（太阳金字塔、月亮金字塔）等。先民们把金字塔视为重要的纪念性建筑，如陵墓、祭祀地，甚至是寺庙。

延伸阅读

阿拉伯数学的贡献

阿拉伯人还计算出较精确的圆周率，得到 $2\pi = 6.283\ 185\ 307\ 195\ 865$ ，已计算到小数点后的 15 位。此外，他们在三角形上引进了正切和余切，给出了平面三角形的正弦定律的证明。平面三角和球面三角的比较完善的理论也是他们提出的。



数学的宝藏

走进数学王国，慢慢地打开大门，里面藏着很多奇珍异宝。若想探得这些珍宝，还真需要你擦亮双眼，用你睿智的头脑揭开宝藏里的很多秘密和隐藏的各种玄机，你知道几何学的两大瑰宝吗？你弄清楚费马大定理留下的疑团了吗？“哥德巴赫猜想”到底是什么？中国古代数学的贡献你知道吗？

几何学的两大瑰宝是什么

使人为之倾倒的勾股定理

著名数学家、天文学家开普勒曾把毕达哥拉斯定理和黄金分割喻为几何的两大宝藏。毕达哥拉斯定理即为勾股定理，它是由古希腊数学家、哲学家毕达哥拉斯最早发现和证明的。

勾股定理的发现还有一个动人的故事。有一天，毕达哥拉斯到朋友家做客，朋友家的地面是用许多黑白相间的全等的等腰直角三角形砖铺砌而成的。这个美妙的图形深深地吸引了他，他聚精会神地看着地面。忽然，他发现直角三角形的两边长的平方和恰好等于斜边的平方。这个惊人的发现使他欣喜若狂，他认为这是神的赐予，于是他杀了 100 头牛作为报答，因此又有人把勾股定理称为“百牛定理”。

勾股定理像一颗璀璨的明珠，使不少人为之倾倒。现有的证法至少有 370 种，使它成为世界上证法最多的定理。

勾股定理在我国数学史上也有光辉的一页。夏禹治水时就已经用到了勾股术，开创了世界上最早使用勾股定理的先河。我国最早的数学著作《周髀算经》中记载了“勾三、股四、弦五”的问题。

无穷魅力的黄金分割

几何学的另一瑰宝就是“黄金分割”，它的最早的发现者当数古希腊著名的数学家攸多克萨斯。他在研究比例时，发现了一个有趣的线段中外比性质，即把已知线段分成两部分，使其中的一部分是全部线段与另一部分的比例中项。关于线段中外比问题，攸多克萨斯得到如下结果：如果线段 AB 上有一点 P ，把线段分成两部分 AP ， BP ，且 $PB : AP = AP : AB$ ，则① P 为线段 AB 的中外比点， AP 的长为中外比数；② 设 $AB=1$ ，则中外比数 $AB = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.618\cdots$ 。

自从攸多克萨斯发现中外比后，它的内在价值不断被人们在实践中发掘。中外比的最大价值表现在它的美学上。人们通过测量发现，维纳斯雕像的下身与上身的比值近似为 0.618。可见，当年雕塑家就已知道了黄金分割的应用。

到了中世纪，中外比更被人们所重视，并且披上了神秘的外衣。帕乔利称之为“神圣比例”；天文学家开普勒称之为“神圣分割”；画家达·芬奇称之为“黄金分割”。

在数学中，还有一种黄金矩形（宽与长的比为黄金数），它是各种矩形中看起来最顺眼，也是最具美感的一种。国旗就是这种矩形。黄金矩形还有一种奇特而美妙的性质：可以分成一个正方形和另外一个小黄金矩形。

知识点

比例中项

如果 a 、 b 、 c 三个量成连比例，即 $a : b = b : c$ ， b 叫做 a 和 c 的比例中项，比例中项又称“等比中项”或“几何中项”。



延伸阅读

《几何原本》

欧几里得一生最大的功绩就是完成了《几何原本》这一数学史上的巨著，《几何原本》是数学史上的一个伟大的里程碑。除《圣经》之外，没有任何一本著作，其使用、研究与印行之广泛能与《几何原本》相比。2 000 多年来，它一直支配着几何的教学，因此，有人称《几何原本》为数学的“圣经”。

《几何原本》全书共 13 卷。第一卷，给出了欧几里得几何学的基本概念、定义、定理、公理、公设等；第二卷，面积和变换；第三卷，圆及其有关图形；第四卷，多边形及圆与正多边形的作图；第五、六卷，比例与相似形；第七卷，数论；第八卷，连比例；第九卷，数论；第十卷，不可通约量的理论；第十一卷，立体几何；第十二卷，利用“穷竭法”证明圆成积的比等于半径平方的比，球体积的比等于半径立方的比，等等；第十三卷，正多面体。

《几何原本》于明朝传入中国。当时意大利的传教士利玛窦与中国的徐光启合译了《几何原本》的前 6 卷，于 1607 年出版，定名为《几何原本》。《几何原本》的最后译完应归于清代的数学家李善兰与英国的伟烈亚力，他们合译了《几何原本》的后 7 卷。《几何原本》在中国出版后，很快就传播开来。

费马大定理留下的疑团是什么

要知道费马大定理，得先说说勾股定理。早在公元前 1120 年，我国古代数学家商高就得到了“勾三、股四、弦五”的结果。我国古书《周髀算经》一开头便提到了“勾广三，股修四，经隅五”。赵爽在该书的注解中还说：“禹治洪水，决流江河，望山川之形，定高下之势，除滔天之灾，释昏垫（百姓）之厄，使东注于海而无浸逆（溺），乃勾股之所由生也”。这本书后半部分讲解《益天》中说，可以看到“勾股定理”的一般形式是“勾、股各自乘，并而开方除之，得（弦）”，即