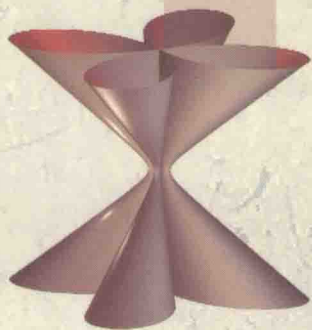


数学

课堂教学设计

陈柏良◎著



上海市
著名商标
ECNUP

华东师范大学出版社

全国百佳图书出版单位

数学课堂教学设计

陈柏良◎著



华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学课堂教学设计/陈柏良著. —上海: 华东
师范大学出版社, 2012. 7
ISBN 978-7-5617-9817-1

I. ①数… II. ①陈… III. ①中学数学课—课堂教学—
教学设计—高中 IV. ①G633.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 178907 号

数学课堂教学设计

著 者 陈柏良
策划编辑 倪 明
项目编辑 徐慧平
审读编辑 王小双
装帧设计 黄惠敏

出版发行 华东师范大学出版社
社 址 上海市中山北路 3663 号 邮编 200062
网 址 www.ecnupress.com.cn
电 话 021-60821666 行政传真 021-62572105
客服电话 021-62865537 门市(邮购)电话 021-62869887
地 址 上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网 店 <http://hdsdcbs.tmall.com>

印 刷 者 常熟市文化印刷有限公司
开 本 787×1092 16 开
印 张 13.25
字 数 201 千字
版 次 2013 年 1 月第 1 版
印 次 2013 年 1 月第 1 次
书 号 ISBN 978-7-5617-9817-1/G·5805
定 价 36.00 元

出 版 人 朱杰人

(如发现本版图书有印订质量问题,请寄回本社客服中心调换或电话 021-62865537 联系)

序

医生的真功夫在“病床”，教师的真功夫在“课堂”。而提高数学课堂教学质量，教学设计一直是中学数学一线教师关注的话题。近年来，有关教学设计类的著作并不少见，大学教授编著的教学设计类书籍大多注重理论层面上的探讨，追求对各学科教学的普遍指导意义，由于很少结合具体某一学科，忽视学科特点和具体学科特有的教学规律而难以深入；也有些作者由于不熟悉中学教学，未能对接中学课堂，导致指导缺乏一定的针对性。一般中学教师编写的教学设计类书籍又大多属于教案集之类，很少有基于实践层面上的理论探讨。这两类书籍，对长期以课堂教学为主要职业行为的一线教师来说，犹如两张未粘合的皮，对课堂教学和课堂教学设计发挥的指导作用甚微。

早在十多年前，作者报考浙江师范大学教育硕士时就有几篇数学课堂教学研究的论文公开发表。读研究生期间作为他的导师，作者的勤学、刻苦，敢于思考，善于创新，给我留下难以磨灭的印象。2004年作者完成的教育硕士学位论文“运用案例开展数学探究教学”获答辩专家的一致好评，当时我任由浙江师范大学主办的全国公开发行的数学教学研究杂志《中学教研（数学）》主编，曾将其学位论文的缩写稿一万多字发表在《中学

序

教研(数学)》2004年第9期上,原想是给我校教育硕士论文写作树立典范,但结果是进一步扩大了作者论文的学术影响力,作者与杂志编辑都收到不少读者的赞誉与深入研究的建议。作者学位论文之所以优秀,一个强有力的支撑是围绕学位论文作者已在《数学通报》、《中学数学教学参考》、《数学通讯》等学术刊物上发表了15篇相关研究论文。研究生毕业之后的多年作者虽然除教学工作外还有繁杂的学校行政管理工作,但仍然忘我地投身高中数学课堂教学改革,并以“数学课堂教学设计”为主攻方向,不仅在具体数学教学实践上取得优异的成绩,而且在理论上也发表了不少高质量的中学数学教研论文。作者主持的以“提高高中数学课堂教学有效性的教学设计研究”为题的研究成果在2011年曾荣获浙江省人民政府颁发的浙江省第四届基础教育教学成果二等奖。

本书是作者多年研究积淀的集中呈现,理论与实践紧密结合的特色贯穿全书。从谈对数学课堂教学的认识,到教育学、心理学理论对数学课堂教学的启示,再到数学课堂教学设计,“上通数学,下达课堂”,对一线中学数学教师改进数学课堂的教与学有一定参考价值。另一个显著特色是书中有作者亲身经历过的大量鲜活案例,这些案例均选材于高中数学课堂教学的核心内容,其对中学数学教师在观念层面有很强的启示意义;在操作层面也有很强的方法论意义。还有本书的附录,其与正文相互关联,不乏一系列创新性观点。

笔者相信,无论是第一线的数学教师,还是各类师范院校数学教育专业的大学生、研究生,都可从陈柏良老师的新作中受益匪浅。更重要的是读者能从中体验到作者专业成长的心路历程。

张维忠

2012年6月15日

(浙江省基础教育研究中心副主任、浙江师范大学教师教育学院教授)

目录

第一章 数学课堂教学观 / 1

- 第一节 呈现数学本质：数学课堂教学的主旨 / 3
- 第二节 数学课堂教学的核心价值观 / 12
- 第三节 数学课堂高成效教学的四个特征 / 17
- 第四节 提高数学课堂高成效教学的几点感悟 / 22
- 第五节 数学认知理解：从操作性理解到迁移性理解 / 29

第二章 教育心理学理论对数学课堂教学的启示 / 37

- 第一节 创设学生主动建构的空间
——来自建构主义学习理论的启示 / 40
- 第二节 激发学生有意义的学习心向
——来自奥苏贝尔有意义学习理论的启示 / 44
- 第三节 架起学生现有水平和潜在水平的桥梁
——来自维果茨基教育理论的启示 / 50
- 第四节 构造和发展学生的数学现实
——来自弗赖登塔尔数学教育思想的启示 / 52
- 第五节 突出练习中所包含的变异的性质
——来自马登理论的启示 / 56
- 第六节 教会学生如何思考
——来自波利亚数学教育思想的启示 / 58
- 第七节 领悟数学学习过程即数学认知过程
——简述数学学习过程的一般模式 / 63

第三章 数学课堂教学设计的一般原理 / 67

第一节 数学课堂教学设计概述 / 69

第二节 数学课堂教学设计程式 / 70

第三节 数学课堂教学设计方略 / 73

第四节 数学课堂教学设计案例一：《直线与平面垂直的判定》
/ 105

第五节 数学课堂教学设计案例二：《余弦定理》/ 113

第四章 数学课堂教学设计的艺术 / 119

第一节 既雕既琢 复归于朴 / 121

第二节 寻找适合学生的教学设计 / 124

第三节 《离散型随机变量》的教学与感悟 / 129

第四节 《有限制条件的排列问题》的教学与感悟 / 141

第五节 教学立意：优质课堂教学建构的基石 / 148

附 录

附录一 怎样教好数学 / 156

附录二 怎样学好数学 / 168

附录三 日常教学用语 / 176

附录四 数学教学语录 / 178

附录五 提高高中数学课堂教学有效性的教学设计研究 / 184

参考文献 / 201

后 记 / 204

第一章

数学课堂教学观

数学课堂教学观,即教师对数学课堂教学活动的看法和特有的基本态度和观念,是教师对数学课堂教学内在规律的认识的集中体现,是教师从事数学课堂教学活动的信念,是教师进行课堂教学组织和实施的指导思想。它能反映教师对数学课堂教学功能的总体认识。教师在课堂上的教学行为无不受到自身课堂教学观念的制约。

课堂是师生接触最经常,也是对师生影响力最大的场所。课堂蕴含着巨大的生命力,只有师生的生命力在课堂教学中得到有效发挥,才能真正有助于学生的培养和教师的成长,课堂上才有真正的生活。

思想支配行为。有什么样的数学课堂教学观,就会有什么样的数学课堂教学设计,就会有什么样的数学课堂教学行为,就会有什么样的数学课堂教学效果。作为数学教师,首要的问题是要树立起正确的数学课堂教学观。

第一节 呈现数学本质:数学课堂教学的主旨

北京大学张顺燕教授曾精辟地指出:教学有三境界,即“授人以业”、“授人以法”和“授人以道”。

授人以业,就是韩愈所说的“授业”,传授知识给学生。这是最初步的要求,也是最基本的要求。

授人以法,就是培养学生的能力,教给他们方法,使学生自己有能力去扩展知识。

授人以道。孔子云:“吾道一以贯之。”(孔子《里仁》)“道”就是孔子的思想学说,“一以贯之”就是其思想学说由一条主线来贯穿,这条主线不是单一的概念范畴,而是包括了孔子思想学说的“核心”和“精华”。我们教学的结果应使学生将他们掌握的方法和获得的知识贯穿起来,使他们既能高瞻远瞩,又能析物入微。

这三个境界,从对所授知识要求的角度来看,“授人以业”要求所授知识“准确”,“授人以法”要求所授知识“深刻”,而“授人以道”则更多地要求所授知识“本质”。

显见,高境界的数学课堂教学必须呈现“数学本质”。《普通高中数学课程标准(实验)》^①也特别强调对数学本质的认识,其中指出:“形式化是数学

^① 中华人民共和国教育部:《普通高中数学课程标准(实验)》,人民教育出版社2003年版,第4页。

的基本特征之一。在数学教学中,学习形式化的表达是一项基本要求,但是不能只限于形式化的表达,要强调对数学本质的认识,否则会将生动活泼的数学思维活动淹没在形式化的海洋里。”那么,数学本质指的是什么呢?数学本质是一个数学哲学问题,学术界对它的理解有不同的视角。我们在课堂教学中强调的数学本质,一般其内涵包括:数学知识的内在联系;数学规律的形成过程;数学思想方法的提炼;数学理性精神(依靠思维能力对感性材料进行一系列的抽象和概括、分析和综合,以形成概念、判断或推理,这种认识称为理性认识。重视理性认识活动,以寻找事物的本质、规律及内部联系,这种精神称为理性精神)的体验等方面。

基于对数学本质内涵的认识,一个值得深思的问题是:一线教师如何在课堂教学中呈现“数学本质”呢?

一、教材内容的深透领悟

英国哲学家罗素(Russell)曾指出:“凡是你教的东西,要教得透彻。”为求透彻,教师必须钻进教材,“沉下去”,理清知识发生的本原,把握教材中最主要、最本质的东西。回眸笔者听过、评过的许多公开课、评优课,其中不乏对教材理解深刻、有自己独到见地的精品课,但也有一些课总让人感到丝丝憾意:课堂缺少耐人回味的东西,对教材内容的领悟浅薄,缺少厚重感。笔者认为,教师对教材的领悟必须有自己的眼光,眼光要深邃,看到的不能只是文字、图表和各种数学公式,而应是字里行间跳跃着的真实而鲜活的思想,这种思想就是对数学本质的认识,这种思想给人的感觉就是“不在书里,就在书里”。法国作家巴尔扎克(Balzac)说过:“一个能思想的人,才是一个力量无边的人。”教师只有不断揣摩教材,才能对教材有独到的体悟,教学才会出彩。

让我们一起来感受以下几则案例。

案例 1-1 用糖水浓度做“不等式”的思想实验

已知 a 、 b 、 m 都是正数,并且 $a < b$, 求证: $\frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m}$ 。

这是不等式教学中的一道例题。不少教师通过糖水浓度的思考,抓住它的数学本质。

假如令 b ——溶液(糖水); a ——溶质(糖),那么 $\frac{a}{b}$ 是糖水(不饱和)的

浓度。现在向糖水中再放糖 $m > 0$, 糖水变甜; 这就是不等式 $\frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m}$ 的现实意义, 也体现了该不等式的价值。

至此, 就很少再有教师作进一步的思考了。其实还可以进一步导出:

(1) 若 a, b, m 都是正数, 并且 $m < b, a < b$, 则 $\frac{a-m}{b-m} < \frac{a}{b}$;

(2) 若 a, b, m, n 都是正数, 并且 $a < b, n < m$, 则 $\frac{a+n}{b+n} < \frac{a+m}{b+m}$;

(3) 若 a, b, m, n 都是正数, 并且 $n < m < a < b$, 则 $\frac{a-m}{b-m} < \frac{a-n}{b-n}$ 。

甚至提出: 现在, 如果将两杯浓度不一样的糖水 $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ 倒在一起, 浓度会怎样? 显然, 浓度在原来两种浓度之间, 即有 $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ 。

事实上, 高中数学中许多问题都具有生活背景和意义。这需要教师“沉入”教材细细揣摩, 在教学中发掘问题的内在联系, 抽象问题的本质, 进而用数学语言(符号)来表达问题的实质。这样学习数学, 对数学本质会有更深的认识。

案例 1-2 等差数列的通项公式

教材中对等差数列的通项公式是这样推导的: 如果等差数列 $\{a_n\}$ 的首项是 a_1 , 公差是 d , 那么根据等差数列的定义得到

$$a_2 - a_1 = d, a_3 - a_2 = d, a_4 - a_3 = d, \dots$$

所以

$$a_2 = a_1 + d,$$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d,$$

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d,$$

.....

由此得到

$$a_n = a_1 + (n-1)d。$$

此种推导方法实为“迭代法”, 即

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + d = (a_{n-2} + d) + d = [(a_{n-3} + d) + d] + d = \cdots \\ &= a_1 + (n-1)d. \end{aligned}$$

教师对这个内容的领悟不能仅止于此。笔者认为,教师在这里还可不失时机地引导学生揭示用“累加法”求通项的一种数学思想方法;同样,在等比数列的通项公式推导中则可提炼出用“叠乘法”求通项的一种思想方法;在等差数列的前 n 项和计算公式的推导中则可概括出“倒序求和法”;在等比数列的前 n 项和计算公式的推导中则可领悟出“错位相减法”的精髓。这些被“提炼”和“概括”的数学思想方法都是反映数学本质的东西。

案例 1-3 抛物线的四种标准方程形式

这是高中圆锥曲线教学中的内容。授课中,如何识记抛物线的四种标准方程形式,教师大多引导学生归纳出两点:(1)一次项的变量决定抛物线的对称轴;(2)一次项系数的符号决定开口方向。很少有教师通过自己的思考来引导学生体验“运动与变化”的思想方法,例如: $y^2 = 2px$ 与 $y^2 = -2px$ 关于 y 轴对称; $x^2 = 2py$ 与 $x^2 = -2py$ 关于 x 轴对称; $y^2 = 2px$ 与 $x^2 = 2py$ 关于直线 $y = x$ 对称。

“运动与变化”的思想方法形成于 17 世纪,是数学思想史上的一个重要的里程碑。其产生的原因是对于运动过程研究的需要,它的实质则是用运动与变化的眼光去看待事物。因而,运用“运动与变化”的思想方法的关键在于研究对象的运动和变化的全过程,研究它们在变化过程中各部分之间的联系。在这里引导学生用“运动与变化”的思想方法来领悟和识记抛物线的四种标准方程形式,感悟它们之间内在的联系,这实际上是对数学本质的体验。这种体验是对学生头脑中已有的:曲线 $y = f(x)$ 与 $y = f(-x)$ 的图象关于 y 轴对称;曲线 $y = f(x)$ 的图象与 $y = -f(x)$ 的图象关于 x 轴对称;曲线 $y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称等知识的深刻理解。

案例 1-4 有限制条件的排列问题

在排列组合教学内容中有这样一道例题:用 0 到 9 这 10 个数字,可以组成多少个没有重复数字的三位数?

这是一道较简单的有限制条件(0 不能排在百位上)的排列问题。教师

阅读教材时,要领悟教材安排这道例题的用意:通过这道题目的解决,引导学生“提炼”解决有限制条件的排列问题的三种最基本最常用的方法——特殊元素分析法、特殊位置分析法、间接法。但教学不能仅仅停留于此,还要考虑如何使这些反映数学本质的东西深刻地印在学生头脑中。为此,笔者认为讲授这道例题时可有意识地向学生提出以下两个小问题:

(1) 从 0 到 9 这 10 个数中选出不重复的 3 个数作为函数 $y = ax^2 + bx + c$ 中 a 、 b 、 c 的值,问可以组成多少个不同的二次函数?

(2) 从 0 到 9 这 10 个数中选出不重复的 3 个数作为圆方程 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 中 a 、 b 、 r 的值,问可以组成多少个不同的圆方程?

第(1)小题解后可接着问:可以组成多少个关于 y 轴对称的二次函数?可以组成多少个不同的函数(把“二次函数”拓展为“函数”)?第(2)小题解后可接着问:可以组成多少个圆心在 x 轴上的圆方程?

给出这两个小问题的目的在于培养学生对知识的迁移能力,通过解题后的反思,让学生领悟:数学问题的背景可以千变万化,但其中运用的数学思想方法却往往是相通的。学习数学重在掌握这种具有普遍意义和迁移价值的、能反映数学本质的“策略性”知识。注重问题间的类比,使解题后反思成为自觉的行为,这样才能达到举一反三、由例及类、解一题通一片的目的。

据说,人生有三重境界:看山是山,看水是水;看山不是山,看水不是水;看山还是山,看水还是水。经历否定之否定后的再生的“山”和“水”就是鲜活的“山”和“水”。类似地,我们在研究概念、公式、定理、法则的时候,往往要经历这否定之否定的再生历程才能领悟其中蕴涵的鲜活的思想。比如二次函数模型,高中数学有许多函数题一开始给人的感觉是二次函数模型,但细看却不是,再深思却发现确是二次函数模型。此类参悟,不胜枚举。

二、教学内容的教学法加工

(一) 把数学知识的学术形态转化为教育形态

数学有三种形态:原始形态、学术形态和教育形态。

原始形态,是指数学家发现数学真理、证明数学命题时所进行的繁复曲折的数学思考。它具有后人仿效的历史价值。

学术形态,是指数学家在发表论文时采用的形式化、严密地演绎、逻辑地推理。它呈现出简洁的、冰冷的美丽,却把原始的、火热的思想淹没在形

式化的海洋里。

教育形态,是指通过教师的努力,启发学生高效率地进行火热的思考,把人类数千年积累的数学知识形成体系,使学生更容易地接受。

张莫宙教授曾经指出,数学教学的目标之一,是要把数学的学术形态转化为教育形态。这是所有数学教师的责任。实际上,数学的学术形态通常表现为冰冷的美丽,而数学的教育形态正是一种火热的思考。数学教师的任务在于返璞归真,把数学的形式化逻辑链条恢复为当初数学家发明创新时的火热思考。更具体地说,数学教材呈现在我们面前的是按逻辑演绎系统展开的知识内容,它往往是按照“定义——定理、公式、法则——应用”这样的逻辑顺序编辑的,这种逻辑顺序与原数学研究活动顺序往往是相反的;与学生数学学习的思维活动顺序,即“问题——定理、公式、法则——定义”的顺序也是相反的。虽然教科书有时也先提供一定的实际问题,然后再概括出定理、法则、公式等,但这种进程在教科书上常常是十分简约的。由于学生的学习要大致经历原数学研究活动的进程,因此,教师不能照本宣科,否则,必然使教学进程与学生的数学思维进程不一致,从而使学生的思维活动无法充分展开,学生已有的数学认知结构与新知识之间的相互作用也不充分。因此,教师要把教材提供的逻辑顺序转变为数学活动顺序,并结合学生的数学思维发展水平,安排恰当的数学课堂教学情景和数学思维活动过程,以使课堂教学活动适合学生的认识发展规律。这个过程,也常常就是一个将数学的学术形态转化为教育形态的过程。

案例 1-5 相等向量、平行向量、共线向量和相反向量概念的形成

在平面向量起始课的教学中,笔者曾观赏过一位教师精彩的教学场景。

该教师不遵循教材先给出相等向量、平行向量、共线向量、相反向量的

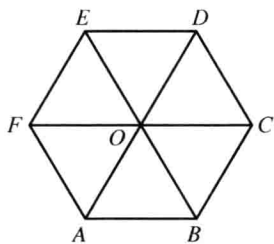


图 1-1

定义,再做练习巩固的套路,而是让学生参与概念的定义过程,使概念成为学生观察、归纳、概括之后的自然产物。

向量概念学习后,他设计了如下问题:

问题 1: 观察图 1-1 中的正六边形 $ABCDEF$, 给图中的一些线段加上箭头表示向量,并说说你所标注的向量之间的关系。(举例)

他留给学生足够的时间,并提出问题2,组织学生交流。

问题2:你是怎样研究的?比如,你画了哪几个向量?你认为它们有怎样的关系?

显然,他不仅关注结果,更关注过程,尤其是重视挖掘学生用向量概念思维的过程。

课堂中,有的学生首先关注向量长度;有的学生首先画出向量 $\overrightarrow{ED}$ 与 $\overrightarrow{AB}$,认为它们长度相等且方向相同,是相等的向量;也有学生首先画出向量 $\overrightarrow{EO}$ 与 $\overrightarrow{OB}$,认为它们是共线的向量等。教师适时介入,解释数学中的向量是自由向量,可以平移,因此, $\overrightarrow{ED}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 也称为共线向量。平行向量的产生比较顺利,但相反向量的产生有困难,其间还类比了相反数。

归纳得到:

(1)从“方向”角度看,有方向相同或相反,称为平行向量,也称共线向量,记为 $a \parallel b$ 。

(2)从“长度”角度看,有模相等的向量,记为 $|a|=|b|$ 。

(3)既关注方向,又关注长度,有相等向量 $a=b$,相反向量 $a=-b$ 。

教师指出:我们规定零向量与任意向量都平行,即 $0 \parallel a$ 。

问题3:由相等向量的概念知道,向量完全由它的方向和模确定。由此,你能说说数学中的向量与物理中的矢量的异同吗?另外,向量的平行、共线与线段的平行、共线有什么联系与区别?

该教师让学生注意把向量概念与物理背景、几何背景明确区分,真正抓住向量的本质特征,完成“数学化”的过程。

毋庸置疑,数学教材中的数学知识大多是形式地摆在那儿的,准确地定义、逻辑地演绎、严密地推理,一个字一个字地印在纸上。这种形式地、演绎地呈现出来的数学,看上去确实是冷冰冰的,教师如果“照本宣科”,先告诉学生什么叫平行向量、共线向量、相等向量、相反向量等概念,再让学生在正六边形中找出哪些向量是平行向量、哪些向量是相等向量,或与某个向量平行的向量有哪几个等,学生的学习就会被动,思维参与度低,也少了生动活泼的乐学场面(自己标注向量,说关系,这样的举例,学生有独立思考、合作交流,甚至有争辩,能体会学习这些概念以区分不同向量的必要性)。如果“照本宣科”,学生就很难进行“火热的思考”和主动建构,也就难以欣

赏“冰冷的美丽”,从而也就难以领会数学的本原了。

(二) 以学生现有思维发展水平为依据进行教学

在奥苏贝尔(Ausubel)最有影响的著作《教育心理学:一种认知观》(*Educational psychology: A Cognitive View*)的扉页上写道:“如果我不得不把教育心理学的所有内容简约成一条原理的话,我会说:影响学习的唯一最重要的因素,就是学习者已经知道了什么。要探明这一点,并应据此进行教学。”可以说,这一条原理是奥苏贝尔整个理论体系的核心。有感于此,教师应该以学生现有思维发展水平为依据,关注学生已有的知识和经验,选择与学生发展水平相适应的学习材料,为学生设置恰当的教学情境,让学生对新知识进行充分的思维加工,通过新知识与已有认知结构之间的相互作用,使新知识同化(或顺应)到已有认知结构中去,达到对新知识的相应理解和主动建构。

案例 1-6 距离

“距离”是高中立体几何中学习的内容。在这个概念的学习中,教师可先引导学生回忆初中已学的“两点之间的距离”和“直线外一点到已知直线的距离”的概念。再向学生解释几何学中关于两个图形间距离的概念:图形 F_1 内的任一点与图形 F_2 内的任一点之间的距离中的最小值,叫做图形 F_1 与图形 F_2 的距离。由此,学生对“两点之间的距离”和“直线外一点到已知直线的距离”的定义会有更深一步的理解与体会,也能从本质上深刻地认识到两个图形之间的距离最终“化归”为点与点的距离。于是对即将学习的“点到平面的距离、直线到与它平行平面的距离、两个平行平面的距离、异面直线的距离”等概念学生便不教自明了。

又如,对向量概念的学习,教师可以创设这样的问题情境:一艘在海上作业的渔船在点 A 处突遇危险,需要派救助船前往救助。若救助船从港口点 O 处出发,问沿怎样的路径才能快速找到这艘船? 学生结合日常经验,见

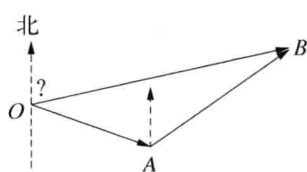


图 1-2

仁见智,不难形成共识:要找到渔船,需要从已知点 O (码头)到船 A 的距离(即线段 OA 的长度)和点 A 的具体方位(即 OA 的方向),借助这个实例,结合物理中的矢量即可自然地引出向量的概念:数学中,我们把这种既有大小、又