

高等学校試用教科书



材 料 力 学

CAILIAO LIXUE

下 册

武汉水利电力学院建筑力学教研组編

人 民 教 育 出 版 社

高等学校試用教科书



材

料



CAILIAO LIXUE 书

下 册

武汉水利电力学院建筑力学教研组編

人 民 教 育 出 版 社

本書是由武汉水利电力学院建筑力学教研組教師集体編写的，由栗一凡同志主編，参加編写工作的有成德学、李学泌、李蕢宜、王文安、欧阳民康、王篤敬、蔣桐、刘翠蓮、彭菊影、湛振雄等同志，原于1960年2月由水利电力出版社出版。1961年3月間，經清华大学、北京航空学院、唐山鉄道学院、南京工学院、大連工学院、西安交通大学、西北工业大学、华中工学院等校材料力学教研組的有關教師研究討論，由清华大学、北京航空学院的有關教師略加修改和增補后，改由人民教育出版社再版。

全書分上下两册。原書內容包括：拉伸和压縮、剪切、扭轉、弯曲、超靜定梁、应力状态理論、强度理論、能量法求变形、曲杆、穩定、許可荷重計算、動力荷重、重復应力等二十章，連同增補的實驗应力分析和薄壁構件的实用計算理論两章，合計二十二章，原書緒論部分，作了修改。

本書可作高等工业学校土建、水利类专业“材料力学”課程的試用教科書，也可供其他专业師生和工程技术人員參考。

材 料 力 学

下 册

武汉水利电力学院建筑力学教研組編

北京市书刊出版业营业許可証出字第2号

人民教育出版社出版（北京景山东街）

中央民族印刷厂印裝

新华書店北京发行所发行

各地新华書店經售

統一書号 K15010·998 开本 850×1168 $\frac{1}{32}$ 印张 9 $\frac{1}{16}$

字數 245,000 印数 18,001—28,000 定價(7) 1.10

1961年6月新1版 1962年3月北京第3次印刷

目 录

第十一章 梁的变形	367
§11-1 一般概念 梁的挠度曲线的微分方程式	367
§11-2 重积分法	370
§11-3 初参数法	374
§11-4 共轭梁法	374
§11-5 迭加法	380
小結	384
复习題	385
第十二章 超靜定梁	385
§12-1 超靜定梁的概念	385
§12-2 多余支座反力及基本靜定梁的選擇	387
§12-3 連續梁	344
§12-4 三弯矩方程式	316
§12-5 連續梁的支座反力、切力与弯矩	348
小結	357
复习題	353
第十三章 应用彈性变形能的理論求变位	353
§13-1 彈性变形能的概念 杆件受拉伸(压缩)时的变形能	353
§13-2 杆件受剪切或扭轉时的彈性变形能	381
§13-3 杆件受弯曲时的彈性变形能	363
§13-4 三向应力状态下的变形能	337
§13-5 彈性变形能的一般公式 广义力和广义变位	389
§13-6 卡氏第一定理及其应用	370
§13-7 馬克斯威尔-莫尔定理	378
§13-8 維力沙金法	350
§13-9 功的互等定理	363
§13-10 用能量法解超靜定問題	355
小結	389
复习題	359

第十四章 强度理論	390
§14-1 强度理論的概念.....	390
§14-2 四种古典强度理論.....	392
§14-3 莫尔强度理論.....	396
§14-4 对强度理論問題的分析.....	400
§14-5 联合强度理論的概念.....	402
小結.....	407
复习題.....	408
第十五章 复合抗力	409
§15-1 一般概念.....	409
§15-2 斜弯曲.....	410
§15-3 拉伸或压缩与弯曲的联合作用.....	417
§15-4 偏心压缩(拉伸).....	419
§15-5 截面核心.....	424
§15-6 扭转和弯曲的联合作用.....	432
小結.....	439
复习題.....	439
第十六章 曲杆	441
§16-1 平面曲杆的平面弯曲.....	441
§16-2 曲杆在純弯曲时正应力計算公式的推求.....	443
§16-3 几种常用截面的中性軸位置的确定.....	448
§16-4 平面曲杆在平面弯曲时的强度条件.....	453
§16-5 正应力公式的討論.....	460
§16-6 曲杆的变形.....	464
小結.....	467
复习題.....	468
第十七章 压杆的稳定 梁的側稳定	468
§17-1 稳定的概念.....	468
§17-2 临界荷重 欧拉公式.....	472
§17-3 受偏心荷重的压杆.....	477
§17-4 杆端支承方式对欧拉公式的影响.....	479
§17-5 欧拉公式的适用范围 經驗公式.....	484
§17-6 压杆的截面选择 折减系数.....	488

§ 17-7 縱橫彎曲的概念	492
§ 17-8 梁的側穩定	496
小結	503
复习題	504
第十八章 按許用荷重法計算結構物	505
§ 18-1 許用荷重法的概念	505
§ 18-2 許用荷重法在軸向拉伸或壓縮杆系計算中的应用	508
§ 18-3 許用荷重法在梁計算中的应用	512
小結	520
复习題	521
第十九章 动力荷重	521
§ 19-1 动力荷重的基本概念	521
§ 19-2 构件作等加速运动时应力的計算	523
§ 19-3 构件作等速轉动时应力的計算(旋轉圓环)	524
§ 19-4 冲击时的应力計算	526
§ 19-5 冲击时应力計算的实例	529
§ 19-6 振动时应力的計算	533
§ 19-7 地震应力的概念	539
小結	545
复习題	545
第二十章 重复应力下构件的强度計算	546
§ 20-1 关于疲劳破坏的概念	546
§ 20-2 重复应力的循环特征 持久极限	549
§ 20-3 影响材料疲劳强度的几个主要因素	552
§ 20-4 疲劳强度条件及疲劳許用应力的确定	556
小結	559
复习題	560
补第二章 开口薄壁杆件的实用計算理論	561
§ 1 基本概念	561
§ 2 自由扭轉与約束扭轉	563
§ 3 开口薄壁杆件的变形和应力的一般理論	564
§ 4 平衡条件	567

§ 5	扇性几何特征	569
§ 6	扭轉时的扇性正应力	573
§ 7	扭轉时的扇性切应力	576
§ 8	約束扭轉的变形微分方程及其解	579
§ 9	例題	582
§ 10	与梁弯曲理論的比較	591
§ 11	軸心載荷下开口薄壁杆件的稳定性	593

第十一章 梁的变形

§11-1 一般概念 梁的挠度曲线的微分方程式

(一)梁在荷重作用下，既会引起应力，同时也会发生变形。研究梁的变形是一个很重要的问题，因为有以下两个目的：

(1)使梁的设计能够满足刚度要求。如图11-1可以看作是简支吊车梁的结构计算简图，我们在设计吊车梁时，除了要使它满足强度要求以外，还应当要满足刚度要求。也就是要求梁在荷重作用下，梁上任一点的最大变位 δ 不超过许用变位值 $[\delta]$ （现行吊车梁规范一般规定 $[\delta] = L/250 \sim L/750$ ），这样才能使吊车行驶时减小振动，并满意地保持二吊车梁在接头处的连接能够比较平滑。其他如平板闸门、弧形闸门上的主横梁等，因受工作条件的限制，也都具有一定的刚度要求。因此必须对梁的变形进行研究。

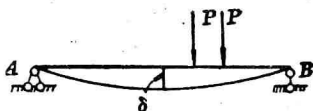


图 11-1 受集中荷重作用的简支梁

(2)要借助梁的变形以求解超静定梁的问题。这一点将在下章内专门讨论。

(二)我们首先以简支吊车梁为例，说明梁的变形概念以及解释几个重要的名词。

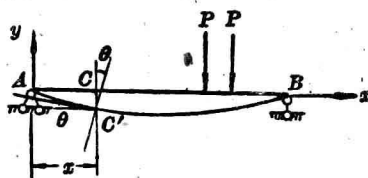


图 11-2 梁变形时所发生的两种变位——挠度与转角

如图11-2所示， AB 线表示吊车梁的轴线，作 Axy 直角坐标； x 轴与 AB 线重合， y 轴与梁端截面的主惯性轴重合， Axy 平面就表示梁的纵向对称轴平面。荷重 P 作用在这个平面内，使梁

发生平面弯曲变形。

观察梁的平面弯曲变形，可以看出：

(1) 梁的横截面产生了两种形式的变位：

一种是梁截面的形心 C 沿 y 轴方向的挠变位 CC' （在 x 轴方向的变位是二次微量，可以忽略不计）。这个挠变位一般叫做梁在该截面的挠度，它常以字母“ y ”来表示。挠度符号规定向上为正。

另一种是梁截面对它原来位置的角变位。这种角变位一般叫做梁在该截面的转角。常以“ θ ”来表示。它的符号规定以逆时针转为正。

(2) 梁的轴綫变成一条连续而光滑的曲线，这条曲线就叫做梁的挠度曲线，或者叫做弹性曲线。挠度曲线可以用方程式 $y = f(x)$ 来表示，即挠度 y 是 x 的函数。由图 11-2 可知，在 C 点的截面转角又等于该点在挠度曲线上的切线和 x 轴所夹的角度。由此导出 $\operatorname{tg} \theta = dy/dx$ ，在小变形的假设下 θ 角一般都小于 1° 。因此

$$\theta \approx \operatorname{tg} \theta = \frac{dy}{dx}. \quad (11-1)$$

式 (11-1) 表示梁在同一截面上挠度和转角之间的微分关系。

(三) 求挠度曲线的方程式可归结为求 y 与 x 之间的函数关系。由第九章纯弯曲的研究中，我们曾得到弯曲时的曲率公式 (9-18)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}.$$

对于一般的梁，虽然是非纯弯曲问题，但当梁的跨度 $L > 10h$ (h 为梁截面的高度) 时，切力对梁弯曲变形的影响可以忽略不计；如以矩形截面梁为例，由切力所引起的挠度比由弯矩所引起挠度的 3.2% 还小，因此式 (9-18) 可以推广到非纯弯曲的问题，但此时式中的 M 和 ρ 不再是常数，所以非纯弯曲的曲率公式 (9-18a) 应为

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M(x)}{EI}.$$

另外，在高等数学中，我们曾经得出任一曲线的曲率公式如下：

$$\frac{1}{\rho(x)} = \pm \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}} \quad (11-2)$$

由式(9-18a)和式(11-2)

$$\text{得} \quad \pm \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}} = \frac{M(x)}{EJ} \quad (11-3)$$

式(11-3)就是梁的撓度曲綫的微分方程式。

对于小变形的梁，它的轉角 $\theta = dy/dx$ 与1比較起来是一个很小的数值，因而式(11-3)分母中的 $(dy/dx)^2$ 一項可以略去，即式(11-3)可以簡化为：

$$\pm \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ} \quad (11-4)$$

式(11-4)叫做梁的撓度曲綫的近似微分方程式。适用于小变形的梁，它是計算梁的变形的基本公式。

式(11-4)左端的正負号，取决于 $M(x)$ 和 $d^2 y/dx^2$ 的符号規定：图 11-3 是我們习惯用的符号規定，由图可知，当 $d^2 y/dx^2 > 0$ 时 $M(x) > 0$ ，說明两者的符号是一致的。因此，式(11-4)左端的正負号可以省去，即

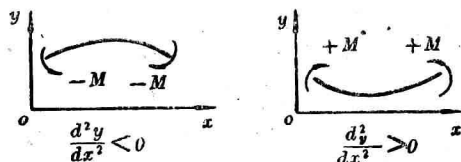


图 11-3 $M(x)$ 和 $\frac{d^2 y}{dx^2}$ 的符号

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ} \quad (11-4a)$$

应用式(11-4a)时，其中的 $M(x)$ 一項，应按第八章中的規定，将符号一并代入。求解这一微分方程式后就可以得出撓度曲

幾方程式，從而可以求得撓度和轉角。下面分別介紹研究梁的變形時常用的幾種方法。

§11-2 重積分法

將式(11-4a)積分一次，可得出轉角的方程式

$$\frac{dy}{dx} = \theta = \frac{1}{EJ} \left(\int M(x) dx + C_1 \right). \quad (11-5)$$

再積分一次，可得出撓度的方程式

$$y = \frac{1}{EJ} \left(\iint M(x) dx^2 + C_1 x + D_1 \right). \quad (11-6)$$

這樣應用兩次積分求出撓度的方法叫做重積分法。積分式中 C_1 及 D_1 為積分常數，可以由梁的邊界條件和連續條件決定。下面

舉例說明這一方法的應用。

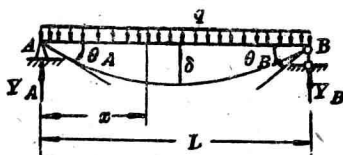


圖 11-4 受均布荷重作用的簡支梁

例題11-1 閘門上一根迭梁(承受均布荷重的簡支梁)的計算簡圖如圖11-4所示， EJ 為常數。試求梁的最大撓度 δ 及轉角 θ_A 、 θ_B 。

解 1. 列出微分方程式：

支座反力 $Y_A = Y_B = \frac{qL}{2},$

彎矩方程式 $M(x) = \frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2}.$

把 $M(x)$ 代入式(11-4a)得：

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{qL}{2} x - \frac{qx^2}{2} \right).$$

2. 積分，

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{qL}{4} x^2 - \frac{qx^3}{6} + C_1 \right), \quad (a)$$

$$y = \frac{1}{EJ} \left(\frac{qL}{12} x^3 - \frac{qx^4}{24} + C_1 x + D_1 \right). \quad (b)$$

3. 確定積分常數並列出轉角和撓度的方程式：由支座處的邊界條件，即

當 $x=0$ 時， $y=0$ ，可由式(b)得 $D_1=0$ 。

當 $x=L$ 時， $y=0$ ，可由式(b)得

$$C_1 = -qL^3/24.$$

把 C_1 和 D_1 的值代入式(a)和(b)中, 即得:

$$\text{轉角方程式 } \theta = \frac{1}{EJ} \left(\frac{qL}{4} x^2 - \frac{qx^3}{6} - \frac{qL^3}{24} \right), \quad (c)$$

$$\text{撓度方程式 } y = \frac{1}{EJ} \left(\frac{qL}{12} x^3 - \frac{qx^4}{24} - \frac{qL^3}{24} x \right). \quad (d)$$

4. 求 δ 、 θ_A 、 θ_B 。由对称关系可知最大撓度 δ 发生在梁的中点。故将 $x=L/2$ 代入式(d)得:

$$y_L = \delta = -\frac{5qL^4}{384EJ}.$$

負号表示 δ 的方向向下。

将 $x=0$ 代入式(c)得:

$$\theta_A = \theta_0 = \frac{C_1}{EJ} = -\frac{qL^3}{24EJ}.$$

負号表示 A 端截面是順时針轉的。

将 $x=L$ 代入式(c)得:

$$\theta_B = \theta_L = +\frac{qL^3}{24EJ}.$$

正号表示 B 端截面是逆时針轉。

在計算 δ 、 θ_A 、 θ_B 的具体数值时, 应注意統一单位。如采用 q (公斤/厘米)、 L (厘米)、 J (厘米⁴)、 E (公斤/厘米²) 时, 这样求得的撓度单位是厘米, 轉角单位是弧度。計算出最大撓度的数值以后, 我們就可以进行剛度校核, 如果 $\delta \leq [\delta]$, 則梁的設計就滿足了剛度要求。

例題 11-2 承受集中荷重 P 的簡支梁如图 11-5 所示, EJ 为常数, 試求梁的撓度和轉角。

解 这个题目的解題步骤与例題 11-1 相同。下面重点討論几个問題。

1. 因为一个集中荷重 P 在梁上的作用, 因而需要分段写出两个弯矩方程式, 即

$$\text{当 } 0 \leq x_1 \leq a, \quad M(x_1) = Pb/Lx_1, \quad (a)$$

$$\text{当 } a \leq x_2 \leq L, \quad M(x_2) = Pb/Lx_2 - P(x_2 - a) \quad (b)$$

将两个弯矩方程式分別代入式(11-4a), 积分后就得出四个方程式,

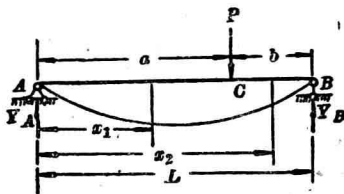


图 11-5 受一个集中荷重作用的簡支梁

$$\theta_1 = \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{pb}{L} \frac{x_1^2}{2!} + C_1 \right), \quad (c)$$

$$y_1 = \frac{1}{EJ} \left(\frac{pb}{3!L} x_1^3 + C_1 x_1 + D_1 \right), \quad (d)$$

$$\theta_2 = \frac{dy_2}{dx_2} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{pb}{L} \frac{x_2^2}{2!} - p \frac{(x_2-a)^2}{2!} + C_2 \right), \quad (e)$$

$$y_2 = \frac{1}{EJ} \left(\frac{pb}{L} \frac{x_2^3}{3!} - p \frac{(x_2-a)^3}{3!} + C_2 x_2 + D_2 \right), \quad (f)$$

这样在四个方程式中就有四个积分常数。由此推論，当梁上有 n 个不連續荷重(如集中荷重、集中力偶等)作用时，就有 $2(n+1)$ 个积分常数。

2. 积分常数的确定。例題11-2中有四个积分常数，須写出四个方程式才能解出这些常数。方程式可以根据下列的已知条件写出：

1) 連續条件。即集中荷重 P 作用下的截面 C 是第一、第二梁段的共有截面，它的轉角和撓度既可以由第一梁段的方程式計算，也可以由第二梁段的方程式計算，但因梁的撓度曲綫在截面 C 处仍是連續和光滑的，因而从第一梁段或第二梁段計算出来的截面 C 的轉角和撓度都應該相等。由此可以写出两个方程式，即

当 $x_1 = x_2 = a$ 时，

$$\theta_1 = \theta_2$$

$$\text{或} \quad \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{dy_2}{dx_2} \quad (1)$$

$$y_1 = y_2 \quad (2)$$

2) 边界条件。即

$$\text{当 } x_1 = 0 \text{ 时} \quad y_1 = 0 \quad (3)$$

$$\text{当 } x_2 = L \text{ 时} \quad y_2 = 0 \quad (4)$$

将式(1)、(2)、(3)、(4)联立求解即得：

$$D_1 = D_2 = 0,$$

$$C_1 = C_2 = -\frac{pb}{6L}(L^2 - b^2).$$

由上推論，积分常数总可以由已知的連續条件和边界条件成立足够的方程式来联立解出。

在复杂荷重的作用下，如荷重使梁的分段数目愈多：则联立求解积分常数愈是麻煩。不过从例題11-2中可以看出，如果在撓度曲綫微分方程式的建立和积分过程中，能够遵照以下四个規定，則常可将积分常数簡化为两个，即 C 和 D (即能使 $C_1 = C_2 = \dots = C$, $D_1 = D_2 = \dots = D$)。这

将大大减少计算的工作。

(a)在分段列出弯矩方程式时,各弯矩方程式中的自变量 x 应从同一个坐标原点计算起。坐标原点一般取在梁的左端。

(b)在下一梁段的弯矩方程式中,常包含了以前各段的弯矩方程式的形式;这些方程式的形式必须保持不变。如例题11-2中第二梁段的弯矩方程式(b)的第一项应和第一梁段弯矩方程式(a)的形式完全一样,不能任意分解或合并。

(c)在下一梁段的弯矩方程式中,除了和以前各段弯矩方程的形式完全一样的项以外,一定有新增加的项;这些新增加的项一定要包含乘数 $(x-a)$,此处的 a 是所有以前各梁段长度之和。如在例题11-2中,第二梁段弯矩方程式(b)中的第二项 $P(x-a)$ 就包含了乘数 $(x-a)$ 。如有集中力偶 M 作用时,只要在 $M(x)$ 的项里,将 M 值乘上 $(x-a)$ 值,这个条件就可以满足。对于其他荷重情形也是一样的。

(d)把弯矩式子代入微分方程式进行积分时,不要将其中的括弧 [如 $(x-a)$] 展开。

以上这种做法,可以简化积分常数的计算,建议读者通过做练习来加以验证。

3.最大挠度的位置。在例题11-2中,设 $a > b$ 。当 $x_1 = 0$ 时,则 $\theta < 0$; 当 $x_1 = a$ 时,则 $\theta > 0$ 。因此, $\theta = 0$ 处的位置(即最大挠度 δ 的位置)必然发生在 AC 段内。

$$\text{令} \quad \frac{dy_1}{dx_1} = \theta_1 = 0,$$

$$\text{即} \quad \theta_1 = \frac{1}{EJ} \left(\frac{pb}{L} \frac{x_1^2}{2!} + C_1 \right) = \frac{1}{EJ} \left(\frac{pb}{L} \frac{x_1^2}{2!} - \frac{pb}{6L} (L^2 - b^2) \right) = 0.$$

$$\text{由此解得} \quad x_1 = \sqrt{\frac{L^2 - b^2}{3}}. \quad (g)$$

从式(g)可以看出:

$$\text{当 } b \rightarrow 0 \text{ 时} \quad x_1 = \sqrt{\frac{L^2}{3}} = 0.577 L \quad (h)$$

$$\text{当 } b = \frac{L}{2} \text{ 时} \quad x_1 = 0.5L. \quad (i)$$

比较(h)、(i)两式可知,集中力 P 的位置对于最大挠度的位置并不发生巨大影响(见图11-6)。因此,为了实用的简便,可以不管集中力 P 的位置如何,都可以认为最大挠度发生在梁的中点,这样求出的中点挠度值和精确的最大挠度值非常接近。

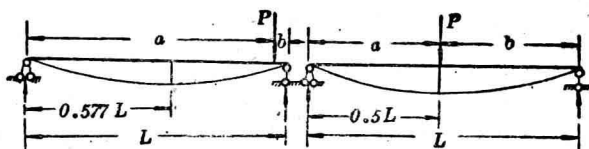


图 11-6 荷重 P 在梁上移动时，挠度曲线上最大挠度的位置

§11-3 初参数法

(一)在上一节中，我們曾將挠度曲綫的微分方程式：

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \quad (11-4a)$$

积分两次并求出挠度。在列出这个微分方程式时，必須首先求出弯矩方程式，但是研究梁的問題时，一般說来，梁上的荷重是已知值，而弯矩則是待定值。有时，当梁上作用着各种不同的荷重时，弯矩方程式的数目很多，对于梁挠度曲綫的計算就很麻煩。因此在本节內我們要介紹另一种比較簡便的方法——初参数法来計算挠度。

將式(11-4a)微分两次，得：

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{d^2 M(x)}{dx^2} = \frac{dQ(x)}{dx} = q(x). \quad (11-7)$$

在上式中，挠度的四次导数和荷重 $q(x)$ 直接連系在一块，問題就变成了如何来解这个四次的非齐次微分方程。式(11-7)的通解为：

$$y = \bar{y} + \hat{y}. \quad (a)$$

式中的 $\bar{y}$ 为齐次方程：

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = 0. \quad (b)$$

的解，而 $\hat{y}$ 是式(11-7)的特解。將式(b)积分四次得

$$EI \bar{y} = C_1 \frac{x^3}{3!} + C_2 \frac{x^2}{2!} + C_3 \frac{x}{1!} + C_4. \quad (c)$$

式(c)中的 C_1, C_2, C_3, C_4 是四个积分常数，式(11-7)的特解为：

$$EJ\ddot{\eta} = \Phi(x) = \int_0^x dx \int_0^x dx \int_0^x q(x) dx. \quad (d)$$

因此我們求得(11-7)的通解为:

$$EJy = EJ\bar{y} + EJ\dot{\eta} = EJ\bar{y} + \Phi(x) = C_1 \frac{x^3}{3!} + C_2 \frac{x^2}{2!} + C_3 \frac{x}{1!} + C_4 + \int_0^x dx \int_0^x dx \int_0^x q(x) dx. \quad (11-8)$$

上式中的四个积分常数, 可以将式(11-8)逐次微分, 并将 $x=0$ 的值代入求得。

令式(11-8)中的 $x=0$ 得 $EJy_0 = C_4$.

$$EJ \frac{dy}{dx} = C_1 \frac{x^2}{2!} + C_2 \frac{x}{1!} + C_3 + \int_0^x dx \int_0^x q(x) dx,$$

当 $x=0$ 时 $EJy'_0 = EJ\theta_0 = C_3$;

$$EJ \frac{d^2y}{dx^2} = C_1 \frac{x}{1!} + C_2 + \int_0^x q(x) dx,$$

当 $x=0$ 时 $EJy''_0 = M_0 = C_2$;

$$EJ \frac{d^3y}{dx^3} = C_1 + \int_0^x q(x) dx,$$

当 $x=0$ 时 $EJy'''_0 = Q_0 = C_1$.

在上列各式中 y_0 、 θ_0 、 M_0 、 Q_0 是梁左端($x=0$ 处)的挠度、轉角、弯矩和切力, 这四个值叫做初参数。如用初参数来表示式(11-8)的挠度方程式, 即得

$$EJy = EJy_0 + EJ\theta_0 \frac{x}{1!} + M_0 \frac{x^2}{2!} + Q_0 \frac{x^3}{3!} + \int_0^x dx \int_0^x dx \int_0^x q(x) dx. \quad (11-9)$$

(二)在四个初参数中, 两个可以从梁左边支承的边界条件求得, 另外两个可以从梁右边支承的边界条件求出。至于方程式

(11-9)右边最后的一项, 可以利用积分学中函数的 n 次积分, 按公式:

$$\int_0^x dx \int_0^x \dots \int_0^x q(x) dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{(n-1)} q(t) dt. \quad (11-10)$$

化为一次积分, 因此式(d)可写成:

$$EJ\eta = \Phi(x) = \frac{1}{3!} \int_0^x (x-t)^3 q(t) dt \quad (11-10')$$

在图 11-7a 中, 表示梁的 AB 段有均布荷重 q 作用的情形。

(1) 对于 OA 段(即 $0 \leq x \leq a_1$),

$$\begin{aligned} \text{由于} \quad & q(t) = 0 \\ \text{故} \quad & \Phi(x) = 0. \end{aligned} \quad (11-11)$$

(2) 对于 AB 段(即 $a_1 \leq x \leq a_2$),

$$\Phi(x) = \frac{1}{3!} \int_{a_1}^x (x-t)^3 q(t) dt = \frac{q}{4!} (x-a_1)^4. \quad (11-12)$$

(3) 对于 BE 段(即 $a_2 \leq x \leq L$),

$$\Phi(x) = \frac{1}{3!} \int_{a_1}^{a_2} (x-t)^3 q(t) dt = \frac{q}{4!} (x-a_1)^4 - \frac{q}{4!} (x-a_2)^4. \quad (11-13)$$

根据式(11-11)、(11-12)、(11-13)可以得出以下的规则:

(1) 以梁的左端为坐标原点, 当 x 越过了均布荷重段的起点 $x=a_1$ 时, 在函数 $\Phi(x)$ 内要列上这样的一项

$$+\frac{q}{4!} (x-a_1)^4.$$

(2) 当 x 越过了均布荷重段的终点 $x=a_2$ 时, 在 $\Phi(x)$ 内要增加一项

$$-\frac{q}{4!} (x-a_2)^4.$$

(三) 在图 11-7b 中, 表示梁上有集中力 P 作用在 C 点的情形。