普通高等教育“十二五”规划教材·物流专业

物流运筹技术

主 编 张慧颖

西北工業大學出版社
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY PRESS

普通高等教育“十二五”规划教材·物流专业

物流运筹技术

主　编　张慧颖
主　审　李建丽

西北工業大學出版社
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY PRESS

【内容简介】 本书由具有丰富教学和实践经验的一线教师编写,以突出培养学生解决实际问题的能力为目标,在编写体系上采用“项目导向,任务驱动”的模式。本书的主要内容包括物流运筹技术概述、线性规划、整数规划、运输路径规划、网络计划技术、动态规划、库存管理、排队论以及用 WinQSB 求解物流运筹学问题等。

本书既可以作为高等专科院校物流工程、物流管理、经济管理、交通运输、商业贸易等专业的教学用书,也可以作为从事经济管理、交通运输或现代物流管理等专业工作人员的业务参考书。

图书在版编目(CIP)数据

物流运筹技术/张慧颖主编. —西安:西北工业大学出版社,2011.10
ISBN 978-7-5612-3211-8

Ⅰ.①物… Ⅱ.①张… Ⅲ.①物流—运筹学—高等学校—教材 Ⅳ.①F252

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 205959 号

出版发行:西北工业大学出版社
通信地址:西安市友谊西路 127 号 邮政编码:710072
电 话:(029)88493844 88491757
网 址:www.nwpup.com
印 刷 者:河南永成彩色印刷有限公司
开 本:787 mm×1 092 mm 1/16
印 张:14.5
字 数:317 千字
版 次:2011 年 10 月第 1 版 2011 年 10 月第 1 次印刷
定 价:32.90 元

前　言

本书根据高职高专物流管理专业教学要求,“以服务为宗旨,以应用为目的,以实用为主,以必须够用为度”,淡化理论推导,强调实际应用,着重于问题的解决思路和方法,培养学生掌握物流系统常用的优化技术和方法,比较适合高职高专学生的学习要求。

本书的主要内容包括物流运筹技术概述、线性规划、整数规划、运输路径规划、网络计划技术、动态规划、库存管理、排队论以及用 WinQSB 求解物流运筹学问题等。

作为高职高专教材,本书力求概念准确,叙述深入浅出,层次分明,详略得当,语言通畅,体现较好的互动性和自学性。本书力求突出以下特点:

1. 体系新颖

本书以“少而精、浅而广”为原则,打破了旧的课程体系,精选内容,精心编排,构建了应用型物流运筹技术的新体系。

2. 实践性强

本书尽量反映物流运筹学方面的新知识和新技能,引用经典案例,以大量例题提高学生的分析、解决实际问题的能力。

3. 实用性广

本书在内容上使用大量图表,体现了课程实用性的特点,将复杂的理论知识清晰化,使学生能够准确明了地把握知识的精髓,并抓住理论概要的含义。

本书既可作为高等专科院校物流工程、物流管理、经济管理、交通运输、商业贸易等专业的教学用书,也可作为从事经济管理、交通运输或现代物流管理等专业工作人员的业务参考书。

本书由张慧颖担任主编,李建丽担任主审。

由于水平有限,编写时间紧迫,不当之处在所难免,恳请各位老师和读者批评指正。

张慧颖

2011 年 7 月

目　录

绪论　物流运筹技术概述………………………………………………………… 1
项目一　线性规划………………………………………………………………… 6
任务 1　了解线性规划的概念 ……………………………………………………… 7
任务 2　了解线性规划问题的图解法 ……………………………………………… 10
任务 3　掌握单纯形法 ……………………………………………………………… 13
项目二　整数规划 ………………………………………………………………… 31
任务 1　了解用分支定界法求解整数规划的基本思路 …………………………… 32
任务 2　了解用隐枚举法求解 0－1 规划问题的一般方法 ………………………… 37
任务 3　了解用匈牙利法求解指派问题 …………………………………………… 40
项目三　运输路径规划 …………………………………………………………… 48
任务 1　熟悉图与网络的基本概念 ………………………………………………… 49
任务 2　掌握单一起讫点的运输路线问题 ………………………………………… 55
任务 3　掌握多起讫点的运输路线问题 …………………………………………… 66
任务 4　掌握最大运输量问题 ……………………………………………………… 75
任务 5　了解起讫点重合的运输路径问题 ………………………………………… 82
项目四　网络计划技术 …………………………………………………………… 95
任务 1　掌握网络图的绘制方法 …………………………………………………… 96
任务 2　熟悉关键路线的确定与网络时间的计算 ………………………………… 100
任务 3　熟悉网络计划的优化 ……………………………………………………… 105
项目五　动态规划………………………………………………………………… 117
任务 1　了解动态规划的基本概念和基本思想 …………………………………… 118
任务 2　熟悉动态规划的应用 ……………………………………………………… 122
项目六　库存管理………………………………………………………………… 132
任务 1　了解存贮的基本概念 ……………………………………………………… 133
任务 2　掌握确定性库存模型 ……………………………………………………… 134
任务 3　熟悉随机性库存模型 ……………………………………………………… 143
项目七　排队论…………………………………………………………………… 149
任务 1　了解排队系统的基本概念 ………………………………………………… 150
任务 2　熟悉最简单流与负指数分布 ……………………………………………… 153

任务 3　掌握单服务台排队系统 …………………………………………………………… 155
任务 4　掌握多服务台排队系统 …………………………………………………………… 160
任务 5　了解排队系统的优化方法 ………………………………………………………… 163
项目八　用 WinQSB 求解物流运筹学问题 ……………………………………………… 170
任务 1　了解 WinQSB 软件 ………………………………………………………………… 170
任务 2　掌握用 WinQSB 求解线性规划与整数规划 ……………………………………… 171
任务 3　掌握用 WinQSB 求解运输问题和指派问题 ……………………………………… 178
任务 4　掌握用 WinQSB 求解动态规划 …………………………………………………… 182
任务 5　掌握用 WinQSB 求解运输路径问题 ……………………………………………… 187
任务 6　掌握用 WinQSB 求解网络计划 …………………………………………………… 192
任务 7　掌握用 WinQSB 求解库存管理问题 ……………………………………………… 197
任务 8　掌握用 WinQSB 求解排队论问题 ………………………………………………… 205
附录:实验指导书 …………………………………………………………………………… 215
实验一　线性规划……………………………………………………………………………… 216
实验二　整数规划……………………………………………………………………………… 216
实验三　运输与指派问题……………………………………………………………………… 217
实验四　运输路径问题………………………………………………………………………… 218
实验五　网络计划……………………………………………………………………………… 219
实验六　动态规划……………………………………………………………………………… 221
实验七　存贮论………………………………………………………………………………… 222
实验八　排队论………………………………………………………………………………… 224
参考文献……………………………………………………………………………………… 225

绪论

物流运筹技术概述

在物流活动中经常遇到“生产”“仓储”“运输”“配送”等问题。运筹学的理论和方法在生产、运输、仓储和配送等物流活动中的应用称为物流运筹学(Logistics Operations Research),也称之为物流运筹技术。

一、运筹学发展过程

运筹学的朴素思想可以追溯到很早以前。例如,丁谓修复皇宫的故事:北宋真宗年间,皇城失火,皇宫被毁,朝廷决定重建皇宫。丁谓负责修复烧毁的开封皇宫,他的施工方案是先将皇宫前的一条大街挖成一条沟,将沟与汴水相通,承担繁重的运输任务,挖沟挖出的土就地制砖,修复工程完成后,将废墟物回填,修复成原来的大街。丁谓将取材、生产、运输及废墟物的处理用“一沟三用”的方法巧妙地解决了。又如,都江堰水利工程:都江堰三大工程的总体构思是运筹学思想的杰出运用,“鱼嘴”岷江分水工程将岷江水有控制地引入内江;“飞沙堰”分洪排沙工程将泥沙排入外江;“宝瓶口”引水工程将除沙后的江水引入水网干道。这三者巧妙结合,完整而严密,相得益彰。两千多年来,这项工程一直发挥着巨大的效益,是我国最成功的水利工程。再如,田忌赛马的故事:齐王与大臣田忌赛马,双方各出上、中、下马各一匹,对局三次,三局两胜。田忌在好友、著名军事谋略家孙膑的指导下,以下马对齐王的上马,以上马对齐王的中马,以中马对齐王的下马,最终净胜一局。

但是,运筹学作为一个科学名词出现,并形成为一门独立的学科,则是20世纪30年代末以后的事。运筹学的早期工作应该属于前苏联著名数学家康托诺维奇(Kantorovich),他在解决工业生产组织与计划问题时,提出了线性规划模型,但当时并未受到重视。第二次世界大战期间由于军事上的需要及战后经济的发展,它才得以逐渐发展起来。当时英、美等国为了对付德国的侵略,发明制造了包括雷达在内的新式武器。但是,武器的有效使用却落后于武器的制造,因此武器的有效使用成了当务之急,“运用研究(Operational Research)”成为亟待解决的课题。于是,英国首先在空军部门成立了防空运筹小组,其成员包括数学家、物理学家、天文学家、生理学家和军事专家,任务是探讨如何抵御敌人的空袭和潜艇。后来,美国等国军队中也成立了一些专门小组,开展护航舰队保护商船等与战争有关的许多战术性问题的研究。这些运筹小组大量出色的工作,不仅为盟国在军事上重挫纳粹德国做出了重

大贡献，也为运筹学的发展积累了丰富的材料。第二次世界大战后，运筹学专家把研究的重点转向了民用问题，转向了国民经济的恢复和发展，开始着手研究战略性问题（包括军事战略问题），其中以美国的兰德公司（RAND）最为著名。从20世纪40年代后半期开始，一些科学家致力于研究运筹学的基础理论，寻找各种分析解决经济管理问题的新方法，运筹学有了迅猛发展，产生了许多新的分支，如数学规划（线性规划、非线性规划、整数规划、目标规划、动态规划、随机规划等）、图论与网络、排队论、存贮论、对策论、决策论、模拟论、维修更新理论、可靠性理论和质量管理理论等。

运筹学的发展过程大体可以划分为3个阶段：第一阶段是1946年以前，称为萌芽时期；第二阶段是1947年至20世纪60年代上半期，称为形成和发展时期；第三阶段是从20世纪60年代下半期开始至今，称为现代运筹学时期。

在我国，运筹学的研究与应用起步比较晚，20世纪50年代中期才由钱学森、许国志教授等人将运筹学由西方引入我国，但之后运筹学的发展还是相当迅速的。我国运筹学的应用是在1957年始于建筑业和纺织业，在理论联系实际的思想指导下，1958年在交通运输、工农业生产等方面都得到应用，产生了独具风格的"图上作业法"。在解决邮递员合理投递路线时，山东大学管梅谷教授在1962年首先提出了这一问题的解法，被誉为"中国邮路问题"。1970年前后在著名数学家华罗庚教授的直接指导下，在全国范围内推广统筹方法和优选法，并取得了卓著的成效，也促使一大批数学家加入到运筹学的研究队伍中来，并在运筹学的研究领域内取得了较大的成绩，在很多分支领域内赶上了当时的国际水平。

二、运筹学的研究对象

什么是运筹学？至今尚没有一个统一而且确切的定义。《辞海》的解释是：运筹学是"20世纪40年代开始形成的一门学科，主要研究经济活动与军事活动中能用数量来表达的有关运用、筹划与管理等方面的问题。它根据问题的要求，通过数学分析和运算，做出综合性的合理安排，以达到较经济、较有效地使用人力、物力。近年来，它在理论与应用方面都有较大的发展。运筹学的分支有规划论、对策论、排队论及质量控制理论等"。权威人士C. W. Churchman认为，运筹学是"把科学的方法、技术和工具应用到一个系统的各种管理问题上，为掌管系统的人们提供最佳的解决问题的办法"。莫斯（Morse）与金博尔（Kimball）在他们的奠基作《运筹学方法》中给运筹学下的定义是："运筹学是在实行管理的领域，运用数学方法，对需要进行管理的问题统筹规划，做出决策的一门应用科学"。不管运筹学的定义怎样，有一点是可以肯定的，那就是运筹学是一门跨学科的应用科学。

运筹学研究的对象是经济、军事及科学技术等活动中能用数量关系来描述的有关运用、筹划与管理等方面的问题。

运筹学的特点主要表现为以下几方面。

（1）综合性。透过各种错综复杂的数量关系，抓住主要矛盾，通过对问题的深入分析，建立数学模型或模拟模型，运用各种方法求得问题的最优解或近优解，从而得到合理的工作方案。

（2）跨学科性。为了应用运筹学有效地解决问题，必须强调多学科、多部门的密切合作。

(3)实用性。这里有两层含义,一是运筹学的研究对象都有着实际背景;二是研究的结果是“可执行”的,是符合实际的。

三、物流分析和运筹学模型

(一)物流的概念

在20世纪初期的美国,首先出现了“物流(Physical Distribution)”一词。在第二次世界大战中,围绕战争中各种军用物资的供应和军队的调动,美国国防部适时地推出了“后勤(Logistics)”理论,并将其运用到战时物资运输、仓储、补给和军队的屯驻和调动等全面管理之中。这时的“后勤”主要强调:将物资装备的生产、采购、配给和运输等活动作为一个整体进行运作,以保证物资装备补给速度最快、费用最低、服务最好,并能够安全地运达目的地。第二次世界大战结束后,美国军方很多人认为,美国赢得战争不是靠原子弹,而是靠安全而强大的后勤保障。特别值得一提的事情是在20世纪90年代初,美国和其盟国为了赢得海湾战争的胜利,千里迢迢在几个月的时间内,将50万军队士兵和280多万吨的军用物资和武器装备运达12 000千米之遥的中东战区,取得了战争的胜利。这份繁重的后勤供应工作向全世界展示了物流的重要性。

日本的物流概念是20世纪50年代直接从“Physical Distribution”翻译过来的,当时译为“物的流通”。20世纪80年代中期,日本开始采用“后勤(Logistics)”一词。

2001年8月1日,我国正式颁布了《国家标准物流术语》(GB/T 18354—2001)。该标准对物流的定义表述为:“物流是物品从供应地向接受地的实体流动过程。根据实际需要,将运输、储存、装卸、搬运、包装、流通加工、配送、信息处理等基本功能实施有机结合”。

随着物流概念的国际化,物流的内涵和外延有了新的发展。目前,绝大多数国家采用了“后勤(Logistics)”的概念。虽然对物流的理解和概念的表达方式尚存有一定的差别,但有一点已达成了共识,那就是现代物流更注重生产、采购、运输、储存、物料搬运、包装以及信息等的系统整合,从而达到整个物流系统活动的整体最优化。

(二)物流系统分析

从系统的观点出发,对物流项目进行分析研究,寻找可能采取的方案,并通过分析对比,制订出可达到预期目标的最优方案,该过程称为物流系统分析。物流系统分析是物流系统综合、优化、决策以及物流系统设计的基础。

物流系统一般认为有运输、储存保管、包装、装卸搬运、流通加工、配送以及物流信息等要素,它们既相互联系又相互制约。物流系统分析的对象(物流项目)可能是上述7项活动中某一项简单的作业活动,如对收货码头(站台)搬运进货的人员进行“时间和作业”研究,或者是配送中心车辆路线的选择以及车辆配载等作业,也可能是一项复杂的全局性的工作,如在全国范围内甚至在世界范围内对一个企业的整个物流系统进行彻底地整合,包括该企业与许多供货厂商和用户的长期伙伴关系。物流系统分析是物流系统优化的基础。物流系统分析过程中的观察了解为统计分析提供数据,经分析建立物流网络规划模型。模型通常可以模拟或预测某一现实环境条件下,系统对各种可能发生情况的反应。最后,在模拟或解析的基础上,对整个物流系统进行细心设计,以实现整合的目标,即通过组织“物”的流动,实现物流系统本身所消耗与所获得之合理的比例。

(三)物流优化技术

物流优化技术,是指物流活动中所采用的自然科学、社会科学的理论和方法,以及设施、设备、装置与工艺的总和。它包括在采购、仓储、运输、装卸、流通加工和信息处理等物流活动中所使用的各种工具和其他物质设备,以及由科学理论知识和实践经验发展而成的各种方法、技能以及作业程序等。

物流优化技术按形态可以分为硬技术和软技术。

物流硬技术,是指组织实物流通所涉及的各种机械设备、运输工具、仓储设施、站场、电子计算机、通信设备等。20 世纪 70 年代前,物流活动是以硬技术为主导型,如大型货运专用船、集装箱、自动仓库、立体仓库等。目前,发达国家的物流技术发展迅速,物流设施与装备标准化程度较高,以 EDI、互联网等为基础的物流信息系统得以广泛应用。

物流软技术,是指以提高物流系统整体效益为中心的技术方法。其包括各种物流设施设备的优化组合、搭配与衔接,物流中心和配送中心作业,物流运输终端的合理配置,物流路径的最佳选择,物流的库存控制,物流的项目计划合理安排等。也就是说,软技术是最充分地发挥硬技术的潜力,实现最合理的运用,获得最佳经济效果的技术。当前,物流技术发展的主导方向是软技术的研究、开发和应用。

本书所介绍的运筹学的有关内容属物流软技术应用范畴,它是物流实践活动中主要的优化工具之一,是物流管理人员必备的数量分析工具。

(四)运筹学的模型

1. 运筹学的工作程序

运筹学在解决大量实际问题过程中已经形成了自己的工作程序,它包括:

(1)提出和形成问题。即通过对实际问题的调查研究,弄清问题的目标,可能的约束条件,问题的可控变量(决策变量属于可控变量)以及有关参数,搜集有关资料。

(2)建立模型。即把问题中的可控变量、参数和目标与约束条件之间的关系用一定的模型表示出来。

(3)求解模型。用各种手段对模型求解,包括对复杂模型用计算机进行求解。

(4)检验模型并评价模型的解。检查求解步骤和程序有无错误,检查所得到的解是否反映现实问题。如果模型不合理,则需要重新建模。

(5)应用模型的解。在实际中实施应用,并在实施中发现问题,进行修改。

2. 运筹学模型的基本形式

运筹学模型是研究者对客观现实经过抽象后用文字、图表、符号和关系式描述所认识到的客观对象。从现有的情况看,模型有 3 种基本形式:①形象模型;②模拟模型;③符号或数学模型。

目前用得最多的是符号或数学模型,运筹学中已有不少这类模型,如线性规划模型、非线性规划模型、网络模型、投入产出模型、排队模型、存贮模型、决策和对策模型等。模拟模型是通过各种实验设计,搜集资料,并对资料进行统计推理的方法。它用计算机语言、图像显示或专门的模拟语言来实现“仿真”,适用于那些不能用数学模型和数学方法求解的复杂问题。本书对于模拟模型不作介绍,有兴趣者可参阅有关文献。

3. 运筹学模型可解决的问题

运筹学模型可解决的物流问题主要有以下几种。

(1)规划论方法可以解决物流作业和管理中的运输问题、合理选址问题、车辆调度问题、货物配载问题、资源(人员或设备)指派问题、投资分配问题等。这类问题一般可以归结为在满足一定的要求下,如何有效地利用现有的人力、财力和物力来取得最优的经济效益问题。

(2)存贮论主要用于分析物流中的库存控制问题。在保证生产过程顺利进行的前提下,如何合理确定生产物资的存贮数量和订购周期等,研究在不同需求、供货及到达方式等情况下,确定订货(生产)周期和订货(生产)批量问题。

(3)图论和网络分析方法主要用于解决物流中的运输路径规划、运输量规划、线路的合理衔接搭配、线路的通过能力、仓储与配送中心设施布局等问题。例如,在一定的输送条件下,如何使输送距离最短、输送量最大、输送运费最少等优化问题。

(4)排队论在物流过程中被广泛应用于物流系统设计和设备、人力安排等方面。例如,机场跑道设计和机场设施数量问题,如何才能既保证飞机起降的使用要求,又不浪费机场资源;又如,码头的泊位设计和装卸设备的购置问题,如何达到既能满足船舶到港的装卸要求,又不浪费港口资源;再如,如何既能保证仓储保管业务和物流机械的正常运转,又不造成人力浪费等。这些问题都可以运用排队论方法加以解决。

物流系统中不同类型的优化问题,各有其不同的优化技术,而这些优化技术绝大多数属于运筹学的有关分支。所以说,运筹学中模型方法技术是物流系统分析、优化的主要技术与方法。

四、运筹学软件

现代物流管理所表现出来的复杂性已经不是简单的算术能够解决的,电子计算机和软件技术已经成为支撑现代物流管理的有效工具。目前国内外各种版本的运筹学软件很多,在这些软件中,比较常用的有 Excel, MATLAB, ORS, QSB 等,但还没有一种软件能把运筹学的所有计算都包含其中,只能根据不同的内容选用不同的软件。本书主要介绍了 QSB 的 Windows 版本——WinQSB 软件,该软件包含了运筹学的大部分计算,有关 Excel 软件的具体操作可参阅文献[12][13]。

项 目 一

线性规划

【项目介绍】

(1)线性规划的概念。

(2)线性规划问题的图解法。

(3)单纯形法。

【项目目标】

(1)能根据实际问题建立比较简单的线性规划模型。

(2)能正确使用图解法求解只有两个变量的线性规划问题。

(3)能熟练地使用单纯形法求解线性规划问题。

【项目引入】

Duncan 工业有限公司的茶叶销售问题

Duncan 工业有限公司(DIL)是印度第三大茶叶生产商,每年销售 3 750 万美元的茶叶,其中绝大部分是袋装茶。该公司拥有 16 个茶叶种植园,3 个混合站,6 个包装站,22 个仓库。

茶叶首先从种植园发往混合站,在这里将不同的茶叶混合起来生产出各种成品茶叶,成品茶叶再发往包装站,在约 120 条生产线上按不同规格和形状进行包装。例如,一条生产线包装 500 克重的绿茶,另一条生产线包装 100 克重的红茶等。然后将这些袋装茶叶发往各个仓库,供应 11 500 名批发商,再通过这些批发商给全国约 325 000 家零售商供货。

每个月的月初,销售经理都会预测这个月每个仓库对每种袋装茶叶的需求量,并根据这些预测来决定各种袋装茶叶的产量、包装的大小以及发往各个仓库的茶叶数量。

DIL 为解决这个难题,建立了一个包含约 7 000 个决策变量、1 500 个约束条件的线性规划模型。建立模型的目的是制订出使公司运输成本最小,且满足供给、需求以及运作等多方面约束条件的公司总经营策略。公司使用过去的数据来检验这个线性规划模型,发现只需增加很少或者根本不用增加成本就可以实现上述目的。

任务1 了解线性规划的概念

线性规划是运筹学的一个重要分支。1939 年前苏联经济学家康托诺维奇(Kantorovich)在解决工业生产组织和计划时,首先提出了线性规划的数学模型,而 1947 年美国数学家丹捷格(Dantzig)提出的单纯形法则标志着线性规划在理论上的成熟。

线性规划的诞生虽然只有短短的几十年,但它在生产组织管理、交通运输、国防工业和国民经济的许多领域,都有着广泛而重要的应用。线性规划研究的问题主要有两类:一是一项任务确定后,如何用最少的人力、物力、财力去完成任务;二是如何对现有的人力、物力、财力进行合理安排,以取得最大的经济效益。

一、线性规划的数学模型

先看几个实例。

例 1-1 资源利用问题:某集装箱公司在某个时期要运送甲、乙两类物资,运送这两类物资有 A,B,C,D 4 种运输工具可供利用,各类物资每吨占用各种运输工具运输的时间、利润以及各种运输工具可以利用的最长时间见表 1-1。问在该时期内应如何安排运输任务,才能获得最大利润?

表 1-1 集装箱公司运输任务安排

每吨物资占用运输工具时间/天 \ 物资 \ 运输工具	甲	乙	运输工具的最长可利用时间/天
A	2	2	12
B	1	2	8
C	4	0	16
D	0	4	12
每吨物资的利润/千元	2	3	

解 这个问题可用下述数学模型描述。

设计划运输甲物资 x_1 吨,乙物资 x_2 吨,x_1,x_2 满足条件:

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2\leqslant 12 \\ x_1+2x_2\leqslant 8 \\ 4x_1\leqslant 16 \\ 4x_2\leqslant 12 \\ x_1,x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

且使

$$z=2x_1+3x_2$$

取得最大值。

例 1－2 运输问题：某路桥建设公司选定 A_1，A_2 两个符合条件的石料厂，其产量分别为 23 吨、27 吨。计划将石料运到 B_1，B_2，B_3 3 个工地，这 3 个工地的需求量分别为 17 吨、18 吨、15 吨。从各料厂到各工地的运价见表 1－2。问如何制订调运方案，才能使总运费最省？

表 1－2　路桥建设公司石料调运计划

运价/(元/吨)　工地 / 料厂	B_1	B_2	B_3	产量/吨
A_1	50	60	70	23
A_2	60	110	160	27
需求量/吨	17	18	15	

解　设从料厂 $A_i(i=1,2)$ 运到工地 $B_j(j=1,2,3)$ 的运量为 x_{ij}，则该问题的数学模型为（求 x_{ij} 满足的条件）

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}=23 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=27 \\ x_{11}+x_{21}=17 \\ x_{12}+x_{22}=18 \\ x_{13}+x_{23}=15 \\ x_{ij}\geqslant 0 \quad (i=1,2;\ j=1,2,3) \end{cases}$$

且使

$$z=50x_{11}+60x_{12}+70x_{13}+60x_{21}+110x_{22}+160x_{23}$$

取得最小值。

二、线性规划的概念

以上两例都是求一组非负的未知数，这些未知数在满足一组线性方程组（或线性不等式组）的条件下，使某个线性函数取得最大值（或最小值）。这类问题称为**线性规划问题**（Linear Programming，简记为 LP）。

一般地说，线性规划问题就是求一组变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，满足线性方程组（或线性不等式组），即

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1(\geqslant b_1,\leqslant b_1) \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2(\geqslant b_2,\leqslant b_2) \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m(\geqslant b_m,\leqslant b_m) \\ x_j\geqslant 0 \quad (j=1,2,\cdots,n) \end{cases} \tag{1-1}$$

且使线性函数

$$z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

取得最大值(或最小值),简记作

$$\max(\min)\ z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n \tag{1-2}$$

在线性规划的数学模型中,方程组(或不等式组)(1-1)称为**约束条件**(Constraint Condition);线性函数 z 称为**目标函数**(Objective Function);求出的 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的值称为**最优解**(Optimal Solution),相应的目标函数值称为**最优值**(Optimal Value);满足约束条件的 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的值称为该线性规划问题的**可行解**(Feasible Solution)。

由于约束条件和目标函数都是线性的,所以,这类问题称为线性规划。

三、线性规划的标准形式

在线性规划问题中,约束条件有各种形式的等式或不等式,目标函数有的要求达到最大值,有的要求达到最小值。为了便于讨论,所有的线性规划都用一种统一的形式来表示,规定线性规划的标准形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \\ x_j\geqslant 0 \quad (j=1,2,\cdots,n) \end{cases}$$

$$\max z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

也可以写成矩阵形式

$$\begin{cases} \boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{X}\geqslant 0 \end{cases}$$

$$\max z=\boldsymbol{CX}$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},\ \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

标准形式要求:

(1)约束条件用等式表示,且等式右端的常数项为非负数。

(2)目标函数为求最大值。

若线性规划的数学模型不是标准形式,可按下述方法进行变换,将其化为标准形式:

(1)若 $b_j<0$,可用(-1)乘等式(或不等式)两边。

(2)若约束条件中有不等式,对于"$\leqslant$"的不等式,可在不等式的左端加上一个人工变量,使之变为等式;对于"$\geqslant$"的不等式,可在不等式的左端减去一个人工变量,使之变为等式。人工变量在目标函数中的系数为零。

(3)若目标函数为求最小值 $\min z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$,可改为求 $-z$ 的最大值,即将目标函数改为

$$\max z'=-c_1x_1-c_2x_2-\cdots-c_nx_n$$

其中,$z'=-z$。

例 1-3 将下列线性规划化为标准形式。

$$(1)\begin{cases}3x_1+4x_2\leqslant 300\\10x_1+8x_2\geqslant 100\\x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}\qquad(2)\begin{cases}x_1+4x_2\geqslant 20\\2x_1+3x_2\geqslant -5\\x_1\leqslant 3\\x_2\leqslant 6\\x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

$$\min z=8x_1+9x_2\qquad\qquad \max z=20x_1+40x_2$$

解 (1)引入人工变量 λ_1,λ_2,令 $z'=-z$,则标准形式为

$$\begin{cases}3x_1+4x_2+\lambda_1=300\\10x_1+8x_2-\lambda_2=100\\x_1,x_2\geqslant 0\\\lambda_1,\lambda_2\geqslant 0\end{cases}$$

$$\max z'=-8x_1-9x_2$$

(2)第二个不等式两边同乘以(-1),得 $-2x_1-3x_2\leqslant 5$。引入人工变量 x_3,x_4,x_5,x_6,则标准形式为

$$\begin{cases}x_1+4x_2-x_3=20\\-2x_1-3x_2+x_4=5\\x_1+x_5=3\\x_2+x_6=6\\x_j\geqslant 0\quad(j=1,2,\cdots,6)\end{cases}$$

$$\max z=20x_1+40x_2$$

任务 2 了解线性规划问题的图解法

建立了线性规划问题的数学模型后,接下来的工作是模型的求解。求解线性规划,最常用的方法是单纯形法。对于只含有两个变量的线性规划问题,也可以用图解法(Graphical Method)求解。本任务介绍图解法并不是要提出一种有实用意义的方法来解线性规划(在实际问题中,变量通常很多),而是为介绍单纯形法提供基本思想和几何解释,并介绍一些有关线性规划的基本概念。

例 1-4 用图解法求解线性规划

$$\begin{cases} x_1+2x_2\leqslant 12 \\ x_1\leqslant 6 \\ x_2\leqslant 4 \\ x_1,x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

$$\max z=60x_1+40x_2$$

解 建立坐标系(见图1-1)。在平面直角坐标系中画出满足全部约束条件的区域(见图1-1阴影部分)。可以看出它是一个凸多边形,其内部和边界上每个点的坐标(x_1,x_2)都满足全部的约束条件,也就是说(x_1,x_2)是一个可行解。凸多边形区域(图中阴影部分)上每一个点对应着一个可行解。我们称这样的凸多边形区域为**可行域**(Feasible Region)。可行域的顶点称为**极点**(Extreme Point)。

线性规划问题的解不但要满足约束条件,而且还要使目标数值最大。这就是说,求解线性规划,要先求其可行解,然后从中找出最优解。

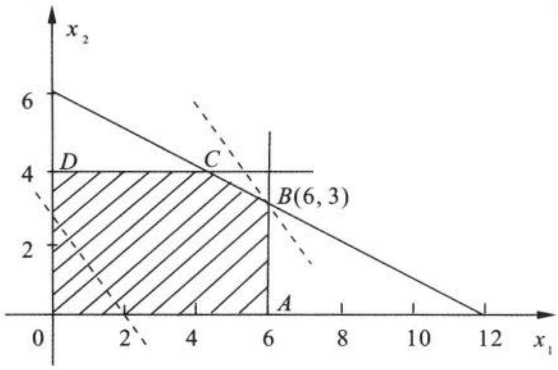

图1-1 例1-4的图解法

画出了满足全部约束条件的可行域后,接着的工作是要在可行域中找出使目标函数取得最大值的点。这种点称为**最优点**,对应的解就是最优解。

求最优点的方法:先确定一个目标函数值。例如,取$z=120$,这样就有$60x_1+40x_2=120$。在直角坐标系中画出这条直线,这条直线上的每一个点对应的目标函数值都是120。这种直线称为**等值线**。再给一个目标函数值,又可以画一条等值线,这样的等值线可以画很多,但它们是相互平行的。

一般地,$z=60x_1+40x_2$表示以z为参数的一组平行线,即

$$x_2=-\frac{60}{40}x_1+\frac{z}{40}$$

可以发现,等值线越靠近可行域的右上方,z值越大,当等值线过$B(6,3)$点时,z值最大。因此,该线性规划的最优解为$x_1=6,x_2=3$,相应的

$$\max z=60\times 6+40\times 3=480$$