



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

大学数学教程/韩旭里 主编

高等数学

(下 册)

(第三版)

周英告 秦宣云 刘旺梅 编



科学出版社

013071111

013-43

339-3

V2

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

大学数学教程/韩旭里 主编

高等数学

(下册)

(第三版)

周英告 秦宣云 刘旺梅 编



北航

C1680253

科学出版社

北京

013-43

339-3

V2

111170810

内 容 简 介

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材“大学数学教程”系列教材的高等数学(下册)部分。

全书包括空间解析几何、多元函数微分学、重积分、含参变量的积分、曲线积分与曲面积分、常微分方程与差分方程、应用数学模型等7章内容。本书体系新颖,结构严谨,内容翔实,叙述清晰,重点突出,难点分散,例题典型,习题丰富,重视对学生分析、推理、计算和应用数学能力的培养。

本书可作为高等学校理工科非数学类专业本科生的教材或教学参考书,也可供科学研究与工程技术人员学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

大学数学教程. 高等数学. 下册/韩旭里主编;周英告,秦宣云,刘旺梅编. —3版. —北京:科学出版社,2013

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

ISBN 978-7-03-038309-9

I. ①大… II. ①韩…②周…③秦…④刘… III. ①高等数学-高等学校-教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 185089 号

责任编辑:李鹏奇 王 静 / 责任校对:张怡君

责任印制:阎 磊 / 封面设计:陈 敬

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

骏志印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004 年 8 月第 一 版 开本:720×1000 B5

2008 年 7 月第 二 版 印张:30

2013 年 8 月第 三 版 字数:605 000

2013 年 8 月第十四次印刷

定价:48.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

第三版前言

大学数学课程是大学高等教育中最基础和最重要的课程之一,各高等院校都十分重视大学数学基础课程的教学.为了适应科学技术进步的要求,培养高素质的人才,我们在各级教育主管部门的领导和支持下,进行了多年的大学数学教学改革实践.我们进行教学改革的重点工作之一是注重吸取国内外高等学校在基础数学教学改革方面的进展,不断总结教学实践的经验,努力编写一套高质量的数学基础课教材.本套教材是在对原《大学数学教程》系列教材使用多年的基础上,进一步修订,出版的第三版.

本系列教材,在数学观点和思想方法上,贯穿集合、向量及映射的概念,体现局部线性化、离散化、逼近、最优化等思想.在内容体系上,淡化单纯面向专业的观念,理顺课程内容之间的关系,加强对应该普遍具备的数学基础知识的阐述,注重有利于学生对知识的理解与深化.在知识巩固和应用数学能力的培养上,除了精心选取例题和练习外,每册单独给出了与本册内容相关的应用数学模型一章,内容原则上只用到前面所学的知识,可以供相关章节中选讲,以培养学生的应用意识和提高学习兴趣,提高学生融会贯通的分析问题和解决问题的能力.

第一版教材侧重于将微积分、线性代数、概率论与数理统计的数学基础课内容统一安排教学,侧重适合于统一开设为大学数学一门课程使用.这样,对大学数学的基本内容,便于学生学习、教师教学和教学管理上的统一安排,有利于使这些基本内容保持同等重要和重视的地位.第二版教材,在保持原有指导思想的前提下,力求做到既适合于统一开设一门课程使用,也适合于分别开设多门课程使用.因而,实现了本系列教材的目标定位是作为非数学类理工科大部分本科专业的数学基础课教材,内容经选择适用于对数学要求差别不是很大的其他各类有关专业数学课程的教学.

为了更新教学内容和加强数学思维的训练,本次修订对部分内容进行了调整和补充,进一步精选了例题,补充了部分习题.每本书修订的其他情况如下:

《高等数学(上册)》是对第二版的《微积分(上册)》的修改,将函数、极限与连续两章进行了一定的调整,删除了一些不常用的内容和与中学有重叠的内容,增加了一些着重应用的数学内容,比如,介绍了一些经济管理领域内的数学概念等,并合并成了一章.适当引进了一些近似计算方法与实际应用的数学问题.第1章至第3章由刘碧玉编写,第4章至第6章由李军英编写,第7章由韩旭里编写.

《高等数学(下册)》是对第二版的《微积分(下册)》的修改,对内容力求简明直

观地描述,着重训练、应用和运算,注重增强理性思维培养的要求.第1章、第4章和第5章由刘旺梅编写,第2章和第3章由秦宣云编写,第6章由周英告编写,第7章由韩旭里编写.

《线性代数》在第二版的基础上,除了精心编写了基于线性映射定义行列式的内容,以加强培养学生的抽象思维能力,还补充了基于排列求和定义行列式的内容,便于读者参考其他教科书,更好地理解行列式的内容.将逆矩阵内容后移,与初等矩阵合并在一节,使逆矩阵内容的介绍更为紧凑.第1章至第3章由刘伟俊编写,第4章至第6章由杨文胜编写,第7章由韩旭里编写.

《概率论与数理统计》的内容在第二版的基础上,对随机事件的概率、多维随机变量的函数及假设检验进行了适当的修正,并将原来的随机变量的数字特征与极限定理一章调整为随机变量的数字特征一章和大数定律与中心极限定理一章,同时对部分章节的例题和习题作了一些增减,使其层次更加清楚,内容更加丰富和完善,适应多种课时安排的教学.第1章至第3章由裘亚峥编写,第4章至第6章由刘诚编写,第7章至第10章由陈亚力编写,第11章由韩旭里编写.

这套教材既是一个统一的整体,可以作为大学数学课程统一开课使用,进行一体化教学.各部分之间又有相对独立性,可以按四本教材分别开设课程,独立讲授.讲完全部内容大约需要290学时.如果减少一些内容,安排240学时左右讲授是可以的.《高等数学(上册)》可以考虑安排80~90学时,《高等数学(下册)》可以考虑安排90~106学时,《线性代数》可以考虑安排32~40学时,《概率论与数理统计》可以考虑安排40~54学时,教师可以根据教学计划灵活安排.

课程教学体系和教学内容的改革不是一朝一夕就能完成的,需要不断完善、不断适应时代发展的需要.本套教材前后版本的使用、修订和出版,得到很多教师和教育主管部门领导的帮助和支持,得到科学出版社的热情支持,在此表示衷心感谢.同时,本教材若有不妥与错误之处,恳请专家、同行和读者不吝指正.

编 者

2013年5月

第一版前言

大学数学课程是高等教育中最基础和最重要的课程之一,各高等院校都十分重视大学数学基础课程的教学.为了适应科学技术进步的要求,培养高素质的人才,我们在各级教育主管部门的领导和支持下,进行了多年的大学数学教学改革实践.我们进行教学改革的特点是:根据大学数学基础课程的内在联系,突破原有课程的界限,将微积分、线性代数、空间解析几何、概率论、数理统计、应用数学模型的内容有机结合,加强相互渗透,加强数学思想方法的教学,加强应用数学能力的培养,统一开设大学数学课程.按照这种教学改革的思想,我们组织编写了一体化教学教材,并经过多年的教学实践,效果是令人满意的.现在,我们在原教材的基础上,广泛吸取国内外知名大学的教学经验,并进一步改进,出版了这套系列教材.

本系列教材的目标定位是作为非数学类理工科大部分本科专业的数学基础课的教材,内容经选择也适用于对数学要求较高的其他各类有关专业的数学课程的教学.本系列教材全部内容按大约 260 学时的教学计划编写.对于学时安排较少的专业,可根据要求选择使用.对全部教学内容,建议按三个学期整体安排.

本系列教材,在数学观点和思想方法上,全书贯穿集合、向量及映射的概念,体现局部线性化、离散化、逼近、最优化等思想.在内容体系上,进一步理顺了内容之间的关系,整体优化,强调分析、代数、几何的有机结合.对大学数学基础内容统一安排教学,既有利于学生对知识的理解与深化,又能使大学数学的基本内容在教学管理、教师选课和学生选课上,保持同等重要的地位.在知识巩固和应用数学能力的培养上,除了精心选取例题和练习外,每册单独给出了与本册内容相关的应用数学模型一章,内容原则上只用到前面所学的知识,可以供相关章节中选讲,以培养学生的应用意识和提高学习兴趣,提高学生分析问题和解决问题的能力.

本系列教材是“湖南省普通高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”重点资助项目的研究成果的延续,得到了“湖南省高等教育 21 世纪课程教材”立项资助和“中南大学教育教改研究项目”的立项资助.在此,向对本系列教材的编写与出版给予帮助和支持的同志表示衷心感谢.

由于编者水平有限,若有不妥与错误之处,恳请专家、同行和读者不吝指正.

编 者

2004 年 3 月

目 录

第三版前言

第一版前言

第 1 章 空间解析几何	1
1.1 向量及其线性运算	1
1.2 空间直角坐标系 向量的坐标表示	6
1.3 数量积 向量积 混合积	12
1.4 平面及其方程	18
1.5 空间直线及其方程	24
1.6 曲面及其方程	32
1.7 空间曲线及其方程	37
1.8 二次曲面	41
习题 1	45
第 2 章 多元函数微分学	47
2.1 多元函数的基本概念	47
2.2 多元函数的极限与连续	56
2.3 偏导数与高阶偏导数	64
2.4 全微分及其应用	72
2.5 方向导数与梯度	81
2.6 多元复合函数的求导法则	88
2.7 隐函数微分法	102
2.8 偏导数的几何应用	119
2.9 多元函数的极值及其应用	130
2.10 二元函数的 Taylor 公式	147
习题 2	152
第 3 章 重积分	155
3.1 二重积分的概念与性质	155
3.2 二重积分的计算	163
3.3 二重积分的应用	182
3.4 三重积分的概念及直角坐标系下的计算	191
3.5 利用柱面坐标和球面坐标计算三重积分	199

3.6	重积分的换元法	211
3.7	三重积分的应用	222
	习题 3	228
第 4 章	含参变量的积分	230
4.1	含参变量的积分	230
4.2	广义二重积分	240
	习题 4	243
第 5 章	曲线积分与曲面积分	244
5.1	第一类曲线积分	244
5.2	第二类曲线积分	253
5.3	Green 公式及应用	262
5.4	第一类曲面积分	275
5.5	第二类曲面积分	280
5.6	Gauss 公式与 Stokes 公式	289
5.7	场论初步	300
	习题 5	308
第 6 章	常微分方程与差分方程	311
6.1	微分方程的基本概念	311
6.2	典型的一阶微分方程	317
6.3	可降阶的高阶微分方程	342
6.4	线性微分方程解的结构	352
6.5	二阶常系数线性微分方程与 Euler 方程	361
6.6	微分方程的简单应用	379
6.7	微分方程的幂级数解法	390
6.8	线性微分方程组	394
6.9	差分方程	404
	习题 6	412
第 7 章	应用数学模型	413
7.1	工人数量调整问题	413
7.2	电视机的最优价格模型	414
7.3	血管的几何学	416
7.4	乙酸回收的最好效果	418
7.5	飓风的能量有多大	420
7.6	通信卫星覆盖面积的计算	421
7.7	椭圆周长的简便计算方法	423

7.8 小岛面积变化的计算	424
7.9 用曲线积分证明 Kepler 第二定律	425
7.10 马王堆一号墓的年代	428
7.11 草坪积水问题	430
7.12 飞机减速伞的设计与应用	431
7.13 动物数量的预测模型	433
7.14 追踪走私船问题	435
7.15 导弹跟踪飞机模型	436
7.16 商品销售广告模型	439
部分习题参考答案	442

第1章 空间解析几何

在物理学以及日常生活中,我们经常遇到许多的量,如时间、功、面积、温度等,这些量在规定的单位下,都可以由一个数完全确定,这种只有大小的量称为数量.另外还有一些量,如位移、力、加速度等,它们不但有大小,而且还有方向,这种量叫向量.向量不只是一个物理量,它也是几何空间的基本几何量,通过它可以反映几何空间中点与点之间的位置关系.在对向量引进运算以后,它就成为研究空间中直线、平面等问题的有力工具.

本章首先介绍几何空间中向量的概念和运算,然后通过坐标法,把空间的点与三个有序实数、空间的图形与三元方程建立对应关系,从而可以用代数的方法来研究空间的几何问题.空间解析几何的知识正如平面解析几何的知识是学习一元函数微积分的重要基础一样,也是学习多元函数微积分必备的知识.本章后半部分将介绍平面和直线及其方程,一般的空间曲面和空间曲线及其方程.

1.1 向量及其线性运算

1.1.1 向量的概念

定义 1.1.1 既有大小又有方向的量称为向量.

在几何上,向量可以用一个有向线段来表示.假设直线段的端点之一为起点,另一端点为终点,这就确定了向量的方向,而直线段的长度反映了向量的大小.以 A 为起点, B 为终点的向量用符号 $\overrightarrow{AB}$ 来表示.向量 $\overrightarrow{AB}$ 的大小称为向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模,记作 $|\overrightarrow{AB}|$.今后为了方便,也用 $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ 或 $a, b, c, \dots$ 表示向量(图 1-1).

定义 1.1.2 如果两个向量 α 和 β 大小相等,方向相同,则称其为相等的向量,记作 $\alpha = \beta$.

由定义可知,两个相等的向量经过平行移动可以重合在一起,即现在讲的向量是自由向量,它只依赖于向量的大小和方向,而与向量的起点位置无关.

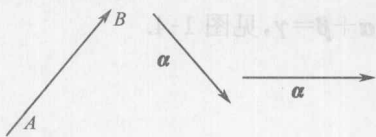


图 1-1

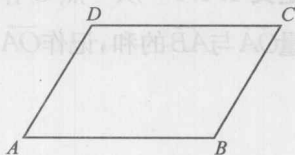


图 1-2

例如,在平行四边形 $ABCD$ 中(图 1-2)

$$\vec{AB} = \vec{DC}, \quad \vec{AD} = \vec{BC}, \quad \vec{BA} = \vec{CD}.$$

定义 1.1.3 如果两个向量 α 和 β 的大小相等方向相反,则称 β 是 α 的反向量,记作 $\beta = -\alpha$.

显然,若 β 是 α 的反向量,那么 α 也是 β 的反向量,在图 1-2 中, $\vec{AB} = -\vec{CD}$, $\vec{AD} = -\vec{CB}$. 按定义,显然 $\vec{AB} = -\vec{BA}$.

定义 1.1.4 模为 0 的向量称为零向量,记作 0 .

零向量实质上是起点与终点重合的向量,它的方向是不确定的,也可以说它的方向是任意的,可根据需要来选取它的方向.

定义 1.1.5 模为 1 的向量称为单位向量.

由于每个向量都有一个单位向量,若空间中所有单位向量都以点 O 为起点,则这些向量的终点就构成一个以 O 点为球心半径为 1 的球面.

定义 1.1.6 两个非零向量如果它们的方向相同或者相反,就称这两个向量平行,向量 α 与 β 平行,记作 $\alpha \parallel \beta$.

由于零向量的方向可以看成是任意的,因此可以认为零向量与任何向量都平行.

当两个平行向量的起点放在同一点时,它们的终点和公共起点应在一条直线上,因此,两向量平行,又称两向量共线.

定义 1.1.7 设有 $K(K \geq 3)$ 个向量,当把它们的起点放在同一点时,如果 K 个终点和公共起点在一个平面上,就称这 K 个向量共面.

1.1.2 向量的线性运算

在物理学中,通过研究力的合成、速度的合成,总结出了一般向量加法的平行四边形法则.

定义 1.1.8 从一点 O 作向量 $\vec{OA} = \alpha$, $\vec{OB} = \beta$,再以 OA, OB 为边作平行四边形 $OACB$ (图 1-3),称向量 $\vec{OC} = \gamma$ 为 $\vec{OA}$ 与 $\vec{OB}$ 的和,记作 $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OC}$,或 $\alpha + \beta = \gamma$ (称为向量加法的平行四边形法则).

这种求两个向量和的法则也称为三角形法则.

定义 1.1.9 从一点 O 作向量 $\vec{OA} = \alpha$,再由 A 点作向量 $\vec{AB} = \beta$,称向量 $\vec{OB} = \gamma$ 是向量 $\vec{OA}$ 与 $\vec{AB}$ 的和,记作 $\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$,或 $\alpha + \beta = \gamma$,见图 1-4.

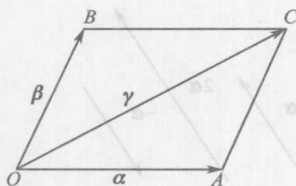


图 1-3

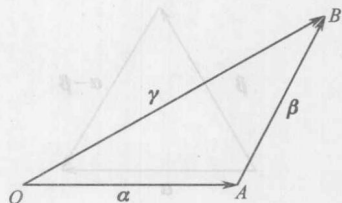


图 1-4

由定义不难验证向量加法有下述性质:

- (1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ (交换律);
- (2) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ (结合律, 参看图 1-5);
- (3) $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$;
- (4) $\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0$.

由于向量的加法满足结合律, 三个向量 α, β, γ 之和就可简记为 $\alpha + \beta + \gamma$, 而不必用括号来表示运算的顺序, n 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的和可以用三角形法则以折线一次画出, 即作 $\overrightarrow{OA_1} = \alpha_1$, 再由 A_1 点作向量 $\overrightarrow{A_1A_2} = \alpha_2, \dots$, 最后从 α_{n-1} 的终点 A_{n-1} 作向量 $\overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \alpha_n$, 那么 $\overrightarrow{OA_n} = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$.

例如, 在图 1-6 中,

$$\overrightarrow{OA_6} = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_6.$$

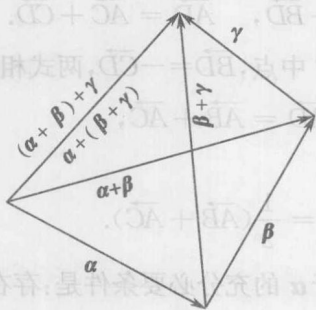


图 1-5

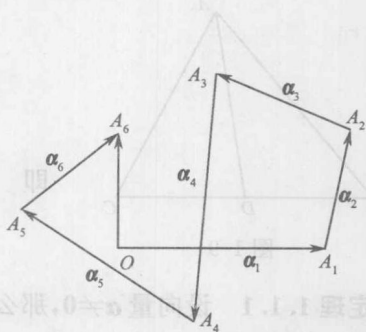


图 1-6

定义 1.1.10 规定两个向量 α 与 β 的差 $\alpha - \beta$ 是 α 与 $-\beta$ 的和, 即 $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$, 按三角形法则, $\alpha - \beta$ 是由 β 的终点到 α 的终点的向量, 见图 1-7.

向量的减法可看成向量加法的逆运算, 即如果 $\alpha + \beta = \gamma$, 则 $\alpha = \gamma - \beta$.

定义 1.1.11 实数 k 和向量 α 相乘是一个向量, 记为 $k\alpha$. 它的模 $|k\alpha|$ 等于数 k 的绝对值与向量 α 的模的乘积, 即 $|k\alpha| = |k| |\alpha|$. $k\alpha$ 的方向规定为: $k > 0$ 时, $k\alpha$ 与 α 同向; $k < 0$ 时, $k\alpha$ 与 α 反向; $k = 0$ 时, 对任意 α , 有 $k\alpha = 0$ 为零向量, 见图 1-8.

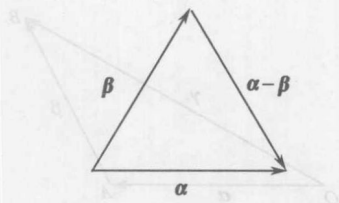


图 1-7

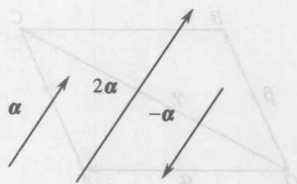


图 1-8

特别地, 如 $k = -1$ 有 $(-1)\alpha = -\alpha$; 如 $\alpha = 0$, 对任意实数 k 都有 $k\alpha = 0$ 为零向量.

数乘向量的性质是:

$$(5) 1\alpha = \alpha;$$

$$(6) k(l\alpha) = (kl)\alpha, k, l \text{ 是实数};$$

$$(7) (k+l)\alpha = k\alpha + l\alpha;$$

$$(8) k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta.$$

用向量作为工具, 可以证明平面几何中的命题. 下面通过例子说明平面几何的命题和向量的命题是如何相互转化的.

例 1.1.1 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 边中点, 见图 1-9, 证明: $\vec{AD} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$.

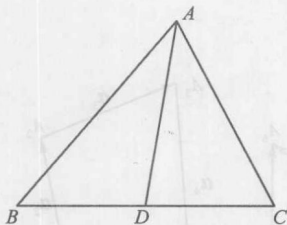


图 1-9

证 由三角形法则有

$$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD}, \quad \vec{AD} = \vec{AC} + \vec{CD}.$$

又因 D 是 BC 中点, $\vec{BD} = -\vec{CD}$, 两式相加, 得

$$2\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC},$$

即

$$\vec{AD} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}).$$

定理 1.1.1 设向量 $\alpha \neq 0$, 那么向量 β 平行于 α 的充分必要条件是: 存在唯一的实数 λ , 使 $\beta = \lambda\alpha$.

证 条件的充分性是显然的, 下面证明条件的必要性.

设 $\beta \parallel \alpha$, 取 $|\lambda| = \frac{|\beta|}{|\alpha|}$, 当 β 与 α 同向时 λ 取正值, 当 β 与 α 反向时 λ 取负值,

即有 $\beta = \lambda\alpha$, 这是因为此时 β 与 $\lambda\alpha$ 同向, 且

$$|\lambda\alpha| = |\lambda| |\alpha| = \frac{|\beta|}{|\alpha|} |\alpha| = |\beta|.$$

再证数 λ 的唯一性. 设 $\beta = \lambda\alpha$, 又设 $\beta = \mu\alpha$, 两式相减, 便得 $(\lambda - \mu)\alpha = 0$, 即

$|\lambda - \mu| |\alpha| = 0$, 因 $|\alpha| \neq 0$, 故 $|\lambda - \mu| = 0$, 即 $\lambda = \mu$.
定理得证.

例 1.1.2 用向量证明: 如果点 M 是 $\triangle ABC$ 的重心, AD 是 BC 边上中线, 见图 1-10, 则 $AM = \frac{2}{3}AD$.

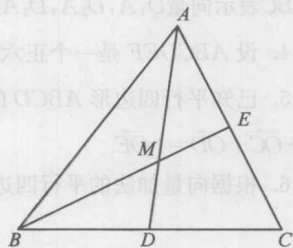


图 1-10

证 因 $\vec{AM}, \vec{AD}$ 共线, 故可设 $\vec{AM} = x \vec{AD}$, 又因 D 是 BC 边中点, 由例 1.1.1 有

$$\vec{AD} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}).$$

因此 $\vec{AM} = \frac{x}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$, 又因 BE 是 AC 边上中线, 并设 $\vec{ME} = y \vec{BE}$, 有

$$\vec{BE} = \vec{BA} + \vec{AE} = -\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}.$$

因此

$$\vec{ME} = y(-\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}).$$

在 $\triangle AME$ 中, $\vec{AM} + \vec{ME} + \vec{EA} = \mathbf{0}$, 即

$$\frac{x}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}) + y(-\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}) - \frac{1}{2}\vec{AC} = \mathbf{0},$$

即

$$(\frac{x}{2} - y)\vec{AB} + (\frac{x}{2} + \frac{y}{2} - \frac{1}{2})\vec{AC} = \mathbf{0}.$$

因 $\vec{AB}, \vec{AC}$ 不共线, 由定理 1.1.1 有

$$\begin{cases} \frac{x}{2} - y = 0, \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{2} - \frac{1}{2} = 0. \end{cases}$$

解此方程组得 $x = \frac{2}{3}$, 即 $AM = \frac{2}{3}AD$.

习 题 1.1

1. 设 $\xi = \alpha - \beta + 2\gamma$, $\eta = -\alpha + 3\beta - \gamma$, 试用 α, β, γ 表示 $2\xi - 3\eta$.
2. 如果平面上一个四边形的对角线互相平分, 试用向量证明它是平行四边形.
3. 把 $\triangle ABC$ 的 BC 边五等分, 设分点依次为 D_1, D_2, D_3, D_4 , 再把各分点与点 A 连接. 试以

$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ 表示向量 $\overrightarrow{D_1A}, \overrightarrow{D_2A}, \overrightarrow{D_3A}$ 和 $\overrightarrow{D_4A}$.

4. 设 $ABCDEF$ 是一个正六边形, $a = \overrightarrow{AB}, b = \overrightarrow{AF}$, 试用 a, b 表示 $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{EF}$.

5. 已知平行四边形 $ABCD$ 的两条对角线 AC 与 BD 交于 E , 又 O 是任意一点, 试证 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OE}$.

6. 根据向量加法的平行四边形法则说明 $|a+b| \leq |a| + |b|$, 并指出等号何时成立.

1.2 空间直角坐标系 向量的坐标表示

1.2.1 空间直角坐标系 向量的坐标表示

为了确定空间一点的位置, 就必须建立空间直角坐标系. 它是平面直角坐标系的推广.

定义 1.2.1 在空间取定一点 O 和三个两两垂直的单位向量 i, j, k , 就确定了三条都以 O 为原点的两两垂直的数轴, 依次记为 x 轴(横轴), y 轴(纵轴), z 轴(竖轴), 统称为坐标轴. 它们构成一个空间直角坐标系, 称为 $Oxyz$ 坐标系或 $[O, i, j, k]$ 坐标系(图 1-11). 通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上, 而 z 轴则是铅垂线; 它们的正向通常符合右手规则: 以右手握住 z 轴, 当右手的四个手指从正向 x 轴以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向 y 轴时, 大拇指的指向就是 z 轴的正向, 见图 1-12.

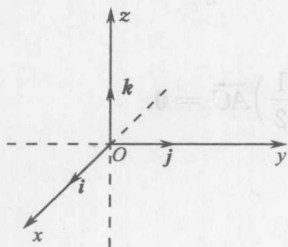


图 1-11

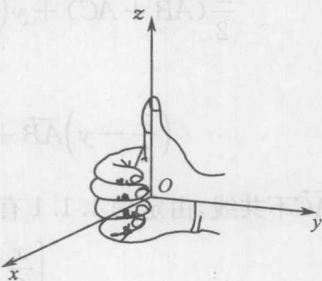


图 1-12

关于坐标系还有几个概念:

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面, 这样定出的三个平面统称为坐标面. x 轴及 y 轴所确定的坐标面称为 xOy 面, 类似还有 yOz 面和 zOx 面. 三个坐标面把空间分成八个部分, 每一部分称为一个卦限. 含有 x 轴、 y 轴与 z 轴正半轴的那个卦限称为第一卦限, 其他第二、第三、第四卦限, 在 xOy 面的上方, 按逆时针方向确定. 第五至第八卦限, 在 xOy 面的下方, 由第一卦限之下的第五卦限, 按逆时针方向确定, 这八个卦限分别用字母 I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII 表示, 见

图 1-13.

任给向量 γ , 对应有点 M , 使 $\overrightarrow{OM} = \gamma$. 以 OM 为对角线, 三条坐标轴为棱作长方体 $RHMK-OPNQ$, 见图 1-14, 有

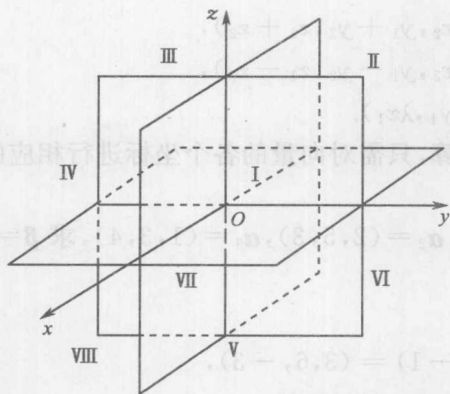


图 1-13

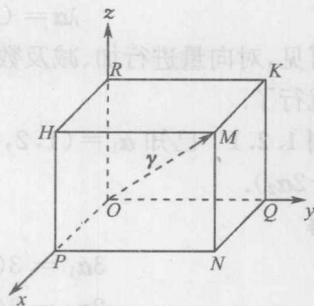


图 1-14

$$\gamma = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}.$$

设

$$\overrightarrow{OP} = xi, \quad \overrightarrow{OQ} = yj, \quad \overrightarrow{OR} = zk,$$

则

$$\gamma = \overrightarrow{OM} = xi + yj + zk.$$

上式称为向量 γ 的坐标分解式.

定义 1.2.2 若向量 γ 的坐标分解式为 $\gamma = xi + yj + zk$, 则称 xi, yj, zk 为向量 γ 沿三个坐标轴方向的分向量, 三元有序数组 (x, y, z) 称为向量 γ 的坐标, 记作 $\gamma = (x, y, z)$; 若 $\gamma = \overrightarrow{OM}$, (x, y, z) 也称为点 M 的坐标, 记作 $M(x, y, z)$.

显然在给定的空间直角坐标系下, 空间的向量(或点)与三元有序数组之间有一一对应关系.

1.2.2 利用坐标作向量的线性运算

设 $\alpha = (x_1, y_1, z_1)$, $\beta = (x_2, y_2, z_2)$, 即 $\alpha = x_1i + y_1j + z_1k$, $\beta = x_2i + y_2j + z_2k$, 则

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= (x_1i + y_1j + z_1k) + (x_2i + y_2j + z_2k) \\ &= (x_1i + x_2i) + (y_1j + y_2j) + (z_1k + z_2k) \\ &= (x_1 + x_2)i + (y_1 + y_2)j + (z_1 + z_2)k. \end{aligned}$$

类似地,

$$\alpha - \beta = (x_1 - x_2)\mathbf{i} + (y_1 - y_2)\mathbf{j} + (z_1 - z_2)\mathbf{k},$$

$$\lambda\alpha = (\lambda x_1)\mathbf{i} + (\lambda y_1)\mathbf{j} + (\lambda z_1)\mathbf{k},$$

即

$$\alpha + \beta = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2),$$

$$\alpha - \beta = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2),$$

$$\lambda\alpha = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1).$$

由此可见,对向量进行加、减及数乘运算,只需对向量的各个坐标进行相应的数量运算就行了.

例 1.2.1 已知 $\alpha_1 = (1, 2, -1)$, $\alpha_2 = (2, 5, 3)$, $\alpha_3 = (1, 3, 4)$, 求 $\beta = 4\alpha_3 + (3\alpha_1 - 2\alpha_2)$.

解

$$3\alpha_1 = 3(1, 2, -1) = (3, 6, -3),$$

$$2\alpha_2 = 2(2, 5, 3) = (4, 10, 6),$$

$$3\alpha_1 - 2\alpha_2 = (-1, -4, -9),$$

$$4\alpha_3 = 4(1, 3, 4) = (4, 12, 16).$$

故

$$\beta = 4\alpha_3 + (3\alpha_1 - 2\alpha_2) = (4, 12, 16) + (-1, -4, -9) = (3, 8, 7).$$

例 1.2.2 已知两点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B(x_2, y_2, z_2)$ 以及实数 $\lambda \neq -1$, 在直线 AB 上求点 M , 使 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$.

解 如图 1-15 所示, 由于

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM},$$

因此

$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}).$$

从而

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB}).$$

图 1-15

以 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 的坐标(即点 A 点 B 的坐标)代入, 即得

$$\overrightarrow{OM} = \left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} \right),$$

这就是点 M 的坐标.

本例中的点 M 称为有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的 λ 分点. 特别地, 当 $\lambda=1$ 时, 得线段 AB 的中点为