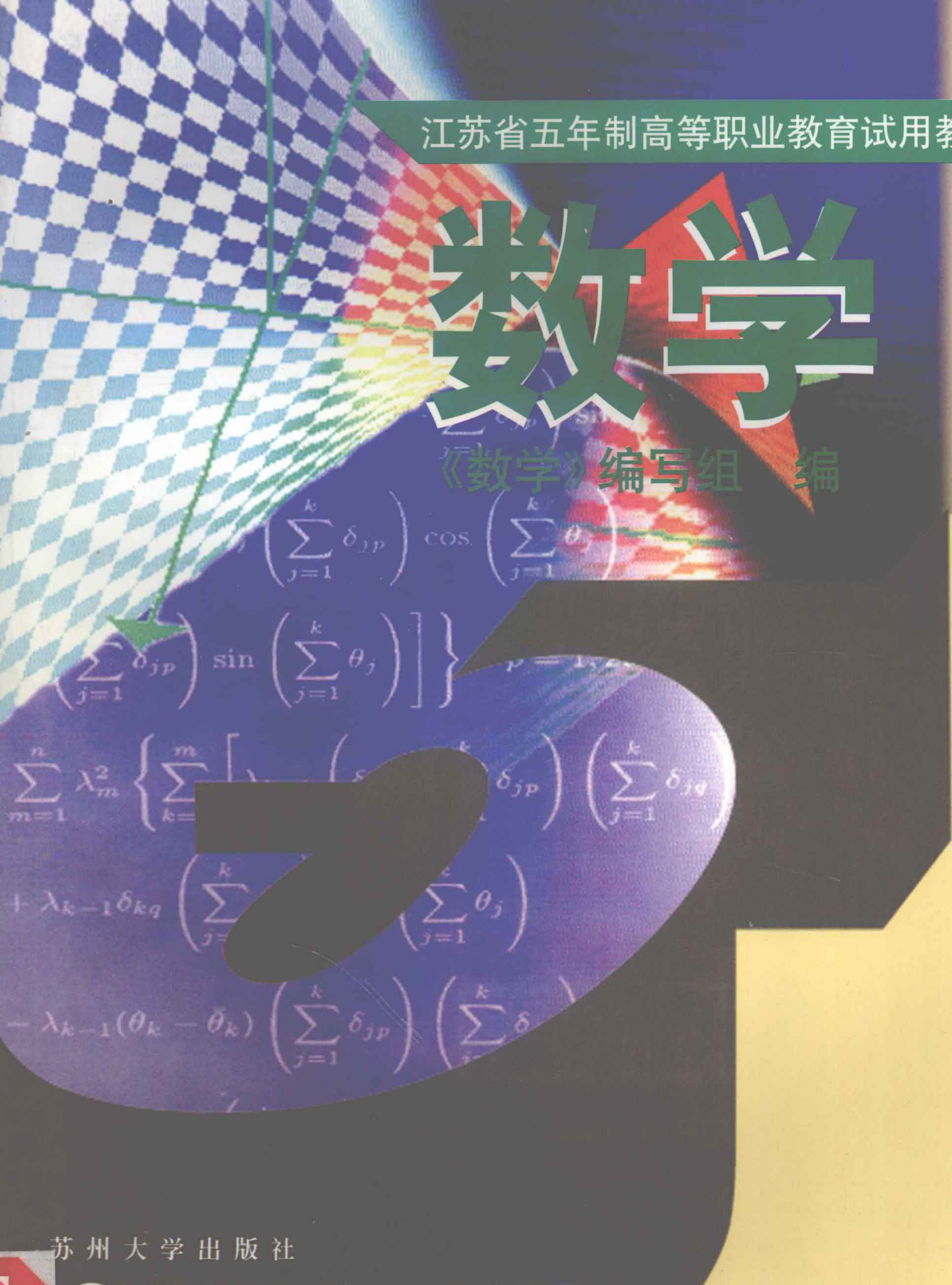
江苏省五年制高等职业教育试用教材

数学

《数学》编写组　编



第三册

SHUXUE

苏州大学出版社

江苏省五年制高等职业教育试用教材

数　　学

第三册

《数学》编写组　编

苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学　第3册/卢崇高主编.—苏州:苏州大学出版社,1999.8重印
江苏省五年制高等职业教育试用教材
ISBN 7-81037-439-7

Ⅰ.数…　Ⅱ.卢…　Ⅲ.高等数学-高等教育:职业教育-教材　Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第32009号

江苏省五年制高等职业教育试用教材
数　学(第三册)
《数学》编写组　编
责任编辑　秦　淦

苏州大学出版社出版发行
(地址:苏州市十梓街1号　邮编:215006)
江苏省新华书店经销
丹阳市华鑫印务公司照排
宜兴第二印刷厂印刷
(地址:宜兴漕桥　邮编:214217)

开本787×1092　1/16　印张15.5　字数383千
1998年8月第1版　1999年8月第2次印刷
印数10001—13000册
ISBN 7-81037-439-7/O·17(课)　定价:18.00元

苏州大学版图书若有印装错误,本社负责调换

前　言

从1995年起,原国家教委先后批准我省部分重点中专校试办五年制高职班,对我省职业教育的发展和提高起到很大的促进作用。为确保高职教育的培养目标与教学质量,努力办出高职特色,1996年11月初,在原国家教委关心指导下,省教委在无锡召开了“江苏省五年制高职教育工作研讨会”,就中专办高职的办学指导思想和管理、教学计划的制定与修订、教材建设、师资队伍建设等问题进行认真研讨,会上成立了“江苏省五年制高职教育学校协作委员会”及语文、英语、数学、物理四门公共课教材编写组,会后即组织所有试办高职班的学校的有关教师与专家,经过近两年的反复研讨,六易其稿,编写了这四门公共课的教学大纲及试用教材。

编写五年制高职公共课教材的指导思想是为了逐步构建一套适合于高职教育的公共课教材体系。在编写过程中,首先强化培养目标,开发好课程大纲,并以课程大纲为依据来组织教学内容,尽可能地体现五年制高职教育中公共课的基础性和实用性。在教学内容的安排和取舍上,遵循“尊重学科,但不恪守学科性”的原则,删旧增新,减少理论推导,着重阐明实践应用价值,强调公共课与相关学科之间的横向连接,注意与专门课程的接口,力求做到立足实践与应用,拓宽基础知识面,强化能力训练和迁移,使一般能力的培养和职业能力的培养相结合。教学内容留有适当的弹性,使不同专业和学有余力的学生可灵活选用与自学。本套教材主要适用于五年制高等职业教育,同时也可作为五年制专业班和四年制中专的教材或参考书。

四门公共课教材的编写工作,由省教委职教办组织,省高职协作会具体负责。教材编写采用主编负责制,主审协助主编把好教材质量关。编写五年制高职教材是新的探索,我们力求编好,但限于经验和水平,教材的缺点和不完善之处在所难免,请使用本教材的师生及同行们予以指正,使这套教材在实践中不断完善。

江苏省五年制高等职业教育教材编审委员会

1998年5月

编写说明

数学是五年制高等职业教育的一门必修公共课。数学的内容、思想、方法和语言已成为现代文化的重要组成部分，因此，从全面提高素质的角度来说，数学是一门重要的基础课；从综合职业能力的要求来说，数学又是进一步学习及参加社会生活、生产所必不可少的一门工具课。

这套教材的编写，我们力求遵循"拓宽基础、强化能力、立足应用"的原则。具体反映在：(1)尊重学科性，但不恪守学科性。在发扬我国数学教育的优良传统的同时，注意借鉴、渗透"大众数学"和"问题解决"等思想，重视并加强数学应用意识、应用能力的培养。(2)考虑到计算机技术为特征的信息社会对本课程的要求，增加了计算方法、数学建模、计算器使用及 *Mathematica* 软件介绍等内容。(3)注意了与初中基础的衔接，对与现代生活和后续课程联系密切的内容，适当留有"接口"。

这套教材的编写，我们试图采用"粗点"，即留有余地让教师创造性地发挥，论证不追求过于严密，有些推导采用若干支撑点过渡…；"实点"，尽量贴近生活，联系实际，便于教学；"新点"，通过新一点，逐步体现求异、求变。

这套教材共分三册。第一册以初等数学为主，第二册以一元函数微积分为主，第三册以工程数学为主。总学时为 330 学时左右。

这套教材主要供招收初中毕业生的高等职业技术教育使用，稍作处理，也可供相应专业的中等职业技术教育使用.

这套教材由谈兴华任总编。本册主编：卢崇高，主审：肖仁政。参加编写的人员有练启星、卢崇高、张晓拔、宋然兵、谢中才、谈兴华、袁震东。

这套教材的编写尽管我们作了很大的努力，但限于水平，加之时间仓促，数学教育改革中的有些问题还有待探索，因此，不足与错误之处在所难免，恳请批评指正。

值得一提的是在本书的编写和出版过程中得到了江苏省教委、各有关学校的领导及苏州大学出版社的大力支持和帮助。王兆明、殷冬生、秦淦等同志还给予了很多具体的指点，在此一并表示衷心的谢意。

《数学》编写组　　1998 年 3 月

目 录

第十九章　多元函数微积分简介

多元函数微积分学是在一元函数微积分学的基础上加以推广而发展起来的. 本章首先简介空间直角坐标系、空间向量及其运算，以及一些常见的曲面方程；然后将一元函数的极限、连续、导数和积分等概念推广到二元（以及多元）函数的情形.

§19-1　空间直角坐标系

一、坐标系的建立

在空间，由三条相互垂直且相交于点 O 的数轴构成空间直角坐标系. 这三条数轴按右手系依次称为 x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）、z 轴（竖轴）（见图 19-1），统称这三轴为坐标轴. 点 O 称为坐标原点.

任意两坐标轴所确定的平面称为坐标平面，共有 xOy、xOz、yOz 三个坐标平面，这三个坐标平面相互垂直且相交于原点 O. 它们把空间分成八个部分，每一部分称为一个卦限、各个卦限的位置如图19-2所示.

空间任意一点 P，可确定它的坐标如下：通过 P 点作三个坐标平面的平行平面和坐标轴 x、y、z 的交点在轴上的坐标依次为 x、y、z，称为 P 点的坐标，记为 $P(x,y,z)$，空间点与有序数组 (x,y,z) 一一对应.

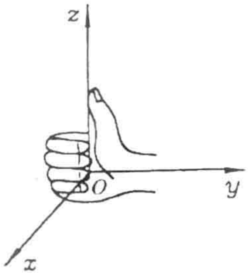


图 19-1

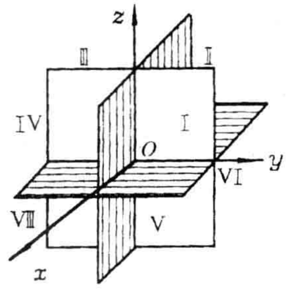


图 19-2

八个卦限里以及原点、坐标轴上点的坐标范围列表如下：

卦　限	坐标范围	卦　限	坐标范围
Ⅰ	$x>0\ y>0\ z>0$	Ⅶ	$x>0\ y<0\ z<0$
Ⅱ	$x<0\ y>0\ z>0$	Ⅷ	$x<0\ y<0\ z<0$
Ⅲ	$x<0\ y<0\ z>0$	原　点	$x=0\ y=0\ z=0$
Ⅳ	$x>0\ y<0\ z>0$	x 轴	$x\neq0\ y=0\ z=0$
Ⅴ	$x>0\ y>0\ z<0$	y 轴	$x=0\ y\neq0\ z=0$
Ⅵ	$x<0\ y>0\ z<0$	z 轴	$x=0\ y=0\ z\neq0$

二、坐标平移

设点 M 在旧坐标系中的坐标为 (x,y,z)，作一个新的坐标系：它的各坐标轴分别平行于各旧坐标轴（新坐标轴的方向和单位长度与旧坐标相同），点 M 在新的坐标系内的坐标为 (x',y',z').

设新坐标系原点为 O'，它在旧系中的坐标为 (a,b,c)，容易得到点 M 在新旧两坐标系中的坐标（见图19-3）关系为：

$$\begin{cases}x=x'+a,\\ y=y'+b,\\ z=z'+c.\end{cases} \tag{19-1-1}$$

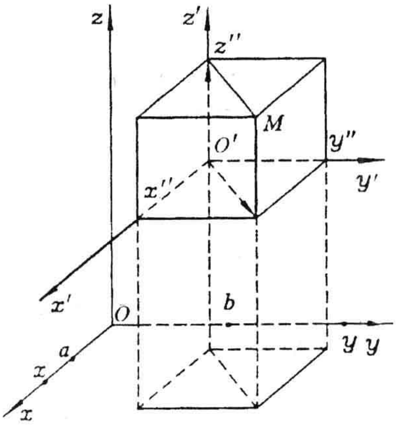


图 19-3

改写为

$$\begin{cases}x'=x-a,\\ y'=y-b,\\ z'=z-c.\end{cases} \tag{19-1-2}$$

上述公式称为坐标平移公式．其中 x、y、z 为 M 点在旧系的坐标，x'、y'、z' 为 M 点在新系的坐标，a、b、c 为新系原点在旧系中的坐标.

三、两点间的距离

1. 空间点到坐标原点的距离

设 $P(x,y,z)$ 为空间任意一点，从图19-4上不难看出，它到原点 O 的距离 d 为

$$d=|OP|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{19-1-3}$$

(19-1-3)是空间点 $P(x,y,z)$ 到原点的距离公式.

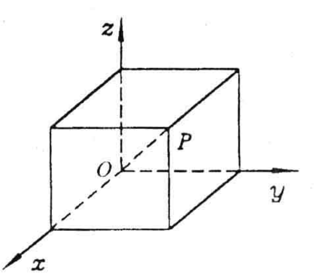


图 19-4

2. 空间任意两点间的距离

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$、$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间任意两点，我们来求它们之间的距离 d.

设想将坐标原点平移到 M_1 点，建立起新坐标系，则点 M_2 在新系内的坐标为 (x_2',y_2',z_2')，于是点 M_2 到点 M_1 的距离 d 就是点 M_2 到新系原点的距离，由(19-1-3)得到

$$d=\sqrt{x_2'^2+y_2'^2+z_2'^2}.$$

又由坐标平移公式(19-1-2)得

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{19-1-4}$$

这就是空间两点间的距离公式.

例1 已知点 $A(7,-1,12)$、$B(1,7,-12)$，试在 z 轴上求一点 C，使 $\angle ACB$ 为直角.

解 由题给条件及公式(19-1-4)知

$$|AB|=\sqrt{(1-7)^2+[7-(-1)]^2+(-12-12)^2}=26.$$

今设 C 为 $(0,0,z)$（z 轴上点的坐标都有 $x=0,y=0$），由(19-1-4)知

$$|AC|=\sqrt{7^2+(-1)^2+(12-z)^2}=\sqrt{(12-z)^2+50},$$
$$|BC|=\sqrt{1^2+7^2+(-12-z)^2}=\sqrt{(z+12)^2+50}.$$

因在$\triangle ABC$中，若有$AC^2+BC^2=AB^2$，则$\angle ACB$为直角，故令

$$[(12-z)^2+50]+[(z+12)^2+50]=26^2,$$

由此求得　$z=\pm 12$.

即求得点C为$(0,0,12)$或$(0,0,-12)$.

习　题　19-1

1. 在空间直角坐标系中作出下列各点：

$A(2,0,0)$；　　$B(0,-1,2)$；　　$C(-1,0,-2)$；

$D(-1,2,-1)$；　$E(-2,-3,-2)$；　$F(2,3,4)$.

2. 自点$A(1,-2,3)$和$B(x_0,y_0,z_0)$分别作各坐标平面和各坐标轴的垂线，并写出各垂足的坐标.

3. 分别求出$A(-1,2,-3)$和$B(x_0,y_0,z_0)$关于原点、三个坐标轴、三个坐标平面为对称的点的坐标.

4. 求点$M(4,-3,5)$到原点与各坐标轴的距离.

5. 在y轴上找一点，使它与$A(1,2,3)$、$B(0,1,-1)$两点等距.

6. 试证以$A(4,1,9)$、$B(10,-1,6)$、$C(2,4,3)$为顶点的三角形是等腰三角形.

7. 求顶点$A(2,5,0)$、$B(11,3,8)$、$C(5,1,11)$的三角形各边的长.

8. 根据下列条件求点B的未知坐标：

(1)　$A(4,-7,1)$，$B(6,2,z)$，$|AB|=11$；

(2)　$A(2,3,4)$，$B(x,-2,4)$，$|AB|=5$.

9. 在yOz平面上，求与$A(3,1,2)$、$B(4,-2,-2)$、$C(0,5,1)$等距离的点.

10. 一立方体放置在xOy平面上，其底面的中心与原点相合，底面的顶点在x轴和y轴上，已知立方体的边长为a，求它各顶点的坐标.

§19-2　向量的概念

既有大小又有方向的量称为**向量**(亦称为**矢量**). 向量常用空间中的有向线段来表示. 向量可记作$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$等. 用有向线段表示向量时，也可以用其始点和终点的大写字母来表示，如$\overrightarrow{AB}$表示始点为A终点为B的向量.

向量的大小(长度)称为它的**模**，用初等数学中的绝对值符号来表示，如$|\vec{a}|$、$|\overrightarrow{AB}|$.

模等于1的向量称为**单位向量**.

模等于0的向量称为**零向量**. 我们规定零向量的方向是任意的.

一般说来，向量与它的始点、终点的位置是有关的. 我们把与始点无关的向量称为**自由向量**. 自由向量可在空间中任意平行移动，即平行同向且模相等的向量都是相等的. 如果两个向量模相等且平行反向，则称这两向量互为**逆**向量.

一、向量的坐标表示

设有一向量$\vec{a}$，始点为原点，终点为$M(x,y,z)$，则其终点的位置不仅决定了$\vec{a}$的大小(点M到原点的距离)，同时也决定了$\vec{a}$的方向(由O到M)，因此我们可以用终点M的坐标来表示向量$\vec{a}$. 为了区别于点坐标符号，我们记为

$$\vec{a}=\{x,y,z\},\quad 或\quad \overrightarrow{OM}=\{x,y,z\},$$

该向量的模就是终点 M 到原点的距离,因此有

$$|\vec{a}|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

例如,以原点为始点,以 $A(1,0,0)$、$B(0,1,0)$、$C(0,0,1)$ 为终点的三个向量,可分别表示为

$$\overrightarrow{OA}=\{1,0,0\},\quad \overrightarrow{OB}=\{0,1,0\},\quad \overrightarrow{OC}=\{0,0,1\}.$$

不难看出这三个向量分别在 x 轴、y 轴、z 轴上,又它们的模均等于1,因此它们是 x 轴、y 轴、z 轴上的单位向量,统称为**坐标向量**.今后我们把这三个向量专门记为 $\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$,即

$$\vec{i}=\{1,0,0\},\quad \vec{j}=\{0,1,0\},\quad \vec{k}=\{0,0,1\}.$$

对于一般以 $M(a,b,c)$ 为始点,$N(x,y,z)$ 为终点的向量 $\overrightarrow{MN}$,可通过坐标平移,在以 M 为原点的新坐标系中,N 的坐标为 $(x-a,y-b,z-c)$,根据自由向量的定义,则有

$$\overrightarrow{MN}=\{x-a,y-b,z-c\},$$

它的模为

$$|\overrightarrow{MN}|=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}.$$

例如,以 $A(1,2,3)$ 为始点,$B(3,2,1)$ 为终点的向量 $\overrightarrow{AB}=\{3-1,2-2,1-3\}=\{2,0,-2\}$,其模为

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(3-1)^2+(2-2)^2+(1-3)^2}=2.$$

二、向量在坐标轴上的投影

设 $\overrightarrow{OM}$ 是以原点 O 为始点、$M(x,y,z)$ 为终点的向量.如图19-5所示,点 M 在 x 轴上的射影为点 A,我们把有向线段 OA 称为空间向量 $\overrightarrow{OM}$ 在 x 轴上的**投影**;同理,有向线段 OB 是空间向量 $\overrightarrow{OM}$ 在 y 轴上的**投影**;有向线段 OC 是空间向量 $\overrightarrow{OM}$ 在 z 轴上的**投影**.

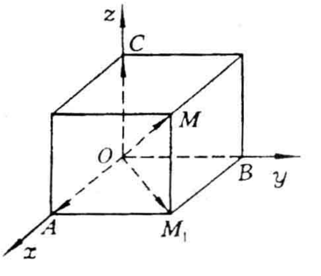


图 19-5

图19-5中不难看出 $OA=x$,$OB=y$,$OC=z$,因此向量 $\overrightarrow{OM}=\{x,y,z\}$ 在三个坐标轴上的投影就是它的三个坐标.

一般地,以点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 为始点,$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为终点的向量,则可通过坐标平移将坐标原点移到点 M 上(图19-6).不难看出,向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 在三个坐标轴上的投影分别为 x_1x_2、y_1y_2、z_1z_2,又因 $x_1x_2=Ox_2-Ox_1=x_2-x_1$,$y_1y_2=Oy_2-Oy_1=y_2-y_1$,$z_1z_2=Oz_2-Oz_1=z_2-z_1$,因而向量 $\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_1-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$ 在三个坐标轴上的投影的数量就是它的三个坐标.

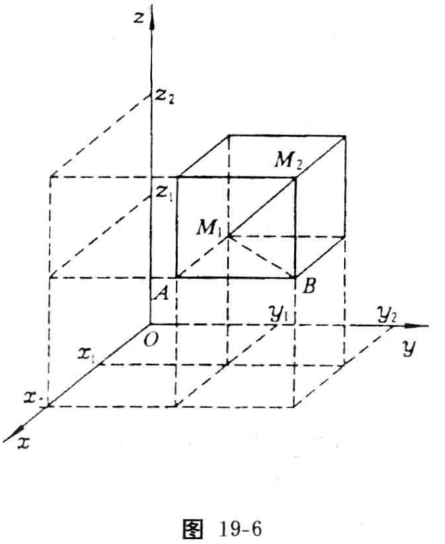


图 19-6

三、向量的方向余弦

设向量 $\overrightarrow{OM}=\{x,y,z\}$ 与 x 轴、y 轴、z 轴正向所夹的角为 α、β、γ,在图19-5中可看到 $\alpha=\angle AOM$,$\beta=\angle BOM$,$\gamma=\angle COM$,我们称这三个角为向量

$\overrightarrow{OM}$的**方向角**，同时规定它们的取值范围为$0\leqslant\alpha\leqslant\pi$，$0\leqslant\beta\leqslant\pi$，$0\leqslant\gamma\leqslant\pi$.

向量的三个方向角的余弦值称为该向量的**方向余弦**.

下面我们来求向量 $\overrightarrow{OM}$ 的方向余弦.

我们知道点 A 是点 M 在 x 轴上的投影（见图19-5），故连接 AM，则有 $AM\perp OA$. 在 Rt$\triangle AOM$ 中，$OA=x$，$OM=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，于是有

$$\cos\alpha=\frac{OA}{|OM|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

同理可得

$$\cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

显然有

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

即任何一个非零向量的三个方向余弦之和等于1.

四、向量的加减法

设有向量 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$（图19-7），作以 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AD}$为邻边的平行四边形，其对角线 AC 构成的向量 $\overrightarrow{AC}$记为 $\vec{c}$，我们称 $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$为向量 $\vec{a}$与 $\vec{b}$的**和向量**（简称为和），并记为

$$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}.$$

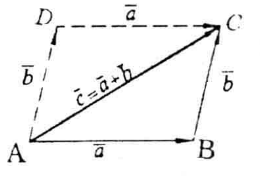


图 19-7

也就是说，两个向量相加遵循平行四边形法则.

因为我们讨论的是自由向量，故有

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD},$$

于是有

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}.$$

这就是说，两个向量相加亦遵循三角形法则.

若 $\vec{a}$与 $\vec{b}$的夹角为 φ，其中 $\vec{a}+\vec{b}$的模将由三角形的余弦定理来确定，即

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi,$$

对于多个向量的和，我们采取两个两个逐步相加的办法来求得.

向量的加法满足**交换律**和**结合律**，即

(1)　$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$，

(2)　$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{C}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

若 $\vec{b}+\vec{a}=\vec{c}$（图19-7），则称 $\vec{b}$为向量 $\vec{c}$与 $\vec{a}$的**差向量**（简称**差**），记为 $\vec{b}=\vec{c}-\vec{a}=\vec{c}+(-\vec{a})$，其中$(-\vec{a})$为 $\vec{a}$的逆向量.

五、数乘向量

实数 λ 与向量 $\vec{a}$相乘的结果仍为向量，记作 $\lambda\vec{a}$，并称为数 λ 与向量 $\vec{a}$的**数乘向量**，其模为 $|\vec{a}|$的$|\lambda|$倍，且与 $\vec{a}$平行，而指向由 λ 的符号决定：

当 $\lambda>0$时，$\lambda\vec{a}$与 $\vec{a}$同向；

当 $\lambda<0$时，$\lambda\vec{a}$与 $\vec{a}$反向.

容易证明数与向量相乘的一些性质：

(1) $1\vec{a}=\vec{a}$；

(2) $(-1)\vec{a}=-\vec{a}$；

(3) $\lambda\vec{a}=\vec{a}\lambda$（$\lambda$ 是数）；

(4) $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$ （λ,μ 均为数）；

(5) $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$；

(6) $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$.

任何一个非零向量 $\vec{a}$ 乘上它的模的倒数后即得在 $\vec{a}$ 方向上的单位向量 $\overrightarrow{a^0}$，即

$$\overrightarrow{a^0}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \qquad \text{或} \qquad \vec{a}=|\vec{a}|\overrightarrow{a^0}.$$

六、向量的加减法与数乘的坐标表示

设有向量 $\vec{a}=\overrightarrow{OM}=\{a_1,a_2,a_3\}$，$\overrightarrow{OM}$ 在三个坐标轴上的投影分别为 $OA=a_1$，$OB=a_2$，$OC=a_3$（见图19-8），我们把它们看作向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，则称这三个向量为 $\overrightarrow{OM}$ 在三个坐标轴上的**分向量**（简称分量）.

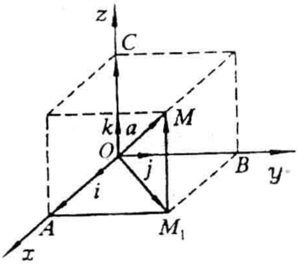


图 19-8

显然有

$\overrightarrow{OA}=a_1\vec{i}$， $\overrightarrow{OB}=a_2\vec{j}$， $\overrightarrow{OC}=a_3\vec{k}$.

因 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OM_1}$，而 $\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}$，故有

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC},$$

即 $\vec{a}=\{a_1,a_2,a_3\}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$.

这就是说，任何一个向量都可以表示为它的三个分量之和.

设 λ 是数，则有

$$\lambda\vec{a}=\lambda(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})=\lambda a_1\vec{i}+\lambda a_2\vec{j}+\lambda a_3\vec{k}=\{\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3\},$$

即**数乘以一个向量就是把这个数乘以向量的每一个坐标**.

如果另有一个向量 $\vec{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$，那末

$$\vec{a}\pm\vec{b}=(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})\pm(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k})=(a_1\pm b_1)\vec{i}+(a_2+b_2)\vec{j}+(a_3+b_3)\vec{k}.$$

即有

$$\vec{a}\pm\vec{b}=\{a_1,a_2,a_3\}\pm\{b_1,b_2,b_3\}=\{a_1\pm b_1,a_2\pm b_2,a_3\pm b_3\}.$$

这就是说，**两个向量相加减就是它们的对应坐标相加减**.

定理 两个非零向量相互平行的充要条件是它们的对应坐标成比例.

即 $\vec{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$ 平行于 $\vec{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$ 的充要条件是对应坐标成比例.

证明留给读者.

例1 已知向量 $\vec{a}=\{4,-1,3\}$，$\vec{b}=\{5,2,-2\}$，求 $2\vec{a}+3\vec{b}$.

解 $2\vec{a}=\{2\times4,2\times(-1),2\times3\}=\{8,-2,6\}$，

$3\vec{b}=\{3\times5,3\times1,3\times(-2)\}=\{15,6,-6\}$，

故 $2\vec{a}+3\vec{b}=\{8+15,-2+6,6+(-6)\}=\{23,4,0\}$.

例2 已知两点 $P_1(1,-2,3)$，$P_2(4,2,-1)$，求 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的模与方向余弦.

解 $\overrightarrow{P_1P_2}=\{4-1,2-(-2),-1-3\}=\{3,4,-4\}$,

$|\overrightarrow{P_1P_2}|=\sqrt{3^2+4^2+(-4)^2}=\sqrt{9+16+16}=\sqrt{41}$,

设 $\overrightarrow{P_1P_2}$的方向角为 α、β、γ,则有

$$\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{41}},\quad \cos\beta=\frac{4}{\sqrt{41}},\quad \cos\gamma=\frac{-4}{\sqrt{41}}.$$

习　题19-2

1. 已知向量 $\vec{a}=\{3,5,-1\}$,$\vec{b}=\{2,2,3\}$,$\vec{c}=\{4,-1,-3\}$,求下列各向量的坐标:

(1)　$2\vec{a}$;　　(2)　$\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$;

(3)　$2\vec{a}-3\vec{b}+4\vec{c}$;　　(4)　$m\vec{a}+n\vec{b}$.

2. (1)已知 $\vec{a}=\{3,-1,2\}$,起点为(2,0,-5),求其终点;(2)已知 $\vec{b}=-4\vec{i}+2\vec{j}+5\vec{k}$,且终点为(0,4,2)求其起点.

3. 求向量 $\vec{a}=\vec{i}+\sqrt{2}\vec{j}+\vec{k}$与坐标轴间的夹角.

4. 设已知两点 $A(4,0,5)$、$B(7,1,3)$,求方向和 $\overrightarrow{AB}$一致的单位向量.

5. 设向量的方向角为 α、β、γ,若已知其中之二角,求第三角:

(1)$\alpha=60°$,$\beta=120°$;(2)$\alpha=135°$,$\beta=60°$.

6. 已知一向量的方向角满足 $\alpha=\beta=\frac{1}{2}\gamma$,求该向量的方向余弦.

7. 求 $\overrightarrow{P_1P_2}$的模与方向余弦:

(1)　$P_1(0,0,-1)$,$P_2(2,5,5)$;　　(2)　$P_1(1,-3,3)$,$P_2(4,2,-1)$.

8. 已知 $\vec{a}=\{3,5,-4\}$,$\vec{b}=\{2,1,8\}$.

(1)求$2\vec{a}-3\vec{b}$;(2)λ 与 μ 满足什么条件时,$\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$垂直于 y 轴?

9. 已知力 $\vec{F}=\{1,1,3\}$及 $\vec{F_2}=\{2,-3,1\}$作用于一点,问用怎样的力才能与之平衡?

10. 已知向量 $\overrightarrow{AB}$的终点为 $B(-1,2,1)$,$|\overrightarrow{AB}|=2$,且与 $\vec{a}=\{1,2,2\}$平行,求向量起点 A 的坐标.

§19-3　向量的数量积与向量积

一、两向量的数量积

1. 定义

已知两向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$及其夹角为 θ,$(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$,则称

$$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

为 $\vec{a}$与 $\vec{b}$的**数量积**,记为 $\vec{a}\cdot\vec{b}$,读作 $\vec{a}$点乘 $\vec{b}$.

记号中的"·"不能省略,也不能改为"×".

显然,两向量的数量积是一个数量.

2. 物理意义

质点 m 受力 $\vec{b}$的作用从 M 点沿直线移动到 M_1,设$\overrightarrow{MM_1}=\vec{a}$,则力 $\vec{b}$在$\overrightarrow{MM_1}$方向上所做的功为

$$W=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\vec{a}\cdot\vec{b}.$$

其中$(\widehat{\vec{a}、\vec{b}})$表示 $\vec{a}$与 $\vec{b}$之间的夹角.

可见,$\vec{a}\cdot\vec{b}$表示力 $\vec{b}$在位移 $\vec{a}$方向所做的功.

3. 基本性质

(1)$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$;

(2)$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$;

(3)$\vec{a}(+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$;

(4)$\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}$.

定理 两非零向量互相垂直的充要条件是这两个向量的数量积等于零.即当$|\vec{a}|\neq 0,|\vec{b}|\neq 0$时,$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

证明留给读者完成.

4. 向量数量积的坐标表示

不难证明坐标向量 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$的数量积性质:

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1;$$
$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0.$$

即坐标向量自身点乘等于1,相异两个坐标向量的数量积为0.

设有两个向量 $\vec{a}=\{a_1,a_2,a_3\}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$、$\vec{b}=\{b_1,b_2,b_3\}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$,则

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b}&=(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})\cdot(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k})\\&=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.\end{aligned}$$

即两向量的数量积等于此两向量的对应坐标的乘积之和.

例1已知 $\vec{a}=\{11,10,2\}$、$\vec{b}=\{4,0,3\}$,求 $\vec{a}\cdot\vec{b}$,$\vec{a}$与 $\vec{b}$的夹角.

解 $\vec{a}\cdot\vec{b}=11\times 4+10\times 0+2\times 3=50$,

$|\vec{a}|=\sqrt{11^2+10^2+2^2}=15$,$|\vec{b}|=\sqrt{4^2+0^2+3^2}=5$,

由定义知 $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$,

故 $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\dfrac{50}{15\times 5}=\dfrac{2}{3}$.

于是得 $\vec{a}$与 $\vec{b}$的夹角为 $\varphi=\arccos\dfrac{2}{3}$.

二、两向量的向量积

1. 定义

已知两向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$及它们的夹角为 θ,它们的向量积为一个向量,其模为$|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$,方向垂直 $\vec{a}$,$\vec{b}$所在平面,指向由右手定则确定的向量称为向量 $\vec{a}$与 $\vec{b}$的**向量积**,记为 $\vec{a}\times\vec{b}$,读作 $\vec{a}$叉乘 $\vec{b}$.这里的乘号"×"不能省略,也不能改为"·".

如果两向量 $\vec{a}$,$\vec{b}$平行(即$(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=0$或 π)或有一个是零向量,则我们规定它们的向量积为零向量:$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.

2. 物理意义

力 $\vec{b}$作用在力臂 OA 的一端点 A(图19-9),令 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$,则力 $\vec{b}$对于点 O 的力矩 $\vec{M}$的模为

$$|\vec{M}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}}).$$

$\vec{M}$的方向由右手法则确定.可见,$\vec{M}=\vec{a}\times\vec{b}$.

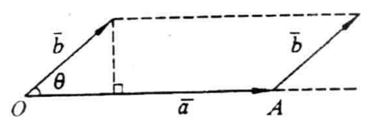


图 19-9

3. 基本性质

(1)$\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$;

(2)$\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$;

(3)$(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b}),\vec{a}\times(\lambda\vec{b})=\lambda)(\vec{a}\times\vec{b})$;

(4)$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$.

$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$.

定理 两非零向量平行的充要条件是这两个向量的向量积为零向量.即当$|\vec{a}|\neq0,|\vec{b}|\neq0$时,$\vec{a}/\!/\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.

4. 向量积的坐标表示

坐标向量 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$的向量积有以下性质:

$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{0},\vec{j}\times\vec{j}=\vec{0},\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}$;

$\vec{i}\times\vec{j}=-(\vec{j}\times\vec{k})=\vec{k},\quad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\quad \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$.

设有 $\vec{a}=\{a_1,a_2,a_3\}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$, $\vec{b}=\{b_1,b_2,b_3\}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$,则

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b}&=(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})\times(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k})\\&=a_1b_2(\vec{i}\times\vec{j})+a_1b_3(\vec{i}\times\vec{k})+a_2b_1(\vec{j}\times\vec{i})+a_2b_3(\vec{j}\times\vec{k})+a_3b_1(\vec{k}\times\vec{i})+a_3b_2(\vec{k}\times\vec{j})\\&=(a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}.\end{aligned}$$

我们借用行列式来表示上述结果,即

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}.$$

此行列式按第一行展开后就是前面的式子.

例2 已知 $\vec{a}=\{2,1,-1\},\vec{b}\{1,-1,2\}$,求 $\vec{a}\times\vec{b}$以及 $\vec{a}$与 $\vec{b}$的夹角的正弦值.

解 $$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&1&-1\\1&-1&2\end{vmatrix}=(2-1)\vec{i}-(4+1)\vec{j}+(-2-1)\vec{k}$$

$$=\vec{i}-5\vec{j}-3\vec{k}=\{1,-5,-3\};$$

$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{6},|\vec{b}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{6}$,

$|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{1^2+(-5)^2+(-3)^2}=\sqrt{35}$,

于是 $\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\dfrac{\sqrt{35}}{\sqrt{6}\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{35}}{6}$.

例3 设 $\vec{a}=\overrightarrow{MA},\vec{b}=\overrightarrow{MB},\vec{c}=\overrightarrow{MC}$,则 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$共面的充要条件是$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$.

证 必要性:因 $\vec{a}\times\vec{b}$垂直于 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$所在平面,故$(\vec{a}\times\vec{b})\perp\vec{c}$,于是$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$;

充分性:因$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$,故$(\vec{a}\times\vec{b})\perp\vec{c}$,而 $\vec{a}\times\vec{b}$垂直于由 $\vec{a}$与 $\vec{b}$所确定的平面,又 $\vec{c}$的始点 M 在此平面上,故 $\vec{c}$也在此平面上,即 $\vec{c}$与 $\vec{a}$、$\vec{b}$共面.

由例3立即可得,M、A、B、C 四点共面的充要条件是

$$(\overrightarrow{MA}\times\overrightarrow{MB})\cdot\overrightarrow{MC}=0.$$