全国高职高专公共基础课“十一五”规划教材

高等数学

姜晓明○主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

全国高职高专公共基础课“十一五”规划教材

高 等 数 学

主　编　姜晓明
副主编　陈　博　刘开明　王　黎
参　编　姜　鑫　陈　舒　荀书丰
　　　　朱琳琳　胡效华
主　审　王德才

机 械 工 业 出 版 社

本书是为适应新的职业教育人才培养要求，在参照《高职高专教育高等数学课程教学的基本要求》的基础上，结合编者多年的教学实践编写而成的。

全书共九章，内容包括函数与极限、导数与微分、不定积分、定积分、常微分方程、无穷级数、拉普拉斯变换、行列式与矩阵、概率论初步。前四章为各专业的基础模块，不低于42学时；后五章为扩展模块，可根据各专业不同的培养要求，选学相应的内容。

本书可作为高等职业技术院校、高等专科学校、成人高等学校的教材，也可作为工程技术人员的数学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/姜晓明主编．—北京：机械工业出版社，2007.8（2008.8重印）

全国高职高专公共基础课“十一五”规划教材

ISBN 978-7-111-21714-5

Ⅰ.高…　Ⅱ.姜…　Ⅲ.高等数学-高等学校：技术学校-教材　Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第093240号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）
责任编辑：李大国　版式设计：霍永明　责任校对：陈延翔
封面设计：王伟光　责任印制：洪汉军
北京振兴源印务有限公司印刷厂印刷
2008年8月第1版第2次印刷
169mm×239mm·14.25印张·274千字
4001—8000册
标准书号：ISBN 978-7-111-21714-5
定价：17.50元

前　　言

为适应新的职业教育人才培养要求，各高职高专院校加强了对专业课程的教学改革，强化了对学生专业技能的培养。高等数学作为高职高专院校专业人才培养方案课程体系的一个组成部分，也面临着教学改革以适应人才培养目标的要求。因此，我们在参照《高职高专教育高等数学课程教学的基本要求》的基础上，结合编者多年的教学实践编写了本书。

本书在编写过程中，充分考虑到高职院校学生的实际，本着学以致用的原则，立足于服务专业课，兼顾对学生数学思维能力的培养，将高等数学知识进行了必要的整合，使内容模块化；以“掌握概念、强化应用、培养技能”为重点，贯彻“理解概念、强化应用”的教学原则，强化基本知识、基本思想，突出本质；注意与实际应用联系较多的基础知识、基本方法和基本技能的训练；理论描述力求简约，讲解简单易懂；充分体现了以应用为目的、以必需、够用为度的高职教学基本原则。

全书共九章，内容包括函数与极限、导数与微分、不定积分、定积分、常微分方程、无穷级数、拉普拉斯变换、行列式与矩阵、概率论初步。前四章为各专业的基础模块，不低于42学时；后五章为扩展模块，可根据各专业不同的培养要求，选学相应的内容。带*号的为选学内容。在每章、节后都配有一定数量的习题、复习题供教师和学生选用，书后附有习题答案。

参加本书编写的有辽宁机电职业技术学院的姜晓明、陈博、姜鑫、陈舒、荀书丰、朱琳琳，甘肃机械电子职工大学的刘开明，北京信息职业技术学院的王黎、胡效华。本书由姜晓明担任主编，并负责全书框架结构的安排以及统稿、定稿工作。

辽宁机电职业技术学院王德才教授对本教材进行了认真的审阅，并提出了许多有价值的意见。本书在编写过程中还得到了机械工业出版社的热情关怀和指导，在此一并表示衷心的感谢。

本教材配有电子教案，可登陆机械工业出版社教材服务网 www.cmpedu.com 下载，或发送电子邮件至 cmpgaozhi@sina.com 索取。咨询电话：010－88379375。

由于编者水平有限，加之时间仓促，不妥之处在所难免，敬请广大读者批评指正。

编　者

目　　录

第一章　函数与极限

自然界中没有绝对静止或绝对孤立的事物．函数能准确地刻画各事物或各因素之间的相依关系，它提供了进行数量研究的方法．公元1837年，德国数学家狄利克雷（Dirichlet，1805－1859）提出了现今通用的函数定义，使函数关系更加明确．极限是一个最基本、最重要的概念．19世纪以前，人们用朴素的极限思想计算了圆的面积、球的体积等．19世纪之后，柯西（Cauchy，1789—1851）以物体运动为背景，结合几何直观，引入了极限概念．后来，魏尔斯特拉斯（Weierstrass，1815—1897）给出了极限形式化的数学语言描述．有了极限概念，我们可以计算很多具体的量，如圆周长、圆面积、速度、加速度等．极限概念奠定了微积分学的基础，以后要学到的很多微积分学的概念都将借助于极限来描述．本章将在中学数学已有函数知识的基础上进一步讨论函数、极限与函数连续性的基本概念、基本性质和基本运算，并介绍它们的一些实际应用，为微积分的学习打下基础．

第一节　函　　数

一、函数的概念

1．引例

例1　圆的面积与它的半径之间存在着相依关系，这种关系由公式

$$A=\pi R^2(0<R<+\infty)$$

给定，当半径 R 在区间（0，$+\infty$）内任意取定一个数值时，由上式就可以确定圆面积 A 的相应数值．

例2　某物体以10m/s的速度作匀速直线运动，则该物体走过的路程 s 和时间 t 有如下关系：

$$s=10t\quad(0\leqslant t<+\infty)$$

对变量 t 和 s，当 t 在 $[0,+\infty)$ 内每取一定值 t_0，s 就有唯一确定的值 $s_0=10t_0$ 与之对应．

抽去上面两个例子中所考虑的量的实际意义，它们都表达了两个变量之间的相依关系，这种相依关系给出了一种对应法则，根据这一法则，当其中一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时，另一个变量就有确定的值与之对应．两个变量之间的这种对应关系就是函数概念的实质．

2. 函数的定义

定义 1 设 D 为一个非空实数集合，若存在确定的对应法则 f，使得对于数集 D 中的任意一个数 x，按照法则 f 都有唯一确定的实数 y 与之对应，则称变量 y 为变量 x 的函数，记作

$$y=f(x)$$

这里 x 称为自变量，y 称为因变量或函数. f 是函数符号，它表示 y 与 x 的对应法则，D 称为函数的定义域.

当 x 取数值 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数$y=f(x)$在点 x_0 处的函数值，记作$f(x_0)$. 当 x 取遍 D 中的各个数值时，对应的函数值全体组成的数集

$$M=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数的值域.

定义域 D 与对应法则f 唯一确定函数$y=f(x)$，故**定义域与对应法则叫做函数的两要素**. 如果函数的两个要素相同，那么它们就是相同的函数，否则，就是不同的函数.

函数$y=f(x)$的对应法则 f 也可以用φ，h，g，F 等表示，相应的函数就记作$\varphi(x),h(x),g(x),F(x)$.

3. 函数的定义域

在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的. 若不考虑函数的实际意义，而抽象地研究用算式表达的函数，规定函数的定义域是使算式有意义的一切实数值.

通常求函数的定义域应注意以下几点：

(1) 当函数是多项式时，定义域为 $(-\infty, +\infty)$；

(2) 分式函数的分母不能为零；

(3) 偶次根式的被开方式必须大于等于零；

(4) 对数函数的真数必须大于零；

(5) 反正弦函数与反余弦函数的定义域为 $[-1, 1]$；

(6) 如果函数表达式中含有上述几种函数，则应取各部分定义域的交集.

例 3 判断下列函数是否是相同的函数.

(1) $y=1$ 与 $y=\dfrac{x}{x}$；　　(2) $y=|x|$与 $y=\sqrt{x^2}$.

解 (1) 函数 $y=1$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，而函数 $y=\dfrac{x}{x}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，故不是同一函数.

(2) 两个函数的定义域与对应法则都相同，故是同一函数.

例 4 求下列函数的定义域.

(1) $f(x)=\dfrac{1}{5x^2+2x}$； (2) $f(x)=\sqrt{x+3}+\ln(x-2)$；

(3) $y=\lg(4x-3)-\arcsin(2x-1)$.

解 (1) 在分式$\dfrac{1}{5x^2+2x}$中，分母不能为零，即 $5x^2+2x\neq0$，解得 $x\neq-\dfrac{2}{5}$且 $x\neq0$. 所以定义域为$\left(-\infty,-\dfrac{2}{5}\right)\cup\left(-\dfrac{2}{5},0\right)\cup(0,+\infty)$.

(2) 该函数的定义域应为满足不等式组

$$\begin{cases}x+3\geqslant0\\x-2>0\end{cases}$$

的 x 值的全体. 解此不等式组，得 $x>2$，即定义域为$(2,+\infty)$.

(3) 该函数的定义域应为满足不等式组

$$\begin{cases}4x-3>0\\-1\leqslant2x-1\leqslant1\end{cases}$$

的 x 值的全体，解此不等式组，得$\dfrac{3}{4}<x\leqslant1$，即定义域为$\left(\dfrac{3}{4},\ 1\right]$.

4. 分段函数

在实际问题中，有时会遇到一个函数在定义域内的不同范围内，用不同的解析式表示的情况，这样的函数称为**分段函数**.

例 5 设符号函数

$$\operatorname{sgn}x=f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\0, & x=0\\-1, & x<0\end{cases}$$

求$f(2),f(0),f(-4)$及函数的定义域、值域（见图 1-1).

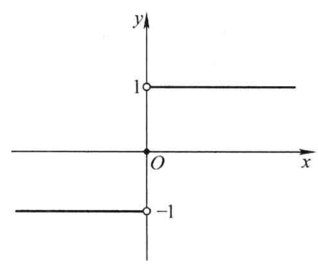

图 1-1

解 因为$2\in(0,+\infty),0\in\{0\},-4\in(-\infty,0)$,所以，$f(2)=1,f(0)=0,f(-4)=-1$. $f(x)$的定义域为$(-\infty,\ +\infty)$，值域为$\{-1,\ 0,\ 1\}$.

分段函数在整个定义域上是一个函数而不是几个函数. 分段函数的图像在每个区间段上与相应解析式函数的图像相同；求分段函数的数值时，应把自变量的值代入相应取值范围的表达式中进行计算.

5. 反函数

定义 2 设函数$y=f(x)$的定义域为 D，值域为 M. 对于任意数值 $y\in M$，在 D 中都有唯一确定的值x，使得$x=\varphi(y)$，则得到一个以 y 为自变量，x 为因变量的新的函数，这个新的函数叫做函数 $y=f(x)$的反函数，记作$x=f^{-1}(y)$，

其定义域为 M，值域为 D.

由于人们习惯用 x 表示自变量，而用 y 表示因变量，因此我们将函数 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 用 $y=f^{-1}(x)$ 表示. $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称，如图 1－2 所示.

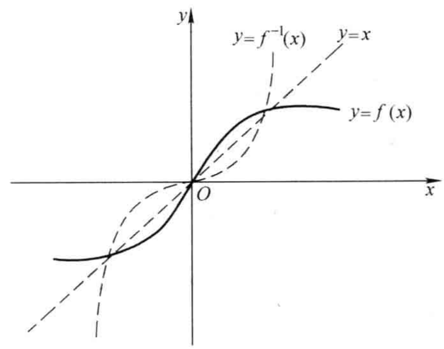

图 1－2

求反函数的过程可以分为两步：第一步，从 $y=f(x)$ 中，解出 $x=f^{-1}(y)$；第二步，交换字母 x 和 y. 反函数一定要指明其定义域.

二、函数的几种特性

1. 有界性

若存在正数 M，使得在区间 I 上恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 I 上有界，否则称 $f(x)$ 在 I 上无界.

例如，函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内无界，但在区间 $(1,2)$ 内有界.

2. 单调性

对于区间 I 内任意两点 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，若恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上单调增加，区间 I 称为单调增区间；若恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上单调减少，区间 I 称为单调减区间. 单调增区间和单调减区间统称为单调区间. 在单调增区间内，函数图像随着自变量 x 的增大而上升，在单调减区间内，函数的图像随着自变量 x 的增大而下降.

例如，$y=x^2$ 在区间 $[0,+\infty)$ 内是单调增加的，在区间 $(-\infty,0]$ 内是单调减少的，但在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内不是单调函数.

3. 奇偶性

设 I 为关于原点对称的区间，若对于任意的 $x\in I$，都有 $f(-x)=f(x)$，则 $f(x)$ 叫做偶函数；若 $f(-x)=-f(x)$，则 $f(x)$ 叫做奇函数. 奇函数的图像关于原点对称，如图 1－3 所示；偶函数的图像关于 y 轴对称，如图 1－4 所示. 若 $f(x)$

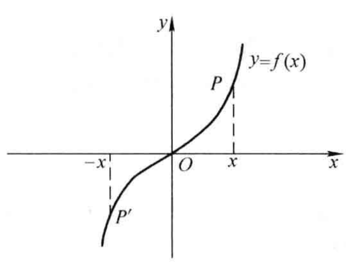

图 1－3

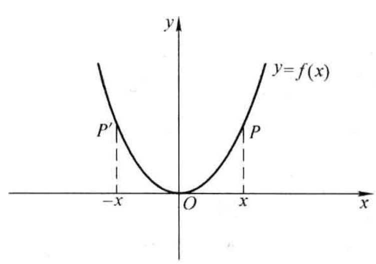

图 1－4

既不是奇函数也不是偶函数，那么$f(x)$叫做非奇非偶函数.

例如，$y=x^3$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内是奇函数，$y=x^4+1$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内是偶函数，$y=\sin x+\cos x$ 在区间$(-\infty,+\infty)$是非奇非偶函数.

4. 周期性

若存在不为零的数 T，使得对于定义域 I 内的任意的$x\in I$，都有 $x+T\in I$，且$f(x+T)=f(x)$,则称$f(x)$为周期函数，其中 T 叫做函数的周期，通常所说的周期函数的周期是指它的最小正周期.

例如，$y=\sin x$，$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数.

三、基本初等函数

幂函数　　$y=x^{\alpha}$（α 为常数）

指数函数　　$y=a^x$（$a>0$，$a\neq1$，a 为常数）

对数函数　　$y=\log_a x$（$a>0$，$a\neq1$，a 为常数）

三角函数　　$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$

反三角函数　　$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$

以上五类函数统称为基本初等函数，常用的基本初等函数的定义域、值域、图像和性质见附录 B.

四、复合函数与初等函数

在很多实际问题中，两个变量的联系有时不是直接的. 在函数 $y=\sin 2x$ 中，我们不难看出，这个函数值不是直接由自变量 x 来确定的，而是通过 $2x$ 来确定的，如果用 u 表示 $2x$，那么函数 $y=\sin 2x$ 就可以表示成$y=\sin u$，而 $u=2x$，这也就说明了 y 与 x 的函数关系是通过变量 u 来确定的.

定义 3　如果 y 是 u 的函数，而 u 又是 x 的函数，$y=f(u)$, $u=\varphi(x)$，通过 u 将 y 表示成 x 的函数，那么 y 叫做 x 的复合函数，即

$$y=f(\varphi(x))$$

其中 u 叫做中间变量.

注意　函数 $\varphi(x)$的值域应该取在函数 $y=f(u)$的定义域内.

例 6　试求由函数 $y=u^3$，$u=\sin x$ 构成的复合函数.

解　将 $u=\sin x$ 代入$y=u^3$ 中，即为所求的复合函数 $y=\sin^3 x$.

注意：并非任意两个函数都能构成复合函数. 例如 $y=\arcsin u$ 与 $u=x^2+2$ 便不能复合成一个函数，因为 u 的值域为$[2,+\infty)$,不包含在 $y=\arcsin u$ 的定义域$[-1,1]$内，因而不能复合.

有时，一个复合函数可能由三个或更多的函数复合而成. 例如，由函数 $y=2^u$，$u=\sin v$，$v=x^2+1$ 可以复合成函数 $y=2^{\sin(x^2+1)}$，其中 u 和 v 都是中间变量.

例 7　指出下列复合函数的结构.

(1) $y=(2x+1)^9$；(2) $y=\sqrt{\log_a(\cos x+4^x)}$；(3) $y=10^{\sin\frac{1}{x}}$.

解　(1) $y=u^9$，$u=2x+1$.

(2) $y=\sqrt{u}$，$u=\log_a v$，$v=\cos x+4^x$.

(3) $y=10^u$，$u=\sin v$，$v=\dfrac{1}{x}$.

对复合函数进行分解时，**每个层次都应是基本初等函数或常数与基本初等函数的四则运算式**，当分解到基本初等函数或常数与基本初等函数的四则运算时，就不再分解了.

定义 4　由基本初等函数和常数经过有限次四则运算及有限次复合步骤所构成的，并能用一个解析式表示的函数，叫做**初等函数**．例如 $y=\sqrt{1+x^2}$，$y=\sin^3 x$，$y=\sqrt{\log_a 3^x}$等都是初等函数．初等函数是最常见的函数，它是微积分学研究的主要对象.

习题　1-1

1. 判断下列各组函数是否相同？并说明理由.

(1) $f(x)=\ln|x|$，$g(x)=\ln x$；　　(2) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$，$g(x)=x+1$；

(3) $f(x)=x$，$g(x)=(\sqrt{x})^2$；　　(4) $f(x)=\lg x^2$，$g(x)=2\lg x$；

(5) $f(x)=\sqrt{(x-y)^2}$，$g(x)=|y-x|$.

2. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{3x+2}$；　　(2) $y=\sqrt{x+2}+\dfrac{1}{1-x^2}$；

(3) $y=\ln x^2$；　　(4) $y=\sqrt{x^2-4}+\lg(x-2)$.

3. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}2+x, & x<0\\ 0, & x=0\\ x^2-1, & 0<x\leqslant 4\end{cases}$$

求 $f(x)$的定义域及$f(-1)$，$f(2)$的值，并做出它的图像.

4. 求由所给函数复合而成的复合函数.

(1) $y=u^2$，$u=\sin x$；　　(2) $y=\sin u$，$u=2x$；

(3) $y=e^u$，$u=\sin v$，$v=x^2+1$；　　(4) $y=\lg u$，$u=3^v$，$v=\sin x$.

5. 指出下列函数的复合结构.

(1) $y=3^{\sin x}$；　　(2) $y=\sqrt[3]{5x-1}$；

(3) $y=\sin^2 5x$；　　(4) $y=\cos\sqrt{2x+1}$；

(5) $y=\ln(3-x)$；　　(6) $y=e^{\sin\frac{1}{x}}$.

第二节 极　　限

极限概念是由于求某些实际问题的精确解答而产生的，例如我国数学家刘徽（公元3世纪）利用圆内接正多边形来推算圆面积的方法——割圆术，就是极限思想在几何学上的应用．在解决实际问题中逐渐形成的极限方法，已成为高等数学中的一种基本方法，高等数学中的导数、定积分、级数等概念都是基于极限而定义的或与之密切相关，因此，学习和掌握极限概念与计算方法很重要．

一、数列的极限

1．数列的概念

自变量为正整数的函数（整标函数）$u_n=f(n)(n=1,2,3,\cdots)$，其函数值按自变量 n 由小到大排列成的一列数

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \cdots,\ u_n,\ \cdots$$

叫做数列，简记为 $\{u_n\}$，数列中的每一个数叫做数列的项，第 n 项 u_n 叫做数列的通项或一般项．

2．数列的极限

观察下面两个数列：

(1) $\{u_n\}=\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$，即数列 $1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ \cdots,\ \dfrac{1}{n},\ \cdots$

(2) $\{u_n\}=\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$，即数列 $\dfrac{1}{2},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{3}{4},\ \cdots,\ \dfrac{n}{n+1},\ \cdots$

观察上述例子可以发现，当 n 无限增大时，数列的各项呈现出确定的变化趋势：数列(1)无限趋近于常数零；数列(2)无限趋近于常数1．

定义1　对于数列 $\{u_n\}$，如果当 n 无限增大时，通项 u_n 无限接近于某个确定的常数 A，则称该数列以 A 为极限，或称数列 $\{u_n\}$ 收敛于 A，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A$ 或 $u_n\to A(n\to\infty)$．

例1　观察下列数列的极限．

(1) $\{u_n\}=\{C\}$（C 为常数）；(2) $\{u_n\}=\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$；(3) $\{u_n\}=\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$；

(4) $\{u_n\}=\left\{\dfrac{1}{n^3}\right\}$；　　(5) $\{u_n\}=\{(-1)^{n+1}\}$．

解　观察数列在 $n\to\infty$ 时的变化趋势，得

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}C=C$．

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$．

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}=0$.

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n+1}$不存在.

一般地，可以得出以下结论：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}C=C$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$ $(|q|<1)$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0$（$\alpha$ 为大于 0 的实数）.

注意 并不是任何数列都有极限，有些数列就没有极限. 例如，数列 $u_n=2^n$，当 n 无限增大时，它不能无限接近于一个确定的数，所以 $u_n=2^n$ 没有极限. 又如，数列$u_n=(-1)^{n+1}$,当 n 无限增大时，u_n 在 1 和 -1 这两个数上来回跳动，而不能接近于一个确定的常数，所以数列$u_n=(-1)^{n+1}$没有极限. 对于上述没有极限的数列，也说该数列的极限不存在或该数列发散.

如果数列$\{u_n\}$对于每一个正整数 n，都有 $u_{n+1}>u_n$，则称数列$\{u_n\}$为单调递增数列. 类似地，如果数列$\{u_n\}$对于每一个正整数 n，都有 $u_{n+1}<u_n$,则称数列$\{u_n\}$为单调递减数列. 如果对于数列$\{u_n\}$，存在一个正的常数 M，使得对于每一项 u_n，都有$|u_n|\leqslant M$，则称数列$\{u_n\}$为有界数列.

我们给出下面的定理：

定理 1（单调有界定理） 单调有界的数列必有极限.

二、函数的极限

数列可看作是自变量只取正整数的特殊函数，即$x_n=f(n)(n=1,2,3,\cdots)$. 对于函数 $y=f(x)$,函数 y 随着自变量 x 的变化而变化. 为方便起见，我们规定：当 x 无限增大时，用记号 $x\to+\infty$ 表示；当 x 无限减小时，用记号 $x\to-\infty$ 表示；当$|x|$无限增大时，用记号 $x\to\infty$ 表示；当 x 从 x_0 的左右两侧无限接近于 x_0 时，用记号 $x\to x_0$ 表示；当 x 从 x_0 的右侧无限接近于 x_0 时，用记号 $x\to x_0^+$ 表示；当 x 从 x_0 的左侧无限接近于 x_0 时，用记号 $x\to x_0^-$ 表示.

1. $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$的极限

例 2 考察当 $x\to\infty$ 时函数 $y=\frac{1}{x}$的变化趋势.

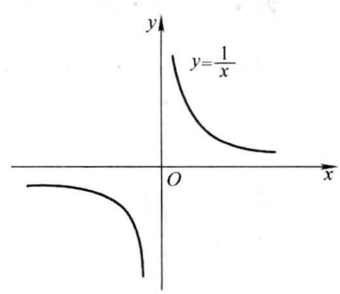

图 1-5

由图 1-5 可见，当 $x\to\infty$（包括 $x\to+\infty$，$x\to-\infty$）时，函数趋向于确定的常数 0.

定义 2 设函数$f(x)$当$|x|$无限增大时，函数$f(x)$无限趋近于确定的常数A，则称A为$x\to\infty$时函数$f(x)$的极限，记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\text{ 或 }f(x)\to A(x\to\infty)$$

若只当$x\to+\infty$(或$x\to-\infty$)时，函数趋近于确定的常数A，记为

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A(\text{或}\lim_{x\to-\infty}f(x)=A)$$

定理 2 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

例 3 观察下列函数的图像（见图 1-6），并填空.

(1) $\lim\limits_{x\to(\ )}e^x=0$;　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=(\qquad)$;

(3) $\lim\limits_{x\to(\ )}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=(\qquad)$.

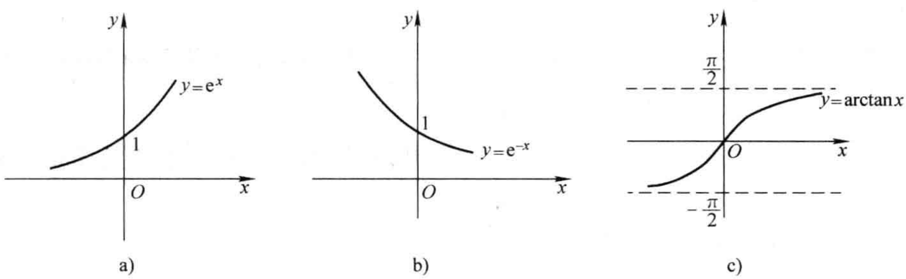

图 1-6

解 (1) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$;　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$.

2. $x\to x_0$ 时函数$f(x)$的极限

例 4 考察当$x\to1$时，函数$y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$的变化趋势.

当$x\neq1$时，函数$y=\dfrac{x^2-1}{x-1}=x+1$，由图 1-7可见，当$x\to1$时，$y\to2$.

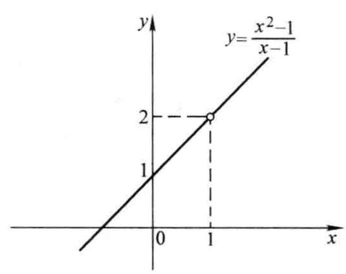

图 1-7

定义 3 设函数$f(x)$在x_0的左、右近旁有定义（x_0点可以除外），当自变量x趋近于x_0时，函数$f(x)$无限接近于某个确定的常数A，则称A为$x\to x_0$时函数$f(x)$的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\text{ 或 }f(x)\to A(x\to x_0)$$

从例 4 可知，$f(x)$在x_0处极限是否存在与其在x_0处是否有定义无关.

上面讨论了$x\to x_0$时函数$f(x)$的极限，对于$x\to x_0^+$或$x\to x_0^-$时的情形，有

如下定义：

定义 4 如果$x\to x_0^+$（$x\to x_0^-$）时，函数$f(x)$的值无限接近与一个确定的常数A，则称A为$x\to x_0^+$（$x\to x_0^-$）时函数$f(x)$的右（左）极限，记作

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A\left(\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A\right)$$

或
$$f(x_0+0)=A\left(f(x_0-0)=A\right)$$

定理 3 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$.

例 5 设$f(x)=\begin{cases}-x, & x<0\\ 1, & x=0\\ x, & x>0\end{cases}$，画出该函数的图像，并讨论 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$，$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$，$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$是否存在.

解 由图 1－8 可以看出，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0$，由定理 3 得$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

例 6 设$f(x)=\begin{cases}x-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ x+1, & x>0\end{cases}$，画出该函数的图像，并讨论 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$，$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$，$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$是否存在.

解 由图 1－9 可以看出，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-1$，因为左极限和右极限存在但不相等，所以由定理 3 可知$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$不存在.

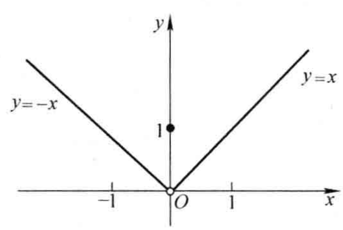

图 1－8

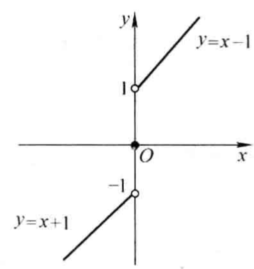

图 1－9

习题 1－2

1. 观察下列数列的变化趋势，如果有极限，写出它们的极限值.

(1) $x_n=1-\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$；　　(2) $x_n=\dfrac{3n+1}{4n-2}$；

(3) $x_n=(-1)^n n$；　　(4) $x_n=(-1)^n$；

(5) $x_n=3-\dfrac{1}{n}$；　　(6) $x_n=2+\dfrac{1}{n^2}$.