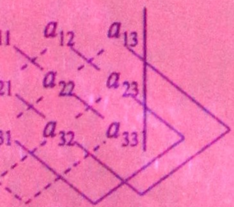
普通高等院校『十一五』规划教材

高等院校数学专业教材



GAODENG DAISHU

高等代数

第2版

胡万宝　舒阿秀　蔡改香　宛金龙　胡　翔　编著

中国科学技术大学出版社

高等代数"是大学

个专业的主干基础

普通高等院校“十一五”规划教材
高等院校数学专业教材

高等代数

第2版

胡万宝　舒阿秀　蔡改香　宛金龙　胡　翔　编著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书在介绍高等代数课程的传统内容时，在以下两方面进行了有益的探索：尽量做到经典与现代的有机融合；注重理论联系实际，重视在实践教学中培养学生的实践能力和创新能力. 全书共分 9 章，其内容包括行列式、矩阵、线性空间、线性变换、多项式、特征值、λ-矩阵、二次型和欧氏空间.

本书内容编排由浅入深、循序渐进，符合现今“二本”院校学生的教学实际，可以作为高等学校数学与应用数学、信息与计算科学等专业的教科书，也可供相关专业师生和自学人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等代数/胡万宝等编著. —2 版. —合肥：中国科学技术大学出版社，2013. 8
ISBN 978-7-312-03264-6
(高等院校数学专业教材/祝东进主编)

Ⅰ. 高…　Ⅱ. 胡…　Ⅲ. 高等代数　Ⅳ. O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 147908 号

出版　中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号，邮编：230026
网址：http://press. ustc. edu. cn
印刷　合肥市宏基印刷有限公司
发行　中国科学技术大学出版社
经销　全国新华书店
开本　710 mm×960 mm　1/16
印张　20. 75
字数　406 千
版次　2013 年 8 月第 1 版
印次　2013 年 8 月第 1 次印刷
定价　36. 00 元

高等院校数学专业教材
编　委　会

再 版 前 言

本教材初版于2009年出版，经过四年的使用，师生们认为该教材的内容编排由浅入深，适合“二本”院校数学类相关专业学生的实际教学．我们深深感谢广大读者在本书使用过程中给予我们的宝贵意见和建议，在此基础上，再版中对本书作了如下几个方面的修改：

(1) 教材中的一些印刷错误．

(2) 定义或概念的叙述严谨化，避免口语化，注重概念的科学性．

(3) 编排中的缺陷．个别章节顺序有所调整，以便师生教学．

(4) 部分问题或习题超出学生的能力范围，对于超范围的内容作了变动．

(5) 部分例题、习题的设置顺序有所调整．调整后的习题顺序和章节顺序对应一致，使每个章节都有相应的习题，A类题数量增加不少．

再版中的第1、8章由舒阿秀老师修订，第2、5章由宛金龙老师修订，第3、7、9章由蔡改香老师修订，胡翔老师整理第4、6章；胡万宝老师负责最终审定工作．本书初版的编者汪志华、陈素根老师也对再版提出了很好的建议，在此表示感谢！

再版后的内容更加符合师生教学口味，理论导出自然，习题和内容相称．但由于编者水平和经验有限，欢迎广大师生、读者提出改进意见和建议．

胡万宝
2013年4月
于安庆师范学院

前　　言

“高等代数”是数学与应用数学、信息与计算科学等专业学生学习的一门重要基础课程，在全国已有多种版本的教材，其中不乏经典的好教材.编写本书的主要目的是想为开设“高等代数”课程的“二本”院校提供一本比较合适的教材.

本教材是在安徽省精品课程“高等代数”长期教学中积累而成的.编写本教材的指导思想是：

(1) 本书遵循“高等代数”课程教学大纲的基本框架，并且覆盖该课程的基本内容：行列式、矩阵、线性空间、线性变换、多项式、特征值、λ-矩阵、二次型和欧氏空间.但在具体授课时，可以根据学时数以及实际需要，有选择地讲解，为此，本教材中加星号的内容可以考虑选讲或者不讲.

(2) 考虑到在实际教学中培养学生实践能力和创新能力的需要，在大部分章节中，引入适量的背景来导入理论知识，同时在掌握理论之后，再通过实际例子将理论知识融会贯通.本书精选出一些具有代表性的例题，给出了解题思路和分析方法，题后提示了解题中应注意的问题，目的在于启发学生并培养学生自学能力.

(3) 考虑现今“二本”院校学生的基础条件，本书在内容编排上由浅入深、循序渐进.

(4) 本书的章节编排顺序与其他教材有所不同，特别是将“线性方程组的解法和结构”放在“线性空间”一章里，目的是基于：① 用矩阵的秩来判别解的存在，而矩阵的秩在该章中详细讨论过；② 从线性空间的角度来理解线性方程组的解的结构.另外，本书将“二次型”这一章挪到“特征值”之后，是为了将二次型的标准化与矩阵的正交化融合，使学生对这两部分有一个整体统一的认识.

学习数学，做习题无疑是重要的.书中习题按难度分 A、B 两类，A 类是为教材理论知识的掌握而设计的，在内容上重视基础理论，覆盖课程全部基本教学要求；B 类稍有难度，是为学生能力的提高而设计的，帮助学生加深理解基本理论并融会贯通，熟练掌握基本的分析计算方法并举一反三，不断提高应试水平和知识的综合应用能力.

本书的第 1、2、8、9 章和第 3、4、5、6、7 章分别由陈素根老师和汪志华老师提供初稿，胡万宝教授和代数几何教研室主任舒阿秀老师做整体框架设计和最后的审

定工作.另外,感谢郝庆一博士对本书提出的有益建议.还要感谢“高等代数”精品课程组的全体成员以及研究生何荣荣、张俊校、张文兵、王贞、吴艳霞、蔡华平等对本书出版的支持和为校稿做出的努力.

由于编者水平和经验有限,加之编写时间仓促,本书难免会有不妥之处,敬请广大读者批评指正.

胡万宝
2009 年 5 月
于安庆师范学院

目　　录

原书缺页

例 1.1.1 典型的数域举例：复数域 $\mathbf{C}$；实数域 $\mathbf{R}$；有理数域 $\mathbf{Q}$；Gauss 数域：$Q(i)=\{a+b\cdot i\mid a,b\in\mathbf{Q}\}$，其中 $i=\sqrt{-1}$.

例 1.1.2 令 $F=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbf{Q}\}$，则 F 是一个数域. 首先，容易看出，F 中至少有两个不同的数（例如，$0=0+0\sqrt{2}\in F$，$1=1+0\sqrt{2}\in F$），且 F 中任意两个数的和、差、积都在 F 中. 现设 $c+d\sqrt{2}\neq 0$，那么 $c-d\sqrt{2}\neq 0$，否则在 $d=0$ 的情形下将得出 $c=0$，这与 $c+d\sqrt{2}\neq 0$ 的假设矛盾；在 $d\neq 0$ 的情形下将得出 $\sqrt{2}=\dfrac{c}{d}\in\mathbf{Q}$，这与 $\sqrt{2}$ 是无理数的事实矛盾. 因此

$$\begin{aligned}\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}&=\frac{(a+b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}{(c+d\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}\\&=\frac{ac-2bd}{c^2-2d^2}+\frac{bc-ad}{c^2-2d^2}\sqrt{2}\in F.\end{aligned}$$

这就证明了 F 是一个数域.

命题 1.1.1 任意数域 P 都包括有理数域 $\mathbf{Q}$.

证明 设 P 为任意一个数域，由定义可知，存在一个元素 $a\in P$，且 $a\neq 0$. 于是

$$0=a-a\in P,\quad 1=\frac{a}{a}\in P;$$

进而对 $\forall\, m\in\mathbf{Z}, m>0$，有

$$m=1+1+\cdots+1\in P;$$

最后，$\forall\, m,n\in\mathbf{Z}, m>0, n>0, \dfrac{m}{n}\in P, -\dfrac{m}{n}=0-\dfrac{m}{n}\in P$. 这就证明了 $\mathbf{Q}\subseteq P$. 证毕.

1.1.2 连加号与连乘号

在数学教学中常常会碰到若干个数连加或连乘的式子，为了把加法和乘法表达得更简练，我们引进连加号和连乘号.

设给定某个数域 P 上 n 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，我们使用如下记号：

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum_{i=1}^{n}a_i;\tag{1.1.1}$$

$$a_1a_2\cdots a_n=\prod_{i=1}^{n}a_i.\tag{1.1.2}$$

“$\sum$”称为连加号，“$\prod$”称为连乘号，a_i 表示一般项，i 表示求和指标与求积指标，而连加号和连乘号上下的写法表示 i 的取值由 1 到 n. 例如

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\sum_{i=1}^{n} i^2; \tag{1.1.3}$$

$$(x+y)^n=\sum_{i=0}^{n} C_n^i x^{n-i} y^i; \tag{1.1.4}$$

$$1\times 3\times\cdots\times(2n-3)\times(2n-1)=\prod_{i=1}^{n}(2\cdot i-1). \tag{1.1.5}$$

引入了记号后,我们先研究一下它们有哪些性质.容易证明

$$\lambda\sum_{i=1}^{n} a_i=\sum_{i=1}^{n}\lambda a_i; \tag{1.1.6}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)=\sum_{i=1}^{n} a_i+\sum_{i=1}^{n} b_i; \tag{1.1.7}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}. \tag{1.1.8}$$

事实上,最后一条性质的证明只需要把各个元素排成如下形状:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{matrix}$$

分别先按行和列求和,再求总和即可.

最后,再对求和号加几点说明:

(1) 在求和表达式中,用什么字母作为求和指标是任意的,如

$$\sum_{i=1}^{n} a_i=\sum_{j=1}^{n} a_j,\quad \sum_{i=1}^{n} a_{it}=\sum_{j=1}^{n} a_{jt}=a_{1t}+a_{2t}+\cdots+a_{nt}.$$

(2) 有时相加的数虽然是用两个指标编号,但是相加的并不是它们的全部,而是指标适合某些条件的那一部分,这时就在连加号下写出指标适合的条件.例如

$$\sum_{j=2}^{n}\sum_{i<j} a_{ij}=a_{12}+(a_{13}+a_{23})+\cdots+(a_{1n}+a_{2n}+\cdots+a_{(n-1)n}).$$

(3) 当相加的数是用多个指标编号时,我们可以类似地使用多重连加号.例如

$$\sum_{i+r=t}\ \sum_{j+k=r} a_i b_j c_k=\sum_{i+j+k=t} a_i b_j c_k.$$

1.2 二阶与三阶行列式

行列式是一个数,它由一些数字按一定方式排成的阵列所确定.这个思想早在

1683 年与 1693 年就分别由日本数学家关孝和德国数学家莱布尼茨独立提出,大约比形成独立体系的矩阵理论要早 160 年.多年以来,行列式主要出现在线性方程组的讨论中.在中学代数中,我们学过二元、三元线性方程组,但在生产实际中所遇到的线性方程组,它的未知量往往不止两个或三个.就未知量个数和方程个数相等的线性方程组来说,一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots, \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases} \tag{1.2.1}$$

这里 n 是正整数,$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是未知量,$a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$是 $x_j(j=1,2,\cdots,n)$的系数,$b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是常数项.形如方程组(1.2.1)的线性方程组称为 n **元线性方程组**.在求解 n 元线性方程组的过程中便产生了行列式的概念.下面我们先讨论二元与三元这两种比较简单的线性方程组的公式解.

例 1.2.1 探求二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{1.2.2}$$

的公式解.

解 用加减消元法,为消去 x_2,以 a_{22}与 a_{12}分别乘以方程组的两方程的两端,然后两个方程相减,得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}.$$

类似地,消去 x_1,得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=b_2a_{11}-b_1a_{21}.$$

这样,当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,求得方程组(1.2.2)的公式解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{1.2.3}$$

虽然有了公式解,但是看上去比较复杂,不容易记忆.为此我们引入记号.

我们定义二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \tag{1.2.4}$$

数 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$称为二阶行列式的元素,元素 a_{ij}的第一个下标 i 称为行下标,表示该元素位于第 i 行;第二个下标 j 称为列下标,表示该元素位于第 j 列.

利用二阶行列式的概念,(1.2.3)式中 x_1,x_2 的分子也可写成二阶行列式,即

$$b_1a_{22}-b_2a_{12}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad b_2a_{11}-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

那么解(1.2.3)可很方便地表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{1.2.5}$$

我们仔细观察用行列式形式表示的公式解(1.2.5),可以发现这样表示的解有一定的规律:

(1) x_1 与 x_2 的分母 D 都是由原方程组(1.2.2)的系数按原顺序所确定的二阶行列式(称为系数行列式).

(2) x_1 的分子 D_1 的第一列是原方程组的常数列,第二列由 x_2 的系数构成,因此这个行列式可以看成是将行列式 D 中的第一列换成常数列而得到的;同时,x_2 的分子 D_2 可以看成是将行列式 D 中的第二列换成常数列而得到的.

显然,这样的公式解更容易记忆.我们自然希望用同样的公式来得到三元线性方程组的公式解,乃至 n 元线性方程组的公式解.为此,先引入三阶行列式的概念.

我们定义三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}. \tag{1.2.6}$$

例 1.2.2　探求三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1.2.7}$$

的公式解.

解　同例 1.2.1 一样,用加减消元法,先从前面两式中消去 x_3,再从后两式中消去 x_3,得到只含 x_1 与 x_2 的二元线性方程组,然后再用消元法消去 x_2,就得到

$$(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})x_1$$
$$=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3.$$

若 $D=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\neq 0$,则得到

$$x_1 = \frac{1}{D}(b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3);$$

$$x_2 = \frac{1}{D}(a_{11}b_2a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}b_3 - a_{11}a_{23}b_3 - b_1a_{21}a_{33} - a_{13}b_2a_{31});$$

$$x_3 = \frac{1}{D}(a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32} - a_{11}b_2a_{32} - a_{12}a_{21}b_3 - b_1a_{22}a_{31}).$$

这就是三元线性方程组(1.2.7)的公式解.同样,利用三阶行列式的概念,我们可以很方便地表示出方程组(1.2.7)的公式解.

若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

则 $D\neq 0$ 时,方程组(1.2.7)的公式解就可以表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

观察上述公式解,可以看出此解有类似于二元线性方程组公式解的规律.

例 1.2.3 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + y_1 + z_1 = 0, \\ 2x_1 - 5y_1 - 3z_1 = 10, \\ 4x_1 + 8y_1 + 2z_1 = 4. \end{cases}$$

解 因为

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & -3 \\ 4 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 34 \neq 0, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 10 & -5 & -3 \\ 4 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 68,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 10 & -3 \\ 4 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 10 \\ 4 & 8 & 4 \end{vmatrix} = -68,$$

所以

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 2, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = 0, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = -2.$$

通过二阶和三阶行列式,我们就可以把系数行列式不为零的线性方程组(1.2.2)与(1.2.7)的解很简单地表示出来.于是,我们自然就想,一般的 n 元线性

方程组(1.2.1)的解能否用 n 阶行列式表示出来？为此，我们首先要定义 n 阶行列式.

1.3 n 阶行列式

为了给出 n 阶行列式的定义，必须先弄清楚二阶、三阶行列式的结构，为此需要先介绍一下排列的概念.

1.3.1 排列

定义 1.3.1 由数码 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 称为一个 **n 元排列**.

例如，3214 是一个 4 元排列，324615 是一个 6 元排列. 事实上，n 元排列的总数是

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1 = n!.$$

例 1.3.1 由数码 1,2,3 构成的全部 3 元排列共有 $3!=6$ 个，它们是

$$123,\quad 132,\quad 213,\quad 231,\quad 312,\quad 321.$$

在所有的 n 元排列中，排列 $123\cdots n$ 称为**标准排列**，它的特点是较大的数码排在较小的数码之后. 而在其他 n 元排列中，都可以找到一个较大的数码排在较小的数码前面. 例如，在排列 321 中，3 排在 2 的前面，2 排在 1 的前面，这样的次序与自然顺序相反，我们称它为反序(或逆序).

定义 1.3.2 在一个排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中，如果其中一个较大的数码排在某个较小的数码前面，则称这两个数码构成一个**反序(或逆序)**. 一个排列中的全部反序的个数称为这个排列的**反序数**，记作 $N(i_1 i_2 \cdots i_n)$.

说明 ($N(j_1 j_2 \cdots j_n)$的算法)给定 n 个自然数，按大小顺序排列：

$$1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_n,$$

现在把它们按任意次序重排，得 n 元排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$，这个排列的反序数可用下法计算：先找出排在 i_1 前面的数字有多少，设为 $\tau(i_1)$，然后划去 i_1，再看 i_2 前面未划去的数字有多少，设为 $\tau(i_2)$，然后划去 i_2，再看 i_3 前面未划去的数字有多少，设为 $\tau(i_3)$，然后划去 i_3，$\cdots$，经过 n 次后，即得

$$N(j_1 j_2 \cdots j_n) = \tau(i_1) + \tau(i_2) + \cdots + \tau(i_n).$$

例 1.3.2 在排列 2431 中，21，43，41，31 是反序，2431 的反序数就是 4，即 $N(2431)=4$. 而 $N(3421)=5$.

定义 1.3.3 反序数为偶数的排列称为**偶排列**；反序数为奇数的排列称为**奇**