突变函数论

（上册）

И. П. 那湯松 著

高等教育出版社

实变函数論

上册

И. П. 那湯松著
徐瑞云譯
陈建功校

(修訂本)

高等教育出版社

本书原系根据苏联国立技术理論书籍出版社(Государственное издательство технико-теоретической литературы)出版的那湯松(И. П. Натансон)著"实变函数論"(Теория функций вещественной переменной)1950年版譯出的,后又由譯者根据原书增訂本(1957年第二版)修訂。全书共十八章,中譯本分上下两册出版。

本书可作为綜合大学和师范学院数学系教学参考书。

本书原由高等教育出版社出版,自1960年4月至1964年12月改由人民教育出版社出版。1965年1月1日高等教育出版社成立后,本书仍用高等教育出版社名义继續印行。

实 变 函 数 論

上 册

И. П. 那湯松著

徐 瑞 云 譯

北京市书刊出版业营业許可証出字第119号

高等教育出版社出版(北京景山东街)

商 务 印 书 館 上 海 厂 印 装

新 华 书 店 上 海 发 行 所 发 行

各 地 新 华 书 店 經 售

統一书号 K13010·25　开本 850×1168 1/32　印張 9 13/16

字数 235,000　印数 41,701—43,700　定价(6)¥0.95

1955年6月第1版　1958年10月第2版(修訂本)

1965年3月上海第17次印刷

初版序言摘要

本書是适用于我国大学現行教学大綱的一本教科書。鑒于函数論在培养数学家的教学体系中日趋重要，我在本書中(用小型鉛字排印)放入了一系列超出大綱范圍的問題。

在大学中，实变函数論是在三年級开始講授的。所以我假定讀者已能灵活掌握分析的基本概念：無理数，極限理論，連續函数的最重要的性質，导数，积分，級数等都假定已为讀者所熟知，这些概念是屬于任何一本詳尽的微积分書中的。

書中大部分的章后都附有習題。这些習題一般說来是相当难的，有时需要經过很大的努力才能解决。但是对于要想切实地通曉这門知識的讀者，我仍然建議他們务必尽最大努力至少解决其中一部分的問題。

本書的現在形式是从我以前所写的"实变函数論基础"改編而成的，該書在1941年在列宁格勒大学出版，印数不多，不久卽行銷完。我早有意于再版，并且这个願望已經部分地实現了，这就是"拉强西卡学派"出版部曾用烏克蘭譯文刊印了該書，譯者是基輔大学的副教授 С. И. 苏賀維茨基。

Е. Я. 列灭士教授曾經对于上述的烏克蘭譯本加以評論并且提出了一系列宝貴的意見，我在从事于新版的修正时也采納了这些意見。此外，我很感謝 Н. К. 巴里教授，Д. К. 法捷耶夫教授，尤其是 Г. М. 菲赫金哥尔茨教授的許多建議和批評。对于以上提到的各位我都致以衷心的謝意。

И. 那湯松

1949 年 12 月 3 日

第二版序言

本版与初版的重要区别如下:

1. 叙述了勒貝格积分的变数变换問題(就旧变数是新变数的單調函数的情形)。

2. 介紹了凸函数的某些知識,包括琴生和楊格不等式(楊格不等式在"附录"中)。

3. 証明了康妥定理及杜-布阿-雷蒙达—瓦来-布善定理和某些其他結果,以及关于函数的三角級数展开的唯一性問題。

4. 叙述了当若阿—彼龙积分理論并給出了当若阿—辛欽积分的概念。

5. 討論了將書中主要結果搬到在無界域上定义的函数上去的問題①。

6. 叙述了(在"附录"中)显式表示的曲綫的求長問題。

为了避免本書篇幅过大起見,我去掉了豪司道夫定理(关于"較易"測度問題的不可解性)以及初版的第十七章(关于祖国学者在函数論的貢献的概述)。

在新版的准备中我得到了 Г. М. 菲赫金哥尔茨教授許多宝貴的指示,校閱者 Г. П. 阿基洛夫和我的兒子 Г. И. 那湯松給我提供了很多有益的意見。我感謝以上提到的各位。

И. 那湯松

1956年12月8日

---

① 这一章的材料我是利用了在美国版上的附录,由翻譯者 E. 海維特教授所引进。

目　录

第一章 無限集

§1. 集的運算

“集論”是实变数函数論的基础。它的历史并不久：有关集論的最初的重要文献是 Г. 康妥在十九世紀末叶才發表的，可是，現在集論已是数学中一門范圍很广的学科了。在这本書里，集論只有輔助的意义，所以我們只討論这門学科的一些基础知識。讀者对于这方面的理論若需要深入研究，可参閱 П. С. 阿力山大洛夫及豪司道夫所著的書①。

集这个概念，是不可以精确定义的数学基本概念之一，所以我們只給予一种描写。凡是具有某种特殊性質的对象的彙集，总合或集合称之为集。例如自然数的全体为一集；直綫上点的全体为一集；以实数为系数的多項式的全体为一集；諸如此类。

任何对象，对于某一集而言，或是屬于該集，或是不屬于該集。二者必居其一，但不可得兼。

若 A 为某集，x 是一个屬于 A 的对象，則称 x 为 A 的元素，記作：

$$x \in A。$$

若 x 不屬于 A，則写为

$$x \overline{\in} A。$$

例如，R 为有理数全体所成之集，則

---

① П. С. 阿力山大洛夫，Введение в общую теорию множеств и функций. Гостэхиздат, 1948(有中譯本：集与函数的泛論初阶)。

Ф. 豪司道夫，Теория множеств, ОНТИ, 1937(俄譯本)。

$$\frac{3}{4}\in R,\quad \sqrt{2}\notin R。$$

一个集的自身决不能作它的元素：

$$A\notin A。$$

以后为行文方便起見，我們引入空集这一概念，就是不含任何元素的集。例如方程

$$x^2+1=0$$

的实根的全体就是“空集”。我們用記号 0 表示空集，从行文的前后呼应来看，运用这个記号不致与数“零”發生混淆，空集有时也用 Λ 来記。

除空集外，我們在研究中必然会遇到的还有“單元素集”。凡仅含一个元素之集称为單元素集。例如方程

$$2x-6=0$$

的根的全体是一个單元素集，它是由單独的一个元素，就是数 3，所組成的。但应注意不要把單元素的集和它所含的唯一元素混为一談。

若集 A 的一般元素是 x，则有时写为：

$$A=\{x\}。$$

有时集的元素可以全部写出的，那末可將集的元素全部写出后外加一个花括弧。例如

$$A=\{a,\ b,\ c,\ d\}。$$

定义 1. 兩集 A 与 B，若 A 所有的元素都是 B 的元素，则称 A 为 B 的子集，写为：

$$A\subset B\quad 或\quad B\supset A。$$

B 称为 A 的包括集。

例如 N 为自然数全体的集，R 为有理数全体的集，则

$$N\subset R。$$

显然，集的自身是它的子集：

$$A \subset A_{\circ}$$

空集是任何集 A 的子集。要使这断言完全明白，只要把定义 1 改述如下：所謂 $A \subset B$ 乃表示凡元素不屬于 B 的也不屬于 A。

定义 2. 兩集 A 与 B，若 $A \subset B$，$B \subset A$，則称 A 与 B 相等，写为：

$$A = B_{\circ}$$

例如 $A = \{2, 3\}$，B 为方程

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

的根所成之集，則 $A = B$。

定义 3. 設 A 与 B 为二集，又集 S 包含 A 与 B 中所有元素但不含其他元素，称 S 为 A 与 B 的和集，写为：

$$S = A + B \quad \text{或} \quad S = A \cup B_{\circ}$$

同样可以定义 n 个集 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和集，可以定义一系列集 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ 的和集；更一般的，如果有一組集合 A_ξ，它們用不同的記号 ξ 以示区别，那末也可以定义所有 A_ξ 的和集。写作

$$S = A_1 + A_2 + \cdots + A_n, \quad S = \sum_{k=1}^{n} A_k, \quad S = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n,$$

或

$$S = \bigcup_{k=1}^{n} A_k,$$

$$S = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots, \quad S = \sum_{k=1}^{\infty} A_k, \quad S = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots,$$

或

$$S = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,$$

$$S = \sum_{\xi} A_\xi \quad \text{或} \quad S = \bigcup_{\xi} A_{\xi\circ}$$

例如，[①] S 为所有正数的集，則

① 如同平常一样，当 $a \leqslant b$，我們以 (a, b)，$[a, b]$，$[a, b)$，$(a, b]$ 分别表示滿足 $a < x < b$，$a \leqslant x \leqslant b$，$a \leqslant x < b$，$a < x \leqslant b$ 的 x 的集。其中每一个称为間隔，而 a 及 b 为其端点。間隔 (a, b) 又称区間，而 $[a, b]$ 称为綫段或綫节。間隔 $[a, b)$ 及 $(a, b]$ 称为半綫节。

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}(k-1,\ k]。$$

若 $A\subset B$，則显然的

$$A+B=B,$$

特别是

$$A+A=A。$$

定义 4. 設 A 与 B 为二集，又集 P 包含 A 与 B 的所有共同元素但不含任何其他元素，称 P 为 A 与 B 的交集，写为：

$$P=AB \quad 或 \quad P=A\cap B。$$

例如 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$，$B=\{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$，則

$$AB=\{3,\ 4\}。$$

同样可以定义 n 个集 $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n$ 的交集，也可定义一系列集 $A_1,\ A_2,\ A_3,\ \cdots$ 的交集；更一般的，对于一組集合 A_ξ，它們用不同的記号 ξ 以示区别，那末也可以定义所有 A_ξ 的交集。相应的記号是：

$$P=A_1A_2\cdots A_n,\ P=\prod_{k=1}^{n}A_k,\ P=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n,$$

或

$$P=\bigcap_{k=1}^{n}A_k,$$

$$P=A_1A_2A_3\cdots,\ P=\prod_{k=1}^{\infty}A_k,\ P=A_1\cap A_2\cap A_3\cap\cdots,$$

或

$$P=\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k,$$

$$P=\prod_{\xi}A_\xi \quad 或 \quad P=\bigcap_{\xi}A_\xi。$$

例如

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{k},\ \frac{1}{k}\right)=\{0\}\ (單元素集)$$

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(0,\frac{1}{k}\right)=0\ (空集)$$

若 $A\subset B$，則显然的

$$AB=A,$$

特别是
$$AA=A。$$

若二集 A 与 B 沒有共同元素，則写为
$$AB=0;$$
此时也称 A 与 B 是“不相交的”。

定理 1. **設 A 为一集，$\{E_\xi\}$ 是以集 E_ξ 做元素的集，則**
$$A\sum_\xi E_\xi=\sum_\xi AE_\xi。$$

証明 假設
$$S=A\sum_\xi E_\xi,\ T=\sum_\xi AE_\xi。$$

設 $x\in S$，則 $x\in A$ 并且 $x\in\sum_\xi E_\xi$。后者表示有 ξ_0 适合于 $x\in E_{\xi_0}$，总之 $x\in AE_{\xi_0}$，所以 $x\in T$。从而証明了
$$S\subset T。$$

反之，若設 $x\in T$，則必有 ξ_0 适合于 $x\in AE_{\xi_0}$。換言之：$x\in A$ 又 $x\in E_{\xi_0}$。由 $x\in E_{\xi_0}$ 知 $x\in\sum_\xi E_\xi$。又因 $x\in A$，所以 $x\in S$。于是
$$T\subset S。$$
由 $T\subset S$ 和 $S\subset T$，得着 $S=T$。

系 $A(B+C)=AB+AC$。

定义 5. 設 A 与 B 为二集，又集 R 包含屬于 A 而不屬于 B 的一切元素且除此而外無其他元素，則称 R 为 A 与 B 的差集，写作：
$$R=A-B\quad 或\quad R=A\diagdown B。$$

例如 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{3,4,5,6\}$，則
$$A-B=\{1,2\}。$$

定理 2. **設 A, B, C 为三集，則**
$$A(B-C)=AB-AC。$$
其証明可由讀者自行补足。

集的运算与普通算术的运算頗有相似之处，但是并不完全相

同，如上面所說的关系式 $A+A=A$ 及 $AA=A$，在算术上是不成立的。下面我們还要举一个不相似的例子。

定理 3. **关系式**

$$(A-B)+B=A \tag{1}$$

当 $B\subset A$ **且仅当** $B\subset A$ **时成立。**

証明 設(1)为眞，則每一被加集均为其和集的子集，所以 $B\subset A$。又設 $B\subset A$，則 $(A-B)+B\subset A$。但是另一方面，关系式 $(A-B)+B\supset A$ 的成立是無条件的，所以 $B\subset A$ 含有(1)。

§2. 一对一的对应

設 A 与 B 为两个有限集，自然会發生下面的問題：它們所含元素的个数是否相同。我們可以数一下每一集所含元素的个数是多少，从所得的数字是否相同就可以解决这个問題。但是不数也可以解决問題。例如

$$A=\{a, b, c, d, e\},$$

$$B=\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}。$$

如果我們細察下面的表：

$$\left.\begin{array}{c|c|c|c|c|c}A: & a & b & c & d & e \\ \hline B: & \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon\end{array}\right|,$$

我們虽然不数，也曉得 A 与 B 的元素个数是相同的。

上面所說的比較法有这样一个特性：对于一集的每一个元素，另一个集中有一个并且只有一个元素和它对应，反之亦然。这个比較法的优点是它也可以用之于無限集。例如，N 为自然数全体的集，而 M 为所有 $\frac{1}{n}$ 的全体，用对应法，將 N 中的 n 对应于 M 中的 $\frac{1}{n}$：

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c}N: & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\ \hline M: & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots\end{array},$$

立即可以看到 N 与 M 所含元素是一对一对地配得起来的。

現在我們給配对無余的概念以精确的定义:

定义 1. 設 A 与 B 为二集，具有下面性質的法則 φ: 使 A 的任一元素 a, 有 B 的唯一元素 b 与之对应，并且使 B 的任一元素 b, 也有 A 的唯一元素 a 与之对应，此时称 φ 建立了 A 与 B 的一对一的对应(簡称一一对应)。

定义 2. 若 A 与 B 間能建立一对一的对应，則称 A 与 B 是"对等"的，或者称它們的"势"是相同的。此事記作

$$A \sim B。$$

不难明白，二个有限集只有当它們的元素的个数是相同时才是对等的。由上可見，"其势相同"一語乃是有限集的元素"个数相同"的直接扩充。

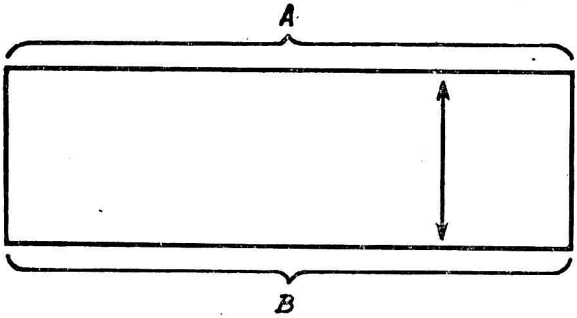

圖 1.

下面举几个对等集的例子。

設 A 与 B 是一个長方形的一对平行边上点的集(圖 1)，則 $A \sim B$。

設 A 与 B 是两个同心圓周上点的集(圖 2)，显然 $A \sim B$。

所可注意的，此时若將此二圓周展开为直綫，則此二綫段的長并不相同。这个例子告訴我們，一个較長的綫段并不含有"更多

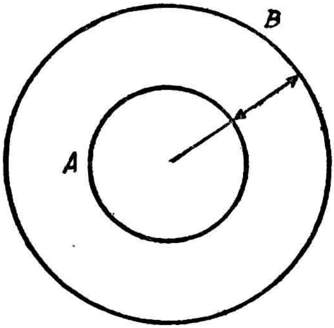

圖 2.

的"点，这种現象，由下例更为显然。假設 A 表示直角三角形斜边上点的集，B 表示底边上点的集，那末由圖 3，可以看到 $A \sim B$，虽然底边的長小于斜边。假使我們將底边复盖在斜边的上面，那末 B 就成为 A 的子集，并且是 A 的眞子集（B 是 A 的眞子集乃是：$B \subset A$，但 $B \neq A$）。由此例可以明白：的确有集可与其眞子集对等的。但是任何有限集却不能和它的眞子集对等。由此可見，只有無限集才有此种奇妙的性質。以后我們还要証明，凡無限集必含有与它自身对等的眞子集。此地我們再举一个例子。

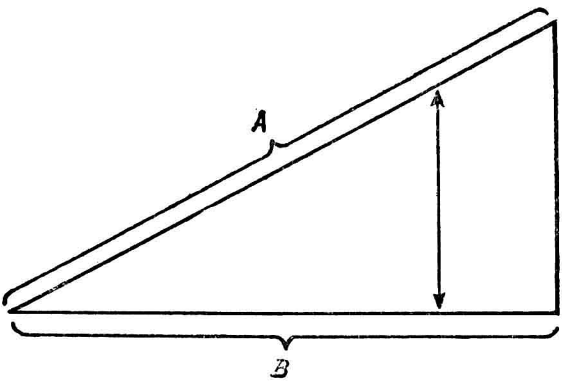

圖 3.

設 N 表示自然数全体的集，而 M 为偶数的全体：

$$N=\{n\},\quad M=\{2n\}。$$

將此二集用下法使成一一对应：

N:	1	2	3	4	5	$\cdots$
M:	2	4	6	8	10	$\cdots$

则 M 与 N 是对等的，虽然 M 是 N 的眞子集。因此得到："自然数有多少，偶数也有多少"。

下面关于对等集的若干簡單性質，讀者可以自己証明之。

定理 1. (a) $A\sim A$。

(b) 若 $A\sim B$，則 $B\sim A$。

(c) 若 $A\sim B$，$B\sim C$，則 $A\sim C$。

定理 2. **設** $A_1, A_2, A_3, \cdots$ **及** $B_1, B_2, B_3, \cdots$ **为二系列的集。若諸集** A_n **各不相交，諸集** B_n **亦各不相交，即**

$$A_nA_{n'}=0,\ B_nB_{n'}=0 \quad (n\neq n'),$$

且

$$A_n\sim B_n \quad (n=1, 2, 3, \cdots),$$

則

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k\sim \sum_{k=1}^{\infty} B_k。$$

§ 3. 可列集

定义 1. 設 N 为自然数全体所成之集

$$N=\{1, 2, 3, \cdots\}。$$

凡与集 N 对等的集 A 称为可列集，或者称 A 是可列的。

此时也称 A"具有势 a"。很明显的，所有可列集是兩兩对等的。

下面是几个可列集的例子：

$$A=\{1, 4, 9, 16, \cdots, n^2, \cdots\},$$

$$B=\{1, 8, 27, 64, \cdots, n^3, \cdots\},$$

$$C=\{2, 4, 6, 8, \cdots, 2n, \cdots\},$$

$$D=\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\}。$$

定理 1. **集** A **为可列的必要且充分条件是可以把它列成形式**

$$A=\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots\}。\qquad (1)$$

証明 若 A 具有(1)的形式，那末將 A 的元素 a_n，使它对应于它的足数 n，因而得 A 与 N 間的一一对应。所以 A 是可列的。

反之，若設 A 是可列的，那末在 A 与 N 之間存在一种一一对应法 φ。由 φ 得 n 的对应元素 a_n，于是 A 就可写成(1)的形式了。

定理 2. 任何無限集 A 必含有可列子集。

証明 設 A 为一無限集。从 A 取一元素 a_1。因为 A 是無限集，它不会因取出 a_1 而耗尽，所以从 $A-\{a_1\}$ 又可取一元素 a_2。$A-\{a_1, a_2\}$ 决非空集，所以又可以由此取一元素 a_3。因为 A 是無限集，所以此种手續可以繼續做去不会終止。因此得着 A 的可列子集：

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots。$$

定理 3. 可列集的任何無限子集是可列的。

証明 設 A 为可列集，B 是它的無限子集。如果將 A 列成

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots,$$

那末依照次序逐一的看下去，不时会遇到 B 中的元素。而且对于 B 中每一个元素，早晚会被我們遇到，因此也就有一个自然数与之“相遇”。若將 B 中元素重新編号，順次的用自然数来对应，就知道 B 是可列的。

系 从可列集 A，除去一个有限子集 M，所得的 $A-M$ 仍为可列集。

定理 4. 一个有限集和一个可列集如無公共元素，那末它們的和集是一个可列集。

証明 設

$$A=\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\},$$
$$B=\{b_1, b_2, b_3, \cdots\},$$