高等学校教材

复变函数论

第四版

钟玉泉 编

以复数作为自变量的函数叫做复变函数，与之相关的理论是复变函数论。18世纪，欧拉、达朗贝尔、拉普拉斯等数学家为创建这门学科作了许多基础性的研究工作；19世纪，柯西、魏尔斯特拉斯、黎曼等数学家为复变函数论的全面发展作了大量奠基性的工作；20世纪，复变函数论有了很大的进展和更广阔的研究领域……

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

复变函数论

Fubian Hanshulun

第四版

钟玉泉 编

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书初版于1979年，再版于1988年，三版于2004年。此次修订保持了第三版“阐述细致，便于自学”的特点，同时增加了少量新内容，充实了例题，附上了名词索引，更加易教易学。

本书内容包括：复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、解析函数的幂级数表示法、解析函数的洛朗展式与孤立奇点、留数理论及其应用、共形映射、解析延拓和调和函数共九章。其中加上＊号的内容，供学有余力的学生选学。

本书可作为高等师范院校数学系的教材，也可为其它理工院校、教育学院所选用。

图书在版编目(CIP)数据

复变函数论/钟玉泉编.--4版.--北京:高等教育出版社,2013.8
ISBN 978-7-04-037364-6

Ⅰ.①复… Ⅱ.①钟… Ⅲ.①复变函数-高等学校-教材 Ⅳ.①O174.5

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第107530号

策划编辑 兰莹莹　责任编辑 兰莹莹　封面设计 张申申　版式设计 杜微言
插图绘制 宗小梅　责任校对 王 雨　责任印制 尤 静

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印　　刷 北京市文林印务有限公司
开　　本 850 mm×1168 mm 1/32
印　　张 12.125
字　　数 310千字
购书热线 010－58581118
咨询电话 400－810－0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　　　 http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
　　　　 http://www.landraco.com.cn
版　　次 1979年8月第1版
　　　　 2013年8月第4版
印　　次 2013年8月第1次印刷
定　　价 25.60元

物 料 号 37364－00

第四版序

本书第三版自2004年1月出版以来，被许多高校选作教材，受到同行和广大读者的欢迎，已多次重印。为了进一步锤炼教材，提高质量，适应现代数学发展的需要，我们对第三版进行了修订。主要作了以下改动：

1. 在第二章中增加了用复变元 z 和它的共轭 $\bar{z}$ 来刻画复函数的内容，这样便于与现代复分析相衔接；

2. 增加、删减了一些例题，使基本理论和例题的搭配更合理，更易教易学；

3. 把习题的参考答案统一放在了书末；

4. 增加了名词索引，以方便查找数学名词。

此外，与本教材（第二版）配套的教学用书《复变函数学习指导书》（钟玉泉编，高等教育出版社），读者仍可以对照第四版的内容参考阅读。

此次修订工作由赵国松和顾晓慧完成。

修订者于四川大学数学学院

2012年8月

第三版序

本书第二版自1988年5月出版以来，迄今已重印22次，累计印数达45万余册。使用后普遍反映良好。为使教材能与时俱进，不断提高质量，遂对第二版进行了修订。修订中集撷了本人的若干教学和科研成果[见附1～7]，针对规范的数学名词已颁布，顺便作了规范化勘正。修订的另一重要依据是1988年11月底的郑州全国复变函数编写提纲讨论会精神。

我们在修订中所掌握的具体原则是：

1. 使原书中涉及的数学名词规范化；

2. 一般不增删原书的章、节、例题（只增了例4.5(5)）、习题（只增了第一章习题(二)*12）和图；

3. 对原书作进一步修整，并在一些地方适当引入[附1～7]的部分成果，以使其叙述更清楚、更精确、更易教易学，而基本理论又更扎实。

此外，拙编《复变函数学习指导书》，为国家教委"八五"高校规划教材，是拙编教材《复变函数论》(第二版)的配套教学用书，读者仍可以与第三版教材对照参考阅读。

编者于四川大学数学学院

2003年6月

附 1. 一个解析函数定理的推广. 四川大学学报(自然科学版),1990,27(1):86～87;

2. 一族与对称函数有关的解析函数的开始多项式. 西南师范大学学报(自然科学版),1990,15(1):125～131;

3. 解析函数的单叶半径. 四川大学学报(自然科学版),1991,28(4):545～547;

4. 解析函数的星象半径. 四川大学学报(自然科学版),1993,30(3):405～407;

5. 解析函数的β级星象半径. 四川大学学报(自然科学版),1995,32(2):121～127;

6. 复变函数学习指导书. 北京:高等教育出版社,1996 年 4 月;

7. 关于复变函数的教材改革与建设. 香港:《现代教学论坛》杂志,2000 年 1 期.

书中符号说明

为了方便,我们引入以下符号:

“$\forall x$”表示“对每一个 x”;

“$\exists x$”表示“存在 x”;

“$\exists 1x$”表示“惟一存在 x”;

“——$\Rightarrow$——”表示“若——,则——”;

“——$\Leftrightarrow$——”表示“——当且仅当——”;

“$\Rightarrow$”表示“必要性”;

“$\Leftarrow$”表示“充分性”.

目 录

引　言

我们知道，在解实系数一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$$

时，如果判别式 $b^2-4ac<0$，就会遇到负数开平方的问题. 最简单的一个例子，是在解方程

$$x^2+1=0$$

时，就会遇到 -1 开平方的问题.

16 世纪中叶，意大利卡尔丹①在 1545 年解三次方程时，首先产生了负数开平方的思想. 他把 40 看作 $5+\sqrt{-15}$ 与 $5-\sqrt{-15}$ 的乘积，然而这只不过是一种纯形式的表示而已. 当时，谁也说不上这样表示究竟有什么好处.

为了使负数开平方有意义，也就是要使上述这类方程有解，我们需要再一次扩大数系，于是，就引进了虚数，使实数域扩大到复数域. 但最初，由于对复数的有关概念及性质了解得不清楚，用它们进行计算又得到一些矛盾，因而，长期以来，人们把复数看作不能接受的"虚数". 直到 17 世纪和 18 世纪，随着微积分的发明与发展，情况才逐渐有了改变. 另外的原因，是由于这个时期复数有了几何的解释，并把它与平面向量对应起来解决实际问题的缘故.

关于复数理论最系统的叙述，是由瑞士数学家欧拉(Euler)作出的. 他在 1777 年系统地建立了复数理论，发现了复指数函数和三角函数间的关系，创立了复变函数论的一些基本定理，并开始把它们用到水力学和地图制图学上. 用符号"i"作为虚数的单位，也是他首创的. 此后，复数才被人们广泛承认和使用.

① Girolamo Cardano(1501－1576)意大利数学家，他发表了解三次方程的公式.

在复数域内考虑问题往往比较方便. 例如,一元 n 次方程

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0 \quad (a_0\neq 0),$$

在复数域内恒有解,其中系数 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 都是复数. 这就是著名的**代数学基本定理**,它用复变函数理论来证明,是非常简洁的. 又如,在实数域内负数的对数无意义,而在复数域内,我们就可以定义负数的对数.

在 19 世纪,复变函数的理论经过法国数学家柯西(Cauchy)、德国数学家黎曼(Riemann)和魏尔斯特拉斯(Weierstrass)的巨大努力,已经形成了非常系统的理论,并且深刻地渗入到代数学、解析数论、微分方程、概率统计、计算数学和拓扑学等数学分支;同时,它在热力学、流体力学和电学等方面也有很多的应用.

20 世纪以来,复变函数已被广泛地应用在理论物理、弹性理论和天体力学等方面,与数学中其它分支的联系也日益密切. 致使经典的复变函数理论,如整函数与亚纯函数理论、解析函数的边值问题等有了新的发展和应用. 并且,还开辟了一些新的分支,如复变函数逼近论、黎曼曲面、单叶解析函数论、多复变函数论、广义解析函数论和拟共形映射等. 另外,在种种抽象空间的理论中,复变函数还常常为我们提供新思想的模型.

复变函数研究的中心对象是所谓解析函数,因此,复变函数论又称为解析函数论,简称函数论.

复变函数是我国数学工作者从事研究最早也最有成效的数学分支之一. 我国老一辈的数学家在单复变函数及多复变函数方面做过许多重要的工作,不少成果均已达到当时的国际水平. 而今,在他们的热忱帮助下,我国许多中青年数学工作者,正在健康成长,不少人已在数学的各个领域中作出了许多优异的成绩.

第一章 复变数与复变函数

复变函数就是自变量为复数的函数. 复变函数论是分析学的一个分支,故又称**复分析**. 我们研究的主要对象,是在某种意义下可导的复变函数,通常称为**解析函数**. 为建立这种解析函数的理论基础,在这一章中,我们首先引入复数域与复平面的概念;其次引入复平面上的点集、区域、若尔当曲线以及复变函数的极限与连续等概念;最后,还要引入复球面与无穷远点的概念. 这门学科的一切讨论都是在复数范围内进行的.

§1. 复 数

1. 复数域 形如

$$z=x+\mathrm{i}y \text{ 或 } z=x+y\mathrm{i}$$

的数,称为**复数**,其中 x 和 y 是任意的实数,实数单位为 1. i 满足 $\mathrm{i}^2=-1$,称为**虚数单位**. 电工学里是例外,在那里习惯用 j 表示,而不是用 i.

实数 x 和 y 分别称为复数 z 的**实部**和**虚部**,常记为:

$$x=\operatorname{Re} z,\quad y=\operatorname{Im} z.$$

复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 及 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 相等,是指它们的实部与实部相等,虚部与虚部相等,即

$$x_1+\mathrm{i}y_1=x_2+\mathrm{i}y_2$$

必须且只须

$$x_1=x_2,\quad y_1=y_2.$$

虚部为零的复数就可看作实数，即 $x+\mathrm{i}\cdot 0=x$；因此，全体实数是全体复数的一部分. 特别，$0+\mathrm{i}\cdot 0=0$.

虚部不为零的复数称为**虚数**；实部为零且虚部不为零的复数称为**纯虚数**.

复数 $x+\mathrm{i}y$ 和 $x-\mathrm{i}y$ 称为互为**共轭复数**，即 $x+\mathrm{i}y$ 是 $x-\mathrm{i}y$ 的共轭复数，或 $x-\mathrm{i}y$ 是 $x+\mathrm{i}y$ 的共轭复数. 复数 z 的共轭复数常记为 $\bar{z}$，于是

$$x-\mathrm{i}y=\overline{x+\mathrm{i}y}.$$

对于这样定义的复数，我们必须规定其运算方法. 由于实数是复数的特例，规定复数运算的一个基本要求是：复数运算的法则施行于实数特例时，能够和实数运算的结果相符合，同时也要求复数运算能够满足实数运算的一般定律.

复数的加(减)法可按实部与实部相加(减)，虚部与虚部相加(减). 即复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 相加(减)的法则是：

$$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2),$$

结果仍是复数. 我们称复数 z_1+z_2 是复数 z_1 与 z_2 的**和**，称复数 z_1-z_2 是复数 z_1 与 z_2 的**差**.

复数的加法遵守**交换律**与**结合律**，而且减法是加法的逆运算，这些都很容易验证.

两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 及 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 相乘，可按多项式乘法法则进行，只需将结果中的 i^2 换成 -1，即

$$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+y_1x_2),$$

结果仍是复数，我们称它为 z_1 与 z_2 的**积**.

也易验证，复数的乘法遵守**交换律**与**结合律**，且遵守乘法对于加法的分配律.

两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 及 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 相除(除数 $\neq 0$)时，可先把它写成分式的形式，然后分子分母同乘以分母的共轭复数，再进行简化，即

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\quad (z_2\neq 0),$$

结果仍是复数，我们称它为 z_1 与 z_2 的**商**. 这里除法是乘法的逆运算.

全体复数并引进上述运算后就称为**复数域**，常用 **C** 表示. 在复数域内，我们熟知的一切代数恒等式，如

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b),$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

等等，仍然成立. 实数域和复数域都是代数学中所研究的"域"的实例. 和实数域不同的是，在复数域中不能规定复数像实数那样的大小关系. 事实上，若有像实数那样的大小关系，由于非零实数的平方大于零，而 $\mathrm{i}\neq 0$ 时，则应有 $\mathrm{i}^2>0$，即 $-1>0$，这是不可能的.

2. 复平面 一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 本质上由一对有序实数 (x,y) 惟一确定，(x,y) 就称为复数 z 的**实数对形式**. 于是能够建立平面上全部的点和全体复数间的一一对应关系. 换句话说，我们可以借助于横坐标为 x、纵坐标为 y 的点来表示复数 $z=x+\mathrm{i}y$（图 1.1）.

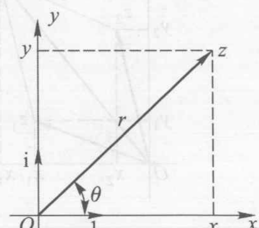

图 1.1

由于 x 轴上的点对应着实数，故 x 轴称为**实轴**；y 轴上的非原点的点对应着纯虚数，故 y 轴称为**虚轴**. 这样表示复数 z 的平面称为**复平面**或 **z 平面**. 复平面也常用 **C** 表示.

引进了复平面之后，我们在"数"和"点"之间建立了联系. 以后在研究复变函数时，常可借助于几何直观，还可采用几何术语. 这也为复变函数应用于实际提供了条件，丰富了复变函数论的内容. 为了方便起见，今后我们不再区分"数"和"点"、"数集"和"点集"，说到"点"可以指它所代表的"数"，说到"数"也可以指这个数代表的"点". 例如，我们常说"点 $1+\mathrm{i}$"，"顶点为 z_1,z_2,z_3 的三角形"

等等.

在复平面上,从原点到点 $z=x+\mathrm{i}y$ 所引的向量与这个复数 z 也构成一一对应关系(复数 0 对应着零向量),这种对应关系使复数的加(减)法与向量的加(减)法之间保持一致.

例如,设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$, $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$,则

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+\mathrm{i}(y_1+y_2).$$

由图 1.2 可以看出,z_1+z_2 所对应的向量,就是 z_1 所对应的向量与 z_2 所对应的向量的和向量.

又如,将 z_1-z_2 表成 $z_1+(-z_2)$,可以看出,z_1-z_2 所对应的向量就是 z_1 所对应的向量与 $(-z_2)$ 所对应的向量的和向量,也就是从 z_2 到 z_1 的向量(图 1.3).

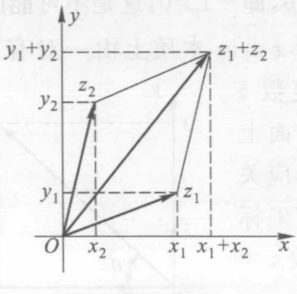

图 1.2

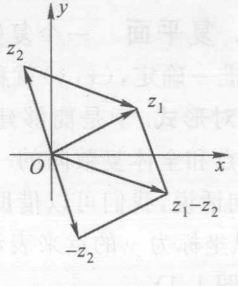

图 1.3

例 1.1　考虑一条江面上的水在某时刻的流动. 假定在江面上取好一坐标系 xOy,我们把江面上任意一点 P 的速度 v 的两个分量记为 v_x 与 v_y,则我们可以把速度向量 v 写成复数(图 1.4)

$$v=v_x+\mathrm{i}v_y.$$

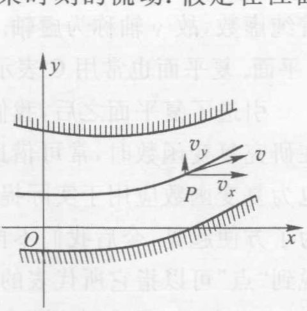

图 1.4

人们经过长期的摸索与研究发现,对于很多的平面问题(如流体力学与弹性力学中的平面问题等)来