高等数学
习题课教程

曾广洪　张晓霞　吴庆初　涂四利　编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等数学习题课教程

Gaodeng Shuxue Xitike Jiaocheng

曾广洪　张晓霞　吴庆初　涂四利　编著

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书依据教育部工科类及经济管理类本科数学基础课程教学基本要求，并参照全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲及中国大学生数学竞赛大纲而编写。本书共包含八章内容，分别为函数、极限与连续，一元函数微分学，一元函数积分学，微分方程和差分方程，向量代数与空间解析几何，多元函数微分学，多元函数积分学，无穷级数。每章都含精选的典型例题和习题，既有基础训练，又对常见题型分专题进行归纳总结，其中有综合应用题和一定数量的提高题，部分题目选自全国硕士研究生入学统一考试和中国大学生数学竞赛。

书中的例题常以典型错误分析、一题多解或变式等形式出现，编者还根据多年的教学经验对例题进行分析、详解和评注，归纳出解题的思想、方法和技巧。

本书与现行教材相匹配，同时保持相对独立性，是教材的有益补充和扩展，可以作为高等学校理工类及经济管理类本科各专业高等数学课程习题课的教材、教师的教学参考书，也可供准备考研及参加大学生数学竞赛的读者使用。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学习题课教程 / 曾广洪等编著 .-- 北京：高等教育出版社，2013.8
ISBN 978-7-04-037911-2

Ⅰ.①高… Ⅱ.①曾… Ⅲ.①高等数学－高等学校－习题集 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 156929 号

策划编辑 胡 颖　责任编辑 胡 颖　封面设计 于文燕　版式设计 马敬茹
插图绘制 尹 莉　责任校对 杨雪莲　责任印制 韩 刚

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	廊坊市文峰档案印务有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×960mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	22.25	版　　次	2013年8月第1版
字　　数	400千字	印　　次	2013年8月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	30.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号 37911-00

前　　言

高等数学是理工类及经济管理类本科各专业学生的一门必修的重要基础理论课。高等数学课程在高等学校课程体系中占有重要的地位,是许多专业的必修课程,也是这些专业的考研必考课程。它不但为学生的许多后继课程和日后工作提供必需的基础和工具,而且对于训练和培养数学素养、理性思维、逻辑推理能力起着无可替代的作用。

要学好高等数学,总离不开解题。解题过程是运用所学知识分析问题、解决问题的过程,是训练逻辑推理和运算技能的过程,同时还是对所学内容掌握程度的检查和反馈过程。因此指导学生提高解题能力是高等数学课程教学的一项重要任务。编者在长期的教学实践中体会到,要完成好这项任务,一本好的学习指导书是必不可少的,这正是编写本书的初衷。

本书的主要特点是:

1. 精心选题编排

本书依据教育部工科类及经济管理类本科数学基础课程教学基本要求,并参照全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲及中国大学生数学竞赛大纲而编写,既可以作为高等数学习题课的教材,也可以作为教师的教学参考书,同时还可以作为考研和大学生数学竞赛的复习资料。本书既具有相对独立性,也是教材的有益补充。各章内容编排体系一致,均分为四部分:第一部分为知识归纳,包含学习要求和知识网络;第二部分为基础训练,常以典型错误分析形式出现,以此加深学生对知识的理解;第三部分为综合提高,依据考研和大学生数学竞赛内容,分专题进行归纳,在实际教学时,有利于师生以习题课或讲座等形式使用本书,同时也突出高等数学在理工及经济管理领域中的应用。不少例题选自全国硕士研究生入学统一考试和中国大学生数学竞赛,并有分析、评注,常有一题多解和变式,是教学团队多年课堂教学、考研及竞赛辅导经验的总结;第四部分为精选习题,分为 A,B 两组,分别与基础训练和综合提高部分相对应,并附有部分习题答案与提示。对部分适合特定专业读者学习的内容,在书中分别标记为“理工类”或“经管类”,例如第五章,经管类读者可以根据实际需要选用。

2. 重视思想方法

本书内容体现了数学哲学观和系统论的思想。不管是宏观看各章之间，还是具体看各章内的知识点及专题之间，高等数学知识之间既有联系，又有区别，构成一个有机整体。一方面，许多理论、方法和性质会一脉相承地“移植”或“遗传”，但另一方面，有时存在着重要的“变异”，善于用系统论和数学哲学观来指导高等数学学习，会使得学习更有效率、更有效果。另外，本书虽然将高等数学知识分为基础训练和综合提高两部分讲解，但贯穿全书的是通过变换等数学思想方法将复杂问题简单化，又通过对简单问题的分析（常是正反经验进行对比、举一反三进行推广）进行升华，促进对数学知识的理解和应用。这正是学习高等数学的好方法。在本书中，读者总能发现，有些题目的错误解法虽然“失败”了，但坚持下去，进行反思，吸取其中的合理因素，最终却能解决问题，甚至引出重要的数学知识和方法。这不仅是一种好的学习方法，而且从数学发展的历史来看，这也与数学知识螺旋式上升、不断发展的进程相一致。

3. 融入现代技术

本书的大部分图形都是用数学软件画出来的，例如对于坐标系的画法，编者采用了数学软件图形输出的原有格式，在手工画图时，也保持了传统的规范的坐标系格式，之所以这样做是基于以下考虑的：一方面，有利于师生在平时教学和学习中直接使用（如在多媒体辅助教学时，可将空间图形加以转动，以不同角度和侧面观察图形，加深对投影、对称等重要数学知识的理解）；另一方面，不同的格式各有它的优点和实用价值，编者期望通过将传统的数学书写习惯和现代数学软件的通用做法相结合、手工和计算机辅助相结合的方式加强训练读者的绘图和几何直观理解能力以及培养他们数学思维的严谨性和开放性。同时借助计算机数学软件可以帮助读者提升对相关知识的学习效率和能力。对于本书例题和习题的计算、作图或证明，编者提供了相关的用计算机数学软件编写的源程序和命令，读者可以在江西师范大学高等数学课程网站上下载。

本书第三、四、五、八章由曾广洪编写，第一、二、六、七章由张晓霞编写，吴庆初参与了第一、二章的编写，涂四利参与了第三章的编写。全书由曾广洪统稿、定稿。江西师范大学易才凤、易桂生和广东海洋大学刘华祥等教授对本书进行了认真细致的审稿，高等教育出版社胡颖编辑为本书做了大量富有成效的工作，他们为本书提供了宝贵的建议和指导。江西师范大学刘邱云、饶丽萍、桂国祥、毕含宇、兰海英、陈晓莉、鄢克雨、蒋新荣和黄钢等教师组成的高等数学课程教学团队也为本书提供了宝贵意见。在此一并由衷地感谢！

在分享书稿的清香、积分符号的优美、数学的应用价值带来的欣喜的同时，编者也清楚地知道，限于编者的水平，书中难免存在不妥之处，恳请广大读者提出批评和指正！

编著者

2013年1月

目　录

第一章

函数、极限与连续

第一部分　知识归纳

一、学习要求

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示法,会建立应用问题的函数关系.

2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

3. 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的概念.

5. 理解极限的概念(对极限的 $\varepsilon-N$ 或 $\varepsilon-\delta$ 定义可在学习过程中逐步加深理解,对于给出 N 或 δ 不作过高的要求),理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左极限、右极限之间的关系.

6. 掌握极限的性质及四则运算法则.

7. 掌握极限存在的两个准则,并会利用它们求极限,掌握利用两个重要极限求极限的方法.

8. 理解无穷小量、无穷大量的概念,掌握无穷小量的比较方法,会用等价无穷小量求极限.

9. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续),会判别函数间断点的类型.

10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理),并会应用这些性质.

二、知识网络

- 函数、极限与连续
  - 函数
    - 定义
      - 定义域
      - 对应法则
      - 值域
      - （定义域、对应法则）两个基本要素
    - 基本特性
      - 有界性
      - 单调性
      - 周期性
      - 奇偶性
    - 反函数
    - 复合函数
  - 数列极限
    - 定义
    - 数列极限的性质
      - 唯一性
      - 有界性
      - 保号性
      - 四则运算
    - 判断数列收敛的准则
      - 夹逼准则
      - 单调有界准则
    - 重要极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$
  - 函数极限
    - 定义
    - 函数极限的性质
      - 唯一性
      - 有界性
      - 保号性
      - 四则运算
    - 重要关系
      - 单侧极限与双侧极限
      - 函数极限与数列极限(归结原理)
      - 函数极限与无穷小
      - 无穷大与无穷小
      - 无穷小的比较
    - 重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ 或 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$
  - 函数的连续性
    - 连续的定义(直观理解，几个等价定义)
    - 间断点
      - 第一类间断点
        - 可去间断点
        - 跳跃间断点
      - 第二类间断点
        - 无穷间断点
        - 振荡间断点
    - 闭区间上连续函数的性质
      - 最值定理
      - 零点定理
      - 介值定理
      - 有界性定理

第二部分 基础训练

例 1 判断函数$f(x)=(x-1)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$的奇偶性.

分析 可以验证当$-1<x<1$时,

$$\begin{aligned}f(-x)&=(-x-1)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=-(x+1)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\\&=-\sqrt{\frac{(x+1)^2(1-x)}{1+x}}=-\sqrt{(1+x)(1-x)}\\&=-\sqrt{\frac{(1+x)(1-x)^2}{1-x}}=-(1-x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\\&=(x-1)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=f(x).\end{aligned}$$

但就此说该函数为偶函数是错误的.事实上,遗憾的是,这个函数的定义域是$[-1,1)$,关于原点不对称.正确解法如下:

解 因为函数的定义域是$[-1,1)$,关于原点不对称.所以该函数是非奇非偶函数.

评注 函数的定义域关于原点对称,这是函数具有奇偶性的必要条件.换言之,如果某函数的定义域不关于原点对称,则该函数肯定不是奇函数,也不是偶函数.

例 2 已知函数$f(x)=\begin{cases}5-x, & x\leqslant 2,\\1+x, & x>2.\end{cases}$求$f(x+2)$,并讨论$f(x+2)$的奇偶性.

分析 本题有下列错误解法:

由题意可得$f(x+2)=\begin{cases}3-x, & x\leqslant 2,\\3+x, & x>2.\end{cases}$故$f(-x+2)=\begin{cases}3+x, & x\leqslant 2,\\3-x, & x>2.\end{cases}$由于$f(-x+2)\neq f(x+2)$,$f(-x+2)\neq -f(x+2)$,所以函数$f(x+2)$无奇偶性.

实际上,对$f(x)$求$f(x+2)$时,应将函数表达式中所有的x换成$x+2$.同样地,对$f(x+2)$求$f(-x+2)$时,应将函数表达式中所有的x换成$-x$.正确解法如下:

解 因为$f(x+2)=\begin{cases}5-(x+2), & x+2\leqslant 2,\\1+(x+2), & x+2>2,\end{cases}$所以$f(x+2)=\begin{cases}3-x, & x\leqslant 0,\\3+x, & x>0.\end{cases}$

记 $F(x)=f(x+2)$，函数 $F(x)$ 的定义域关于原点对称. 因为

$$F(-x)=\begin{cases}3+x, & -x\leqslant 0,\\ 3-x, & -x>0,\end{cases}$$

所以 $F(-x)=\begin{cases}3-x, & x<0,\\ 3, & x=0,\\ 3+x, & x>0,\end{cases}$ 即

$$F(-x)=\begin{cases}3-x, & x\leqslant 0,\\ 3+x, & x>0,\end{cases}$$

从而 $F(-x)=F(x)$，即函数 $f(x+2)$ 为偶函数.

评注 (1) 请体会适时地引进记号的好处.

(2) 请读者自己画图，帮助理解函数图形平移、对称等特性.

例 3 "对于任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$，总存在正整数 N，当 $n\geqslant N$ 时，恒有 $|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon$"是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的(　　).

A. 充分但非必要条件　　B. 必要但非充分条件

C. 充要条件　　D. 既非必要，又非充分条件

分析 有人误认为本题表达与教材上的极限定义的表达不同，而选择错误选项. 事实上，"对于任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$"，是对 ε 添加了约束条件，这种限制并未改变 ε 是任意小的正数的性质. 另外，因为定义只要求对任意给定的正数 ε (当然 2ε 也是任意正数)，从某项开始，以后的无穷多项与 a 之差的绝对值(即距离)均小于该正数即可，至于是从哪项开始，或增加或减少从某项开始的无穷多项中有限项，并不需要严格界定(N 随 ε 的变化而定)，因此"存在正整数 N，当 $n\geqslant N$ 时，恒有 $|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon$"也与数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的定义内涵一致. 由于数列极限定义表达的是其极限存在(即收敛)的充要条件，故应选 C.

例 4 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left[\dfrac{1}{(n^2+1)^2}+\dfrac{2}{(n^2+2)^2}+\cdots+\dfrac{n}{(n^2+n)^2}\right]$.

分析 本题常有以下错误解法：

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}n^2\left[\frac{1}{(n^2+1)^2}+\frac{2}{(n^2+2)^2}+\cdots+\frac{n}{(n^2+n)^2}\right]\\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot n^2}{(n^2+1)^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot n^2}{(n^2+2)^2}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot n^2}{(n^2+n)^2}\\ &=0+0+\cdots+0=0.\end{aligned}$$

在本题中，随着 n 趋于无穷大，函数(数列是特殊的函数)的个数也趋于无穷大. 请注意，极限的四则运算法则只适用于有限个函数之和的情形. 例如对于 $a_n=\dfrac{1}{n^p}+\dfrac{2}{n^p}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^p}$，若 $p=\dfrac{3}{2}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n-1)}{2n^{\frac{3}{2}}}=+\infty$；若 $p=2$，则

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(n-1)}{2n^2} = \dfrac{1}{2}$,可见无穷多个无穷小之和可能为无穷大,也可能为某定值,当然也有可能仍然为无穷小.读者在学习了无穷级数的知识后,更能体会到这一点.正确解法如下:

解 适当地进行放缩,得

$$\frac{n^2(1+2+\cdots+n)}{(n^2+n)^2} < n^2\left[\frac{1}{(n^2+1)^2}+\frac{2}{(n^2+2)^2}+\cdots+\frac{n}{(n^2+n)^2}\right] < \frac{n^2(1+2+\cdots+n)}{(n^2+1)^2},$$

即
$$\frac{n^2\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}}{(n^2+n)^2} < n^2\left[\frac{1}{(n^2+1)^2}+\frac{2}{(n^2+2)^2}+\cdots+\frac{n}{(n^2+n)^2}\right] < \frac{n^2\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}}{(n^2+1)^2}.$$

而
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}}{(n^2+n)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}}{(n^2+1)^2} = \frac{1}{2},$$

所以由夹逼准则得
$$\lim_{n\to\infty} n^2\left[\frac{1}{(n^2+1)^2}+\frac{2}{(n^2+2)^2}+\cdots+\frac{n}{(n^2+n)^2}\right] = \frac{1}{2}.$$

例 5 讨论极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+x}-\sqrt{2x^2+1}\right)$ 是否存在?

分析 本题有以下常见错误解法:

错解一 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+x}-\sqrt{2x^2+1}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{2x^2+x} - \lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{2x^2+1} = \infty - \infty = 0.$

错解二

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+x}-\sqrt{2x^2+1}\right) &= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{2x^2+x}-\sqrt{2x^2+1}\right)\left(\sqrt{2x^2+x}+\sqrt{2x^2+1}\right)}{\sqrt{2x^2+x}+\sqrt{2x^2+1}} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{\sqrt{2x^2+x}+\sqrt{2x^2+1}} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{1}{x}}{\sqrt{2+\dfrac{1}{x}}+\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

产生以上错误的原因在于:① 在应用极限运算法则时,要求进行运算的每一个函数的极限必须存在,而错解一中 $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{2x^2+x}$ 与 $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{2x^2+1}$ 均不存在,故不能进行运算 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+x}-\sqrt{2x^2+1}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{2x^2+x} - \lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{2x^2+1}$. ② ∞ 是个记号,不能像数一样进行运算而断定 $\infty - \infty = 0$. ③ 错解二中分子、分母同时除以 x,使得无穷大变成无穷小,从而有利于计算,这种方法是对的.但却忽视了 x 的符号.请注意当 $x>0$ 时,$\dfrac{\sqrt{2x^2+x}}{x} = \sqrt{2+\dfrac{1}{x}}$;当 $x<0$ 时,$\dfrac{\sqrt{2x^2+x}}{x} =$

$-\sqrt{2+\dfrac{1}{x}}$. 正确解法如下：

解 因

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+x}-\sqrt{2x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\dfrac{1}{x}}{\sqrt{2+\dfrac{1}{x}}+\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}=\frac{1}{2\sqrt{2}},$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+x}-\sqrt{2x^2+1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\dfrac{1}{x}}{-\sqrt{2+\dfrac{1}{x}}-\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}=-\frac{1}{2\sqrt{2}},$$

故 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+x}-\sqrt{2x^2+1}\right)$不存在.

评注 (1) 对于$\infty-\infty$型极限,若含分式,则常进行通分. 若含根式,则常用以下有理化的方法,例如式子中有$\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$,通常是乘与它对偶的$\sqrt{a}\mp\sqrt{b}$进行有理化;式子中有$\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}$,通常是乘$\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}$进行有理化.

(2) 求极限时经常要细致地考察单侧极限. 例如本题,要注意到偶次方根前必取正号这一重要事实,因此对于$x\to\infty$,应分$x\to+\infty$与$x\to-\infty$两种情况去讨论. 作为变式,请思考求$\lim\limits_{x\to\infty}x\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)$. 关于更多的要考察单侧极限的情形,请见后续例子.

例 6 求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}\sin\left(x^3\sin\dfrac{1}{x}\right)$.

分析 本题有以下常见错误解法:

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\sin\left(x^3\sin\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\cdot x^3\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0.$$

当$x\to0$时,用无穷小$x^3\sin\dfrac{1}{x}$来代替无穷小$\sin\left(x^3\sin\dfrac{1}{x}\right)$是错误的. 因为当$x\to x_0$时,无穷小$\alpha$与$\beta$作比较的前提条件是作分母的$\beta$不能等于零,而这里的$\beta=x^3\sin\dfrac{1}{x}$在$x$取$x_n=\dfrac{1}{n\pi}$时等于零,$n\in\mathbf{N}^+$. 正确解法如下:

解 因当$x\neq0$时,$0\leqslant\left|\sin\left(x^3\sin\dfrac{1}{x}\right)\right|\leqslant\left|x^3\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant|x^3|$,故

$$0\leqslant\left|\frac{1}{x^2}\sin\left(x^3\sin\frac{1}{x}\right)\right|\leqslant|x|\to0\quad(x\to0),$$

由夹逼准则,可知 $$\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\sin\left(x^3\sin\frac{1}{x}\right)=0.$$

例 7　求极限 $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 5x}{\sin 6x}$.

分析　本题有以下常见错误解法：$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 5x}{\sin 6x}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{5x}{6x}=\dfrac{5}{6}$.

实际上，当 $x\to\pi$ 时，$5x$ 及 $6x$ 都不是无穷小量，所以当 $x\to\pi$ 时，$\sin 5x$ 及 $\sin 6x$ 不与 $5x$ 及 $6x$ 等价. 正确解法如下：

解　令 $x-\pi=t$，则当 $x\to\pi$ 时，$t\to 0$，因此

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 5x}{\sin 6x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin 5(\pi+t)}{\sin 6(\pi+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin 5t}{\sin 6t}=\lim_{t\to 0}\frac{-5t}{6t}=-\frac{5}{6}.$$

评注　在学习了一元函数微分学后，本题还可以用洛必达法则去快速求解，但我们那时会发现，洛必达法则并非处处适用. 例如求极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\tan 3x}$. 另外请思考该题用等价无穷小替换，这样做：$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\tan 3x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{x}{3x}=\dfrac{1}{3}$，对吗？

例 8　设函数 $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x-3}}, & x>0,\\ \ln(1-x), & x\leqslant 0,\end{cases}$ 求该函数的间断点，并判断其类型.

分析　本题常有以下错误解法：

错解一　$f(0)=\ln(1-x)\big|_{x=0}=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x-3}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}$，故 $x=0$ 是该函数的第一类间断点.

错解二　$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\ln(1-x)=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x-3}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}$，故 $x=0$ 是该函数的第一类间断点.

又 $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=\lim\limits_{x\to 3}e^{\frac{1}{x-3}}=\infty$，故 $x=3$ 是该函数的第二类（无穷）间断点.

产生上述错误的原因：(1) 判断间断点的类型时，必须求出函数在该点处的左、右极限（若单侧极限不存在，也应说明）. 错解一中仅求了函数在 $x=0$ 处的右极限，而未求左极限，就下结论. 错解一的另一个错误在于虽然重视讨论了分段点，但却忽略了函数在 $x=3$ 处无定义，因此也是间断点.

(2) 错解二中求错了函数在 $x=3$ 处的极限，因此错误地认为 $x=3$ 是无穷间断点.

正确解法如下：

解　函数在 $x=0$ 的邻域内有定义，且

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\ln(1-x)=0,\qquad \lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x-3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{e}},$$

故 $x=0$ 是该函数的第一类(跳跃)间断点.

函数在 $x=3$ 处无定义,且

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-} e^{\frac{1}{x-3}}=0,\quad \lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+} e^{\frac{1}{x-3}}=+\infty,$$

故 $x=3$ 是该函数的第二类间断点.

评注 (1) 要注意规范地使用符号,例如, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ 可记作 $f(0+0)$ 或 $f(0^+)$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ 可记作 $f(0-0)$ 或 $f(0^-)$,等等.但应注意 $f(0^+)$ 与 $f(0)$ 的区别.

(2) 特别注意以下常见的极限(尤其是单侧极限):

$$\lim_{x\to+\infty} e^x=\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}=+\infty,\quad \lim_{x\to-\infty} e^x=\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}=0,$$

$\lim\limits_{x\to\infty} e^x$, $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$ 均不存在;

$$\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty,\quad \lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty;$$

或者更一般地,

$$\lim_{x\to+\infty} a^{\frac{1}{x}}=1(a>0),\quad \lim_{x\to+\infty} a^x=+\infty(a>1),\quad \lim_{x\to-\infty} a^x=0(a>1),$$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x=0(0<a<1),\quad \lim_{x\to-\infty} a^x=+\infty(0<a<1),\quad \lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2},\quad \lim_{x\to+\infty}\operatorname{arccot} x=0,\quad \lim_{x\to-\infty}\operatorname{arccot} x=\pi,$$

$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$, $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arccot} x$ 均不存在.还有其他一些结论,这里就不赘述,其实不必要刻意去记忆它们,根据相应基本初等函数的图形就可以迅速地得到这些结论.它们是考研和竞赛中的常考知识点,在本书中也将反复用到这些常识.

例 9 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

分析 本题常有以下错误解法:

错解一 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=0.$

错解二 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0.$

错解一将连续与极限的概念相混淆;错解二忽略了要考察单侧极限.正确解法如下:

解 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0,\quad \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1.$

因为 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$，所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在.

评注　当然，我们还可以知道 $x=0$ 是第一类(跳跃)间断点.

第三部分　综 合 提 高

专题一　极限的性质及其应用

(请读者注意，为保持论述的完整性和方法的系统性，我们把以后学习的知识也提前放在这里作一个专题. 对其他各章，我们也经常这样做，以提高对知识的综合应用能力.)

方法导引　(一) 由数列 $\{x_n\}$ 极限与其子列 $\{x_{n_k}\}$ 极限的关系可得以下几点：

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则对数列 $\{x_n\}$ 的任一子列 $\{x_{n_k}\}$，都有 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$. 反过来，若存在数列 $\{x_n\}$ 的某子列，其极限不存在，或存在数列 $\{x_n\}$ 的某两个子列，其极限存在但不相等，则数列 $\{x_n\}$ 的极限不存在.

(2) 数列 $\{x_n\}$ 的某几个子列的极限存在且相等，不能判定数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，但有下列结论：若 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k-1}=a$，$\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

(3) 数列 $\{x_n\}$ 无界的充分必要条件是它存在无穷大子列.

(4) 若数列 $\{x_n\}$ 有界，则它必有收敛的子列.

(5) 若数列 $\{x_n\}$ 有界且发散，则它必有两个不同极限的收敛的子列.

(二) 由函数极限定义可得以下两个结论：

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$ 的充要条件是 $f(x_0^-)=f(x_0^+)=a$ (a 为有限数).

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$ (a 为有限数).

(三) 对于极限的几个重要性质作以下说明(以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ 为例)：

我们应先结合图形去理解这些性质，找到证明它们的思路，其证明也是用精确的数学语言把这种思路刻画表达出来而已. 即我们应重视建立对数学知识的直观的感性认识，在此基础上，再上升到理性认识，熟悉其语言描述. 这样的学习效果比简单的识记要好. 具体来说，以常考的极限的唯一性及保号性为例，关于它们的直观理解是

(1) 极限唯一性. 用反证法，设另有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A'$，则取适当的 ε，例如 $0<\varepsilon<\dfrac{A'-A}{2}$，则根据极限定义，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，a_n 既要落入以 A 为中心，ε 为半径的邻域，又要落入以 A' 为中心，ε 为半径的邻域，如图 1-1，与事实不