弗晰（模糊）逻辑
及其若干理论问题

王　雨　田

湖南师院政治系
湖南省逻辑研究会　印

一九八〇年二月

目　录

一、弗晰逻辑的产生……………………………………（1）

二、弗晰逻辑的研究进展……………………………（3）

二、弗晰逻辑的理论与应用…………………………（6）

四、弗晰逻辑的定义与研究对象问题………………（23）

五、弗晰逻辑的方法论与意义问题…………………（29）

弗晰(模糊)逻辑及其若干理论问题

近卅年来，应用数学有很大的发展。1965年美国控制论学家查德（L·A Zadeh）第一次提出弗晰集合（Fuzzy sets，“弗晰”为Fuzzy一词的译名，兼顾了音、义两方面，为了有助于形相象地了解，也可译作“模糊”）的概念①，标志着弗晰数学主要作为应用数学的一个分支而产生。十几年来，关于弗晰数学的研究，进展很快，影响很大，不仅在应用方面，而且在理论方面几乎已经渗入到数学的各个分支，出现了使数学各个分支模糊化的趋势。

一方面由于逻辑与数学有着一定的共同性质和内在联系，另一方面，由于科学技术发展的需要，从30到40年代开始，数理逻辑已日益广泛运用于科学技术领域，在一定意义上，伴随着应用数学的发展，也有应用逻辑的发展。随着弗晰数学的出现，它所提出的基本思想与方法很快就被运用到逻辑领域中去，产生了弗晰逻辑。它是作为弗晰数学的一个重要分支而与弗晰语言学、弗晰算法等分支一道产生与发展起来的。现在，它主要是作为一种应用逻辑而成为富于生命力的前沿学科之一。

一、弗晰逻辑的产生

弗晰数学与弗晰逻辑主要是为了解决控制论、系统论与计

算机科学所提出的新课题而产生的。50年代控制论与系统论的产生，具有特别重要的意义，它标志着人类的认识史从以分析为主的阶段进入到以综合性、整体性的研究为主的阶段。卅年来，这些边缘学科有了飞速的发展，控制论已经由经典控制理论、现代控制理论进入到对大系统的研究。系统论的研究到60—70年代也主要进入对复杂的大系统与超大系统，如航天系统，人脑系统，社会经济系统，智能系统等的研究领域。这类复杂的大系统不仅结构与功能复杂，涉及大量的参数与变量，而且其间的关系十分错综复杂，模糊不清。可以说，复杂大系统的一个突出特点是具有模糊性。与分析的研究相适应的现有的数学、逻辑工具和计算机却是以精确性为特点的，因而难以甚至无法对之加之描述与处理。在复杂性与精确性之间发生了矛盾。查德称之为互克性原理。他说："从本质上，互克性原理的实质是：当系统的复杂性日益增长时，我们作出系统特性的精密然而有意义的描述的能力将相应降低直至达到这样一个界限，即精密性和有意义（或适当性）变成两个几乎互相排斥的特性。"②

仅以逻辑为例。长期以来，数理逻辑是作为一门纯粹理论而存在的。从30年代起它被用于电路开关设计以后，到50年代就成为控制论与计算机的基础理论之一。这主要是因为在研制具有某种"目的"性的自动机器时，必须考虑到人类思维的某些逻辑特性与规律，并要将之加以形式化，以便为机器所能接受。建立在取真假二值的基础之上的数理逻辑，布尔代数是适应这种需要的，在逻辑上取真假二值与电路的开关和神经反应的"全"或"无"规律是相对应的。但是，对于复杂的大系统和研制模拟人的高级智能的机器来说，现有的数理逻辑就不够了。因为人的思维除了具有机械性的、精确性的严密逻辑推理

能力以外，还同时具有灵活地处理模糊性对象的能力，能够进行整体性、平行性的思考，具有概括、抽象、直觉、创造性思维的能力。而且后一种情况是主要的、大量存在的。炼钢工人调节炉温，高级厨师掌握火候，中医切脉诊治，艺术家的灵感，科学家的创见等等，都与模糊性有关。作为控制论、系统论研究的重要工具的计算机来说，不得不从对形式语言的处理去进一步探索自然语言的形式化问题，需要建立相应的数学，逻辑模型与算法，弗晰数学、弗晰逻辑与弗晰语言正是为了解决这些新课题而产生和发展起来的。

二、弗晰逻辑的研究进展

弗晰逻辑与数学的关系是很直接很密切的，它是直接作为弗晰数学的一个重要分支而产生的，而且从一开始就是为了应用的目的而产生的。十几年来，关于弗晰逻辑的研究进展情况充分说明了这一点。

在现代的数学中，集合是一个十分重要的基础概念。虽然任意若干个（有限或无限多个）固定事物的全体可以组成一个集合，但在任一集合与组成这一集合的元素之间至少有一种性质，就是：某一指定的元素要么属于这一集合，要么不属于这一集合。这一性质，在数学上可以用分别取1与0这二值的特征函数表示出来，在逻辑上可以与分别取真假二值的布尔代数、数理逻辑对应起来。显然这类只取二值的性质只适用于精确性的描述与处理。

为了使上述的普通集合论的基本概念与方法能运用于模糊性对象的描述与处理，查德将之加以修改与推广。他的基本思想与方法是把“属于”关系进一步加以数量化，使得一个元素

不是要么"属于"，要么不"属于"某一集合，而是可以在不同程度上"属于"某一集合。这样，他就提出了隶属度（membership,grade）、隶属函数（membership function）、模糊集（Fuzzy－sets）这样一些重要的基本概念。隶属度是指一个元素"属于"某一集合的程度，隶属函数是上述的特征函数在模糊情况下的具体表现形式，模糊集是指所有有关的具有不同隶属度的元素所构成的集合，（严格说，由于其参考集是普通集，这种模糊集在实际上都是模糊子集）。这样，查德把普通集合论推广为模糊集合论，前者只取｛0，1｝二值，后者则可以在整个〔0，1〕区间上取连续的无穷值；前者对应于二值逻辑，后者与多值逻辑（有穷的或无穷的连续值）相对应。弗晰集成为刻划模糊性的一种数学模型。

把弗晰数学的基本概念与方法运用到逻辑领域中，为了对具有模糊性的概念、判断、推理和命题、谓词等加以描述，提出了弗晰逻辑变量、弗晰语言变量和弗晰逻辑函数（或称弗晰逻辑公式）等这样一些基本的弗晰逻辑概念。同时对数理逻辑中使用的真值连接词和真值表作了相应的推广，使之适用于模糊的情况。到现在对弗晰逻辑的这些基础理论的研究主是为了应用的需要而开展的，虽也逐步完善起来，但与弗晰数学的基础理论的研究相似，还很不完整，很不系统，更没有规范化，很多重大问题尚待探讨，这为逻辑和数学工作者提供了有待开垦的大片富于美好前景的处女地。

从十几年来研究进展的情况来看，对弗晰逻辑的研究主要仍在应用方面，与计算机科学有特别密切的关系，着重研究了两方面的问题。一方面是研究如何把弗晰逻辑公式化为标准型，加以化简，即所谓公式的极小化问题。这相当于布尔代数、数理逻辑中求范式及其化简的问题，这可用来探求最优的

开关线路。属于硬件方面。与此相对应，现已证明，只要引入“修正系数”的装置，用模糊元件构成相应的模糊开关线路和机器，在理论上是可能的，只是技术上尚待逐步实现。③

另一方面是对似然推理的研究，就是用模糊命题进行模糊的演绎推理与归纳推理。查德着重研究了肯定前件的假言推理（modus ponens），这就是下述类型的推理：

$$\frac{\begin{array}{l}\underline{p_1} \rightarrow \underline{q_1} \\ \underline{p_2}\end{array}}{\underline{q_2}}$$

（用“—”表示模糊情况，并用附标表示其区别）查德已经证明，运用模糊的组合推理规则（The Compasitimal rues of infernec）可以把上述的模糊推理变换为：$\underline{q_2} = \underline{p_2} \cdot (\underline{p_1} \rightarrow q_1)$，再用模糊矩阵进行运算，就可以形式化地、数量化地求得其结果。使现有的计算机能够加以接受和处理。④此外，他还研究了模糊情况下条件语句，即：若 $\underline{p}$ 则 $\underline{q}$ 否则 $\underline{r}$，这在调节与控制过程中是必不可少的。所有这些研究与弗晰语言、弗晰算法的研究密切相关，相当于软件方面，为的是研制弗晰控制器。在国外，已被有些工厂所采用，它的结构简单、灵活而适应性强，是一种新型的控制机器。在理论上、设计上、应用上都有重大意义。

近几年来，还对模糊关系方程及其可逆解进行了研究。这是从已知的模糊关系和结论出发去倒推其前提，也有重大的实用价值，现已用于疑难病症诊断和某些复杂的社会经济现象和思维的研究，都会有重大的意义。

除了应用方面以外，在理论方面，弗晰逻辑已日益使逻

辑，特别是数理逻辑的其它分支模糊化。对弗晰集合论、弗晰模型论、弗晰递归论（或弗晰可计算性理论）等的研究已逐步开展起来。在数学基础方面，弗晰逻辑有助于解决某些悖论，并与直觉主义逻辑有密切关系，此外，对于逻辑学的其它分支，特别是辩证逻辑必将发生深远的影响。但总的说来，有关基础理论的研究还很薄弱，正有待加强。

三、弗晰逻辑的理论与应用

现根据弗晰逻辑的研究进展，将有关理论与应用的基本内容加以比较系统的整理，初步给出一种比较系统的综述，仅供参考与讨论。

Ⅰ、予备知识——弗晰集的概念：

1、普通集与特征函数：

论域U为一集合：$U=\{u\}=\{u_1, u_2 \cdots\cdots\}$是所讨论对象的总体（或称为论宇，即 universe of discourse）。

设 A，B，C，… 为U的子集，P（U）为其幂集，即U的一切子集（包括空集Φ在内）的集，则

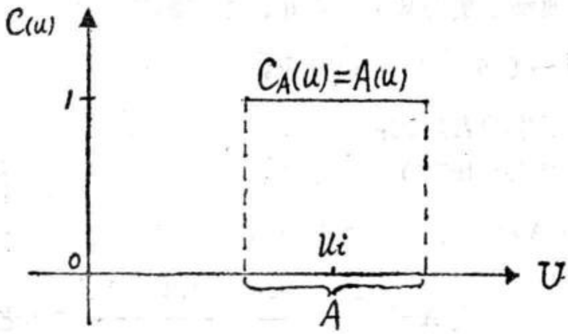
$u_i \in A$ 或 $u_i \bar{\in} A$，二者必居其一。

将“属于”关系用函数关系表示，称为特征函数，其值为｛0，1｝，则：

$$C_A(u)=\begin{cases}1 & 当\ u\in A\\ 0 & 当\ u\bar{\in} A\end{cases}$$

“属于”关系用函数关系加以表示，也就是将其论域与值域相对应，故亦为一映射。由下图可以直观地看出：一子

集A可以唯一地确定一映射，二者一一对应，可视为一体，仍以A表示这一映射，则映射A也就是子集A的特征函数。



A：U → {0，1}，当 C(u)取值{0，1}。

一普通集的特殊函数亦为：

$$u\rceil \rightarrow A(u)=C_A(u)=\begin{cases}1 & 当\ u\in A\\ 0 & 当\ u\notin A\end{cases}$$

2、弗晰集与隶属函数：

查德（1965）将普通集推广为弗晰集。考夫曼（Kau—fmann）强调指出⑨：集合U作为参考集为普通集，故为弗晰子集（Fuzzy subsets），以$\underline{A}$、$\underline{B}$、…表示之。

例：以年龄为论域，其值域一般取〔0，100〕，青年、中年、老年…作为其模糊子集。

查德的这一推广的要点为：

（1）将值域由{0，1}改为〔0，1〕，可取无穷连续值。

$$\underline{A}:U\rightarrow[0,1]$$

（2）将特征函数具体化为隶属函数（membership func—

tion)，用$f_{\underset{\sim}{A}}(u)$表示之，其取值为隶属度（membership grade）。

（3）弗晰子集与从U到〔0，1〕的任一映射：

$\underset{\sim}{A}$：U→〔0，1〕相对应。

3、弗晰子集的表达式：

（1）查德（1973）的表示法：

（A）离散：设U＝0＋0.1＋0.2＋…＋1

$$\text{则 } \underset{\sim}{A}=\frac{0.3}{0.5}+\frac{0.6}{0.7}+\frac{0.8}{0.9}+\frac{1}{1}\stackrel{\triangle}{=}\text{“年老”}$$

（以$\stackrel{\triangle}{=}$表示“定义为”）

（B）连续：U＝〔0，1〕 取 $f_{A}(u)=\dfrac{1}{1+u^2}$ 为隶属函数，则

$$\underset{\sim}{A}=\int_0^1\left(\frac{1}{1+u^2}\right)\Big/u$$

$$\text{一般式：}\underset{\sim}{A}=\sum_{i=1}^{n} f_{A}(u)/u \qquad \text{（离散）}$$

$$\underset{\sim}{A}=\int_U f_{A}(u)/u \qquad \text{（连续）}$$

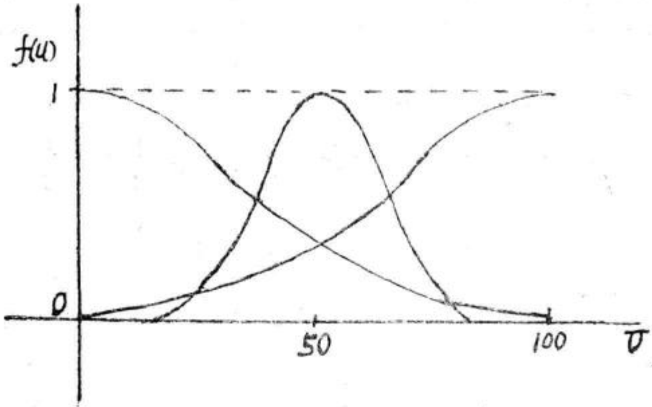
（2）取标准函数逼近隶属函数以转化为数值计算。

例：取U＝〔0，100〕，子集：{年青，年老}

$$
\text{则“年青”}(u)=\begin{cases} 1 & (0<u<25) \\ \left[1+\left(\dfrac{u-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1} & (25<u<100) \end{cases}
$$

$$
\text{“年老”}(u)=\begin{cases} 0 & (0<u<50) \\ \left[1+\left(\dfrac{u-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1} & (50<u<100) \end{cases}
$$

可以用图表示为：



4、弗晰集的运算：

（1）关于补、并、交集与包含关系的运算：

U 为一非空集，隶属函数的值域为〔0，1〕，对于 $\forall u \in U$，定义弗晰空集 Φ 为：

$f_{\Phi}(u)=0$，且以下关系成立：

$$f_{\underline{A}^c}(u)=1-f_{\underline{A}}(u)$$

$$f_{\underline{A}\vee\underline{B}}(u)=\max\langle f_{\underline{A}}(u),\ f_{\underline{B}}(u)\rangle$$

$$f_{\underline{A}\wedge\underline{B}}(u)=\min\langle f_{\underline{A}}(u),\ f_{\underline{B}}(u)\rangle$$

$f_{\underline{A}\subset\underline{B}}(u)$ 成立，当且仅当 $f_{\underline{A}}(u)\leq f_{\underline{B}}(u)$

贝尔曼(R·E·Bellman)与吉尔茨(M·Giertz)

（1973）证明⑦：在适当假设下对弗晰集进行max－min 运算是唯一可能的。

以U为参考集的弗晰集按上述规定运算，构成一软代数(Soft algebra)，即德摩根代数（De－morgan algebra)，在其中除互余律（$A \vee A^c = U$，$A \wedge A^c = \Phi$）以外，满足布尔代数所要求的其它全部条件（即幂等律、交换律、结合律、吸收律、分配律、复原律、对偶原则）。这一特点是由值域的变化｛0，1｝改为〔0，1〕所决定的。显然，设

$$f_{\underline{A}}(u) = \frac{1}{2}，则$$

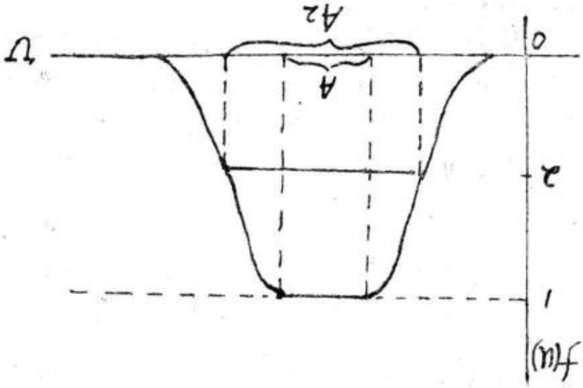
$$f_{\underline{A} \vee \underline{A}^c}(u) = \mathrm{man}\left(\frac{1}{2}，1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$f_{\underline{A} \vee \underline{A}^c}(u) = \mathrm{miu}\left(\frac{1}{2}，1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

（2）通过取截集（cut set）$\underline{A}_\alpha$，可将弗晰子集的运算转化为普通集的运算：

$$\underline{A}_\alpha = \{u | f_{\underline{A}}(u) \geqslant \alpha\} \qquad \alpha \in〔0，1〕$$

可图示如下：



此外，关于弗晰逻辑的予备知识还应包括数理逻辑的基本知识，本文从略。

Ⅱ、弗晰逻辑理论基础——弗晰逻辑变量与弗晰逻辑函数（弗晰公式）：

1、弗晰逻辑变量：

查德为了研究似然推理，将弗晰集的概念与方法推广到逻辑与语言领域，首先提出语言变量（linguistic variable）与语言限制词（linguistic hedge）这两个重要概念。

语言变量取不同的语言真值作为其子集，例如以“年龄”为语言变量时，“很年青”、“年青”、“中年”、“较老”、“年老”等为其语言真值，构成其子集。显然，每一语言真值各为一弗晰子集，用以表示弗晰逻辑谓词所取的不同程度的真值，可以看作是隶属度在弗晰逻辑与弗晰语言中的一种表现形式。

查德将语言变量定义为五元体④⑧：

$$(X, T(x), U, G, M)$$

其中：X…变量的名称，如年龄、数的大小，…

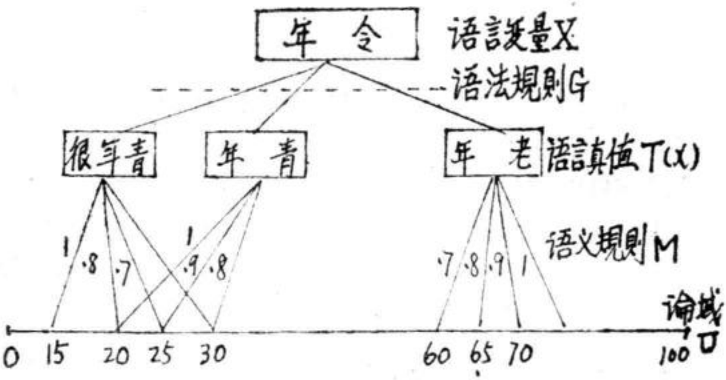
T(x)…x是语言真值，T(x)则为语言真值的集，如T(x)＝T（年龄）＝“很年青”＋“年轻”“中年”＋“较老”＋“很老”。

U…论域，当X为年龄时，U＝〔0，100〕

G…语法规则，根据原始词（primary term）（相当于语言真值，如“年青”，“年老”这类词）的隶属函数求词组的隶属函数

M…语义规则，根据语义规则给出弗晰子集x的隶属函数。

这五元体内的关系可图示如下：



查德用h表示语言限制词，其与原始词(primary term) u 的关系用hu表示。原始词相当于具有一定质的规定性的模糊概念或词，如“年青”、“中年”等，语言限制词则从量上对之加以限制，例如设 h 为“有些”，u 为“年青”，则可表示为：

$$h_u \overset{\triangle}{=} 有些_{年青} \overset{\triangle}{=} 较年青$$

显然，“较年青”为一语言真值，可见 hu 用来将语言真值 x 加以分解，从质与量两方面加以表示，亦可理解为 $hu \overset{\triangle}{=} x$，从而对语言变量X给予形式化、数量化的描述与处理。

查德虽然没有直接提出弗晰逻辑变量，而是提的弗晰语言变量。实际上，由于弗晰逻辑与弗晰语言学、弗晰算法密切相关，加以弗晰逻辑主要是作为一门应用逻辑这一特点，故从弗晰逻辑的理解角度来看，弗晰语言变量在实质上是一种特定的弗晰逻辑变量。

本文着重从逻辑方面加以概述，将有关的弗晰语言学内

容加以省略。

在弗晰逻辑中，弗晰逻辑变量亦简称弗晰变量⑨，由此按一定形成规则构成的合式公式称为弗晰逻辑变量函数，简称为弗晰公式

2、弗晰逻辑变量与弗晰逻辑公式：

现按考夫曼（Kaufmann）⑨的规定：

弗晰变量：$\underline{a}$，$\underline{b}$，… $\in [0, 1]$

弗晰公式：（即弗晰逻辑变量函数）：

$$\underline{F}(\underline{a}, \underline{b}, \cdots)$$

且：（1）$\underline{F}$ 依赖于 $\underline{a}$，$\underline{b}$，…取值。

（2）$0 < \underline{F} < 1$。

3、弗晰逻辑联结词：

由弗晰变量构成弗晰公式所用的逻辑联结词一般仍为：$\neg$、$\vee$、$\wedge$、$\rightarrow$、$\longleftrightarrow$。

弗晰公式中其真值在 $[0, 1]$ 区间上取任意值者为弗晰逻辑命题，用 $\underline{p}$，$\underline{q}$，$\underline{r}$…表示之，简称弗晰命题。

以 $\top(\underline{p})$ 表示弗晰命题 $\underline{p}$ 的真值，则弗晰命题 间的否定、析取、合取分别定义为：

$$\top(\neg \underline{p}) = 1 - \top(\underline{p})$$

$$\top(\underline{p} \vee \underline{q}) = \max\langle \top(\underline{p}), \top(\underline{q}) \rangle$$

$$\top(\underline{p} \wedge \underline{q}) = \min\langle \top(\underline{p}), \top(\underline{q}) \rangle$$

而蕴涵则定义为：

$$\top(\underline{p} \rightarrow \underline{q}) = \min\langle 1, 1 - \top(\underline{p}) + \top(\underline{q}) \rangle$$

在此要注意到：

在二值逻辑中：$T(p)=1 \rightarrow T(q)=1$

在弗晰逻辑中：$\underline{p} \rightarrow \underline{q}$是指：

$$T(\underline{p}) \geqslant x \rightarrow T(\underline{q}) \geqslant x,\ \forall x \in [0,\ 1]$$

因而具有如下性质：

若$T(\underline{p} \rightarrow \underline{q})=1$，则$T(\underline{p}) \leq T(\underline{q})$

显然，对于上述定义，排中律$T(\underline{p} \vee \neg \underline{p})=1$及矛盾律$(\underline{p} \wedge \neg \underline{p})=0$不成立。

4、弗晰逻辑公式的真值表：

若$\underline{F}$只含一个弗晰变量$\underline{a}$可分别检验$\underline{a} \leq \neg a$与$\neg a \leq a$这两种情况下的真值，列出真值表。

若$\underline{F}$含二个弗晰变量$\underline{a}$，$\underline{b}$，则要分八种情况分别检验。

例：$\underline{F}(\underline{a},\ \underline{b})=(\underline{a} \wedge \neg \underline{a}) \vee (\neg \underline{a} \wedge \neg \underline{b} \wedge \underline{b})$

其真值表（转第15面）为：

对于二个弗晰变量以上者，类推。

5、弗晰逻辑谓词及其量词：

以$\underline{P}$，$\underline{Q}$…表示弗晰谓词，则全称量词与存在量词定义如下：

$$T\langle \forall u \underline{P}(u) \rangle = \min \langle \bigwedge_{u \in U} \underline{P}(u) \rangle$$

$$T\langle \exists u \underline{P}(u) \rangle = \max \langle \bigvee_{u \in U} \underline{P}(u) \rangle$$

6、关于弗晰逻辑的特点：

斯卡勒（H·J·Skala）指出弗晰逻辑的特点为⑩：

$\leqq \quad \leqq \quad \leqq$				$\underline{a} \wedge \neg \underline{a}$	$\neg \underline{a} \wedge \underline{b} \wedge \neg \underline{b}$	$(\underline{a} \wedge \neg \underline{a}) \vee (\neg \underline{a} \wedge \underline{b} \wedge \neg \underline{b})$
$\underline{a}$	$\underline{b}$	$\neg \underline{b}$	$\neg \underline{a}$	$\underline{a}$	$\underline{b}$	$\underline{b}$
a	$\neg \underline{b}$	$\underline{b}$	$\neg \underline{a}$	$\underline{a}$	$\neg \underline{b}$	$\neg b$
$\neg \underline{a}$	$\underline{b}$	$\neg \underline{b}$	$\underline{a}$	$\neg \underline{a}$	$\neg \underline{a}$	$\neg \underline{a}$
$\neg \underline{a}$	$\neg \underline{b}$	$\underline{b}$	$\underline{a}$	$\neg \underline{a}$	$\neg \underline{a}$	$\neg \underline{a}$
$\underline{b}$	$\underline{a}$	$\neg \underline{a}$	$\neg \underline{b}$	$\underline{a}$	$\underline{b}$	$\underline{a}$
$\underline{b}$	$\neg \underline{a}$	$\underline{a}$	$\neg \underline{b}$	$\neg \underline{a}$	$\underline{b}$	$\neg \underline{a}$
$\neg \underline{b}$	$\underline{a}$	$\neg \underline{a}$	$\underline{b}$	$\underline{a}$	$\neg \underline{b}$	$\underline{a}$
$\neg \underline{b}$	$\neg \underline{a}$	$\underline{a}$	$\underline{b}$	$\neg \underline{a}$	$\neg \underline{b}$	$\neg \underline{a}$