

机械强度增刊

1

断裂力学讲座

1976

断 裂 力 学 讲 座

郑州机械科学研究所强度室编
《机 械 强 度》编 辑 组

1 9 7 6

编 辑 说 明

为了普及断裂力学的基础理论与技术，推广断裂力学在机械工业中的应用，一机部机械研究院和郑州机械科学研究所受一机部科技局的委托，于一九七四年十月至十一月在北京举办了一期断裂力学短训班。学员对象主要是电站设备、农机、汽车和重型、矿山、起重、通用机械等行业的工厂和研究所的技术人员。短训班邀请了西南交大、钢铁研究院、三机部621所、北京大学、西安交大、科学院力学所、铁道科学研究所、上海材料所等单位的同志，比较系统地介绍了断裂力学的概貌和思路，线性弹性和弹塑性断裂力学的基本理论和测试技术，以及断裂力学在疲劳裂纹扩张和应力腐蚀研究中的应用，扫描电子显微镜在断口分析和断裂力学研究方面的应用等。

短训班因举办仓促，讲义临时油印，错误甚多；有的讲稿还未能印出。我们根据大家的希望，请参加讲课的同志对讲稿做了修改校订，编成这本《断裂力学讲座》，作为《机械强度增刊》出版，以应各方面同志们的需要。

扫描电镜的应用一文，因已在《机械强度》内部刊物上连载，本辑未再收入。COD方法等讲稿，因作者尚未修订完毕，本辑暂缺。

一九七五年八月

目 录

讲座一	关于断裂力学的一些基本概念	孙训方 (1)
讲座二	线性弹性断裂力学基础	孙训方 (15)
讲座三	弹塑性断裂力学的 J 积分原理	蔡其巩 (81)
讲座四	应用有限单元法计算 K_I 的方法	郭仲衡 (111)
讲座五	平面应变断裂韧度 K_{IC} 的测试技术	姚 衡 (125)
讲座六	断裂力学在疲劳裂纹扩张研究中的应用	王仁智 (139)

关于断裂力学的一些基本概念

孙 训 方
(西南交通大学)

引 言

人们在生产实践中积累了一些成功的经验和失败的教训，因而在设计新型结构物时，逐渐摆脱盲目性，按客观规律办事。然而，由于生产总是在不断发展的，所以，人们的思想落后于实际的事是常有的。这是因为有些矛盾只有当事物发展到一定阶段时才会暴露出来。新的矛盾的暴露，在工程上往往会引起一些事故。这些事故也有二重性，一方面它是坏事，造成了一些生命财产上的损失；另一方面它也可以转化为好事。如果人们发挥了主观能动性，从分析事故的原因中找到一些规律性的东西，从而摆脱了这方面的盲目性，就能有所前进。

“断裂力学”这门学科的发展过程，当然也是符合上述认识过程的。在工程结构的设计和制造中，对材料都要求它具有足够的延性、韧性，为的是防止结构物在意外的荷载下发生骤然的断裂而造成巨大的损失。然而，就是这样按规范的规定进行设计和施工，仍然难以避免发生一些断裂的事故。大家比较熟知的是由于“疲劳”而发生的断裂、由于高温蠕变而发生的断裂以及由于应力腐蚀而发生的断裂。这些断裂都发生在其特定的条件下。在找到了这些断裂的原因后，也就相应地提出了一些措施来防止这些断裂的发生。随着生产的发展，高强度钢和焊接结构的采用，又出现了一些新的脆性断裂的事故。有些结构在设计、制造中都严格地按照传统的规则进行，然而，它却在低于设计时所允许的应力下发生脆性断裂。比较著名的事故是五十年代里美国北极星导弹固体燃料发动机机壳在实验发射时发生的爆炸事故。此外，还有不少军用和民用结构物在试制、试验或运用中的突然断裂事故。从传统的力学分析方法和设计规范的角度来看，这些断裂好象都是不可理解的。人们从这些脆性断裂事故中受到了震惊；同时，这些事故也促使人们深入一步地对断裂的原因进行研究。“断裂力学”也就是在这个基础上、随着生产实践和科学研究而逐步发展起来的一门新的学科。

断裂力学的一些基本概念

这里，首先介绍一些有关“断裂力学”的基本概念。

对上述的一些脆性断裂事故进行的分析，以及为分析这些事故而在实验室里对大量壳体在水压下进行实验的结果指出：在低于材料屈服极限的低应力下发生的脆性断裂、总是由宏观尺寸的裂缝源的扩展而引起的。这使人们回想起二十年代英国的物理学家葛里菲斯 (Griffith) 的工作。

葛里菲斯曾对玻璃这种脆性材料进行过理论分析,并解释了为什么玻璃的实际强度值远比它的理论强度值为低这一事实。按照葛里菲斯的观点,这是由于玻璃中难免会有一些微小的宏观裂缝,正是这些裂缝的存在,使得玻璃的强度大为降低。下面简单介绍葛里菲斯的理论。

(1) 葛里菲斯理论

取一块厚度为 t 的平板,在施加外力使板内产生均匀的拉应力 σ 后,将其两端固定,以隔绝外部的能源(图1)。然后,设想在这块平板上割开一个垂直于拉应力 σ 的方向并贯穿板厚的裂缝,其长度 $2a$ 远比板的长度和宽度为小。因此,在力学模型上,可以把这平板看作是“无限大”的。裂缝可看作是长轴远远大于短轴的椭圆孔。在假想地割开此裂缝后,平板内的弹性变形位能有所减少(即释放出来),按弹性理论中对于此板在上述条件下弹性变形位能的计算公式,此时所减少的弹性变形位能 δU 可按下式计算:

$$\delta U = -\frac{\sigma^2 \pi a^2}{E} \cdot t \quad (1)$$

在(1)式中, E 为材料的弹性模量。 t 、 σ 、 a 如前所定义。负号则表示能量的减少。

在平板内假想地割开一个裂缝后,就形成了两个新的表面,从而增加了表面能 δW 。令 T 代表材料在每单位表面积中的表面能。由于新的表面积为 $2 \times 2a \times t$, 故得:

$$\delta W = 4atT \quad (2)$$

此时,平板中总的能量变化为:

$$\delta U + \delta W = -\frac{\sigma^2 \pi a^2}{E} \cdot t + 4atT \quad (3)$$

根据能量原理可知,若此总的能量变化值达到最大时,裂缝就处于从稳定转向不稳定的临界状态,即当:

$\frac{\partial}{\partial a}[\delta U + \delta W] = 0$, 且 $\frac{\partial^2}{\partial a^2}[\delta U + \delta W]$ 为负值时,裂缝就开始进入不稳定状态。将(3)式对“ a ”取一阶导数和二阶导数,可见其二阶导数值恒为负值。若令其一阶导数为零,则得:

$$-2 \frac{\sigma^2 \pi a}{E} \cdot t + 4tT = 0$$

从而求得:

$$a = \frac{2TE}{\pi \sigma^2} \quad (4) a$$

或

$$\sigma = \sqrt{\frac{2TE}{\pi a}} \quad (4) b$$

(4)a 式给出了此平板在拉应力 σ 之下裂缝长度的临界值。也就是说,在拉应力 σ 之下,当裂缝全长达到 $2a = \frac{4TE}{\pi \sigma^2}$ 时,裂缝就开始处于不稳定状态。任何微小的能源输入,都将使裂缝产生临界扩展并导致脆性断裂。(4)b 式则给出了此平板在割开一个长度为 $2a$ 的裂缝后,使裂缝开始处于不稳定状态的拉应力 σ 的临界值。 σ 只要再增加任意微小数量,就将使裂缝

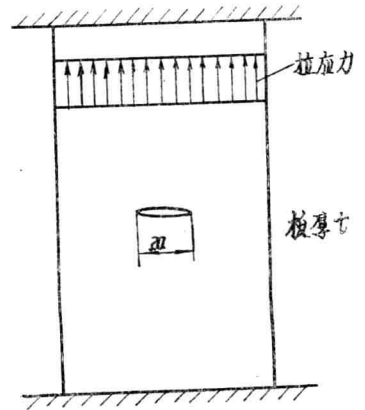


图 1

产生临界扩展并导致脆性断裂。葛里菲斯就是利用(4)b 式来解释象玻璃、陶瓷这一类脆性材料的实际强度为什么远较其理论强度为低的。

在葛里菲斯的能量方法中，也可以这样来理解：裂缝每扩展单位面积时，弹性系统所能提供的能量为 $\frac{\partial U}{\partial A}$ (A 为裂缝面积 $= t \cdot 2a$)，裂缝扩展所需要的能量 则 为 $\frac{\partial W}{\partial A}$ 。当 $\frac{\partial U}{\partial A}$ 在数值上等于 $\frac{\partial W}{\partial A}$ 时，裂缝处于临界状态下；当 $\frac{\partial U}{\partial A}$ 在数值上略大于 $\frac{\partial W}{\partial A}$ 时，裂缝就不断扩展，直到最终发生断裂。

通常称裂缝每扩展单位面积时弹性系统所能提供的能量为裂缝扩展时的能量率，并用 g 表示之。在葛里菲斯所研究的裂缝问题中，

$$U = \frac{\sigma^2 \pi a^2}{E} \cdot t \quad \text{于是:}$$

$$g = \frac{\partial U}{\partial A} = \frac{\partial}{\partial (t \cdot 2a)} \frac{\sigma^2 \pi a^2}{E} \cdot t = \frac{\sigma^2 \pi a}{E} \quad (5)$$

g 的单位是 $\text{Kg} \cdot \text{mm} / \text{mm}^2$ ，也可以看作是 Kg / mm 。因此，也有人称 g 为“裂缝扩展力”（即裂缝每扩展一单位长度时所需的力）⁽⁴⁾。

葛里菲斯的理论对于具有一定程度塑性的金属材料就不适用了。然而，金属材料在高于冷脆温度时，也同样发生由于宏观裂缝扩展所引起的低应力脆性断裂。对此现象，奥罗文 (Orowan) 在葛里菲斯理论的基础上，提出了如下的理论：

(2) 奥罗文理论

根据 x 光衍射分析，可以发现在断口表面的很薄一层金属中有显著的塑性变形。这就说明在裂缝扩展过程中裂缝前端的局部地区要发生塑性变形。因此，使裂缝扩展所释放的变形能，不仅用于前述表面能，对于金属材料而言，更重要的是用于裂缝扩展前的塑性变形能。令裂缝扩展每单位表面积所需的塑性变形能为 P ，则在 (4) a 和 (4) b 两式中都应该用 $T + P$ 来代替原式中的 T 。但注意到 T 和 P 相比是极微小的量（例如：在中等强度的钢中， P 比 T 大 4~6 个量级，就是对超高强度钢而言， P 也比 T 大 3 个量级）。因此，在 $T + P$ 中可将 T 略去，而得到如下的裂缝临界长度 a_c 及临界拉应力 σ_c 的计算公式：

$$a_c = \frac{2EP}{\pi \sigma^2} \quad (4) c$$

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{2EP}{\pi a}} \quad (4) d$$

对于一种材料，在一定的条件下，其 E 、 P 值为常数。因此以上两式可统一地写作：

$$\sigma \sqrt{\pi a} = \sqrt{2EP} \quad (6)$$

(6) 式右端的这个常数值是一个与材料的力学性质有关的数值。这样，(6) 式就成为具有宏观裂缝的金属材料发生脆性断裂的判据。若引进 g 的概念，上述判据也可写成 $g = 2P$ 的形式。这是《断裂力学》中的一个很重要的概念。由此式可见，按照用传统的力学公式算出构件中的最大应力使其不超过材料的允许应力这种形式的强度条件设计出来的构件，并不一定能保证构件不发生脆性断裂。

按葛里菲斯和奥罗文理论，用能量变化率的手法来研究断裂问题，也和一般的用能量方法研究力学问题的手法相仿，都具有一个缺点，即忽略了材料的具体力学行为。所以，有人称这种手法是采用了一个“暗盒”。当然、严格地讲，各种力学方法中所用的抽象模型都采用

了不同形式的“暗盒”，掩盖了更深一步的物理本质。当然，这在科学发展中是不可避免要采用的手法。问题只在于采用哪一种形式的“暗盒”，掩盖了问题的物理本质的哪些方面，揭示了哪些方面而已。为了揭示裂缝前缘区域的应力和应变状态（这与研究断裂的物理本质和建立具体的计算方法和测试方法都有密切联系），欧文（Irwin）采用了威斯特噶尔德（Westergaard）的方法对裂缝前缘区域的应力和应变进行了研究，提出了一些近似的、但却是简单而且普遍可运用的计算公式。欧文所用的力学模型是线性弹性体。所以，通常称他所采用的方法为线性弹性断裂力学。

(3) 欧文的线性弹性断裂力学理论。弹性应力场强度因子的概念

欧文利用威斯特噶尔德研究裂缝问题所用的线性弹性力学的手法、对于平面问题中的裂缝前端附近区域的应力状态和应变状态进行研究⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾，并得出了“无限大”的平板在均匀拉伸应力场中有一个长度为 $2a$ 的裂缝存在时，裂缝前端附近区域应力场的普遍表达式为：

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \quad \begin{cases} i=x, y \\ j=x, y \end{cases} \quad (7)$$

由于所研究的只限于裂缝前端附近区域的应力场，即在 r 为很小的一个范围内，因此，在上式中略去了 $\sqrt{r}$ 、 $\sqrt{r^3}$ …等项（这些项在 r 很小时是可以忽略不计的）。在上式中 $f_{ij}(\theta)$ 是 θ 的函数，它表示应力 σ_{ij} 如何随 θ 而变化的规律。 r, θ 是所研究点的极坐标（参看图 2）。

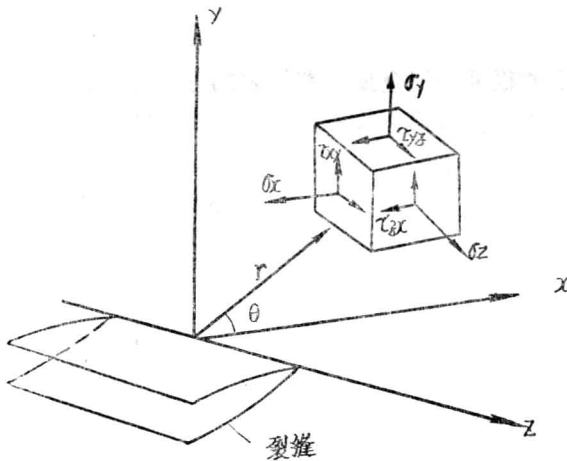


图 2

由(7)式可知，靠近裂缝端部的应力 σ_{ij} 在 $r \rightarrow 0$ 处具有奇异性。也就是说，当 $r \rightarrow 0$ 时，应力 σ_{ij} 就以某种方式（视裂缝的几何特征和加载方式等因素而定）趋向于无限大。所以，不可能用裂缝端部处（即 $r \rightarrow 0$ 处）的应力大小来判断裂缝是否将进入不稳定状态。但该式中的参数 K 的大小反映了裂缝前端附近区域内弹性应力场的强弱程度，因此，按脆性材料断裂的统计强度理论的观点——脆性断裂发生在构件中最大应力区中足够大的体积内应力都达到或超过材料的临界值时，此参数 K 就可以用作判断裂缝是否将进入不稳定状态的指标。此指标在线性弹性断裂力学中具有

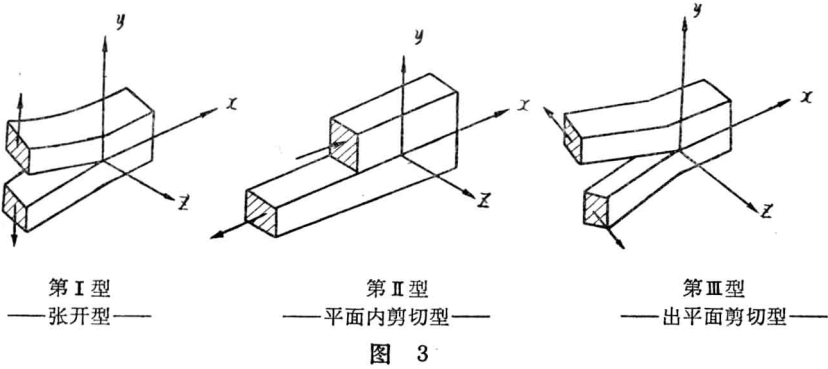
重要意义。由于参数 K 表明了裂缝前端附近区域内弹性应力场 σ_{ij} 的强弱程度，因此，称它为在裂缝前端的“弹性应力场强弱程度因子”，或简称“应力强度因子”。若用数学形式来表达，可写作：

$$K = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} (\sigma_{ij})_{\theta=0} \quad (8)$$

K 的量纲与(6)式中的 $\sigma\sqrt{\pi a}$ 的量纲相同。其单位是 $\text{kg/cm}^{\frac{3}{2}}$

在一般的应力场中，按裂缝的位置与应力的方向间的关系，可将裂缝附近的应力场分为三种基本类型。与每种类型应力场相对应的裂缝表面变形情况可参阅图 3。按裂缝表面变形情况来分，第 I 型称为张开型，第 II 型称为平面内剪切型，第 III 型称为出平面剪切型（有时，

也称在这些基本类型应力场中相应的裂缝为 I、II、III 型的裂缝)。在三种不同类型的应力场中, 应力强度因子 K 也不同, 为了加以区别, 可用 K_I 、 K_{II} 、 K_{III} 分别表示之。当裂缝附近的应力场只属于一种基本类型的, 就只有一个与之相应的 K。若裂缝附近的应力场较复杂, 包括以上三种基本类型时, 则有与之相应的三个应力强度因子 K。



下面先以最简单的(也是在工程上最危险的)张开型的裂缝(通常也称之为葛里菲斯裂缝。见图 4) 为例来说明。在裂缝附近的诸应力分量和位移分量可用以下各式表达:

$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \quad (9) a$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \quad (9) b$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (9) c$$

$$u = \frac{K_I}{4G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2k-1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right] \quad (10) a$$

$$v = \frac{K_I}{4G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2k+1) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right] \quad (10) b$$

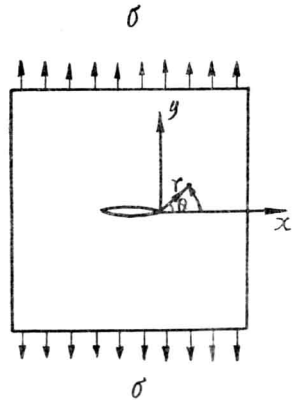


图 4

在平面应力条件下(薄平板或厚平板的表面处)

$$k = (3-\nu)/(1+\nu) \quad (11) a$$

$$w = -\frac{\nu}{E} \int (\sigma_x + \sigma_y) dz \quad (11) b$$

$$\sigma_z = 0$$

在平面应变条件下(厚平板的中心部分)

$$k = 3-4\nu \quad (12) a$$

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad (12) b$$

$$w = 0 \quad (12) c$$

其中, u 、 v 、 w 分别为 x 、 y 、 z 方向的位移。 r 、 θ 为所研究点的极坐标。 E 、 G 、 ν 分别为材料的弹性模量、剪切模量和泊松比。 k 为与 ν 有关的一个常数。在平面应力和平面应变条件下, k 与 ν 的关系式不同。

在图 4 所示“无限大”平板中, 裂缝前端附近区域的应力强度因子为:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \quad (13) \text{ a}$$

将(13)a 式与(5)式相比较, 可发现按 Irwin 的线性弹性断裂力学理论所得出的应力强度因子 k_I , 与 Griffith 理论中的裂缝扩展能量率(或“裂缝扩展力”) g_I 之间存在着如下的关系, 即:

$$g_I = \frac{k_I^2}{E} \quad (13) \text{ b}$$

或
$$K_I = \sqrt{g_I E} \quad (13) \text{ c}$$

其中 g_I 代表张开型(第 I 型)裂缝的裂缝扩展能量率(或“裂缝扩展力”)

对于其他形式的裂缝在三个不同类型的应力场的应力强度因子计算公式, 可以参看有关文献⁽⁴⁾⁽⁶⁾。这里就不赘述。至于如何用线性弹性断裂力学理论具体推导出应力强度因子, 将在后面作专题讨论。

由以上的分析可以看出裂缝端部附近的应力场的强弱程度和位移的大小都是由应力强度因子 K 来决定的。在没有弄清裂缝端部裂开的微观机理前, 人们就采用应力强度因子 K 来建立裂缝发生临界扩展(脆性断裂)的判据。这样做虽然在一定程度上掩盖了问题的物理本质, 但也不能不认为是科学发展过程中通常所走的道路。下面就介绍如何按应力强度因子来建立脆性断裂的判据以及材料的断裂韧性的概念。

(4) 按应力强度因子建立脆性断裂的判据。材料的断裂韧性

如果我们认为裂缝发生临界扩展(即发生脆性断裂)是和裂缝端部的应力场与位移有联系的话, 则可认为其应力强度因子 K 是决定脆性断裂发生与否的主要因素(因为由公式 9、10 可见裂缝端部的应力场与位移均与 K 有关), 因此, 可以按 K 值来建立脆性断裂的判据如下:

$$K_I = K_C \quad (14)$$

其中, K_I 为第一型裂缝的应力强度因子, K_C 为应力强度因子 K_I 的临界值。对于某一种材料, 在一定的条件下, K_C 应该是一个常数。理论分析及实验结果指出, 张开型的裂缝最容易产生脆性断裂; 此外, 在平面应变条件下, 由于材料处于三向拉伸的应力场中, 因此, 也较平面应力状态下, 裂缝更容易发生临界扩展。所以, 通常用具有张开型裂缝的厚板进行实验, 确定裂缝的初始尺寸和发生脆性断裂时的应力。按试件的几何尺寸和受力条件找出其相应的应力强度因子的表达式, 将上述实验结果代入此表达式中, 即可得出应力强度因子的临界值 K_{IC} (角标 I 代表第 I 型即张开型)。通常就称 K_{IC} 为材料在平面应变条件下的断裂韧性, 简称“平面应变断裂韧性”。于是, (14)式所表示的脆性断裂判据应改写为:

$$K_I = K_{IC} \quad (15)$$

应该指出, 由于一般的裂缝端部不可能全部处于平面应变状态, 所以, 实际的应力强度因子的临界值, 总比 K_{IC} 值要略大一些。这就为上述判据提供了一些储备。

以上的理论分析是建立在线性弹性模型的基础上的。实际的金属材料, 即使是超高强度钢, 都具有不同程度的延性。因此, 在裂缝前端的材料中总难免要发生塑性变形。利用上述线性弹性断裂力学的理论, 也可以对发生脆性断裂前裂缝前端具有较小的屈服区域(所谓的

● 此关系只适用于平面应力情况下。在平面应变情况下 $g_I = \frac{1-\nu^2}{E} K_I^2$, 其证明可参看文献[1] P. 18~19 及文献[6] P. 59~61。

小规模屈服)这样的问题, 作近似的估算。

(5) 在小规模屈服问题中, 对屈服区域的大小及应力强度因子的近似计算

首先来研究裂缝前端的屈服区域的形状和大小。仍以图 4 所示的裂缝模型 (第 I 型或张开型) 为例来说明。

将(9)a、(9)b 及(9)c 三式中的 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 代入材料力学中计算主应力 σ_1 、 σ_2 的公式:

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_z + \sigma_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (16)$$

并加以简化, 可得:

$$\sigma_1 = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2}\right) \quad (17) a$$

$$\sigma_2 = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2}\right) \quad (17) b$$

设所研究的问题为平面应力问题(薄平板或厚平板的表面)即 $\sigma_3 = 0$ 。要确定屈服区域的形状和大小。可利用材料力学中的第四强度理论(形状改变比能理论)的屈服判据:

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sigma_s \quad (18)$$

上式中的 σ_s 为材料在单向拉伸时的屈服极限。将(17)a和(17)b 两式中的 σ_1 、 σ_2 和 $\sigma_3 = 0$ (平面应力状态)。代入(18)式经简化后可得:

$$\frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \sqrt{\cos^2 \left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + 3 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2}\right)\right]} = \sigma_s$$

或将此式改写成:

$$r = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_s^2} \cos^2 \left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + 3 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \quad (19)$$

这就是平面应力问题中裂缝前端屈服区域边界的方程(用极坐标表示的)。将其绘成曲线, 即如图 5 中的实线所示。在 X 轴上的 r 值(即 $\theta = 0$ 处的 r 值)为:

$$r_0 = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_s^2} \quad (20)$$

对于平面应变问题, (厚平板的中心部分):

$$\sigma_3 = \sigma_2 = \nu(\sigma_1 + \sigma_2) = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \cdot 2\nu \cos \frac{\theta}{2} \quad (21)$$

将(17)a、(17)b和(21)式中的 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 代入屈服判据式(18), 经简化后可得:

$$r = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_s^2} \cos^2 \left(\frac{\theta}{2}\right) \left[(1 - 2\nu)^2 + 3 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \quad (22)$$

这就是平面应变问题中裂缝前端屈服区域边界的方程。其图象则如图 5 中的虚线所示(此处设 $\nu = 0.3$)。在 X 轴上的 r 值为:

$$r_0 = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_s^2} (1 - 2\nu)^2 \quad (23)$$

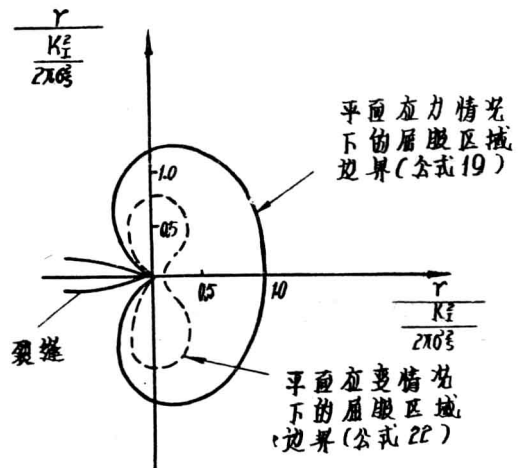


图 5

在 $\nu=0.3$ 的情况下:

$$r_0 = 0.16 \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_s^2} \quad (24)$$

对比图 5 中的两曲线可见: 在平面应变情况下, 裂缝前端的屈服区域远较在平面应力情况下的为小。这是因为在平面应变情况下, 由于沿板厚方向(Z 方向)的弹性约束而产生的第三主应力 σ_3 为拉应力, 在三向拉伸应力状态下, 材料当然是比较不容易屈服的。

在以上的讨论中没有考虑到屈服区域内的材料由于发生塑性变形而引起应力松弛的效果。在考虑这一效果后、屈服区域还将进一步扩大。下面用粗略的估算来大致确定在考虑应力松弛效果以后, 屈服区域的尺寸。其基本依据是有裂缝的平板(令其厚度 $t=1$) 在外力作用下发生局部屈服后, 其净截面上分布内力的积分(即内力)应与外力平衡。在图 6 中用虚线绘出了裂缝端部附近区域内沿净截面(X 轴)上 σ_y 的变化规律曲线。此曲线下的面积代表净截面上的内力, 它应该与外力平衡。在同一图中又用实线绘出了当材料在裂缝前端局部范围内达到屈服极限后, 附近区域中的 σ_y 变化规律曲线。(略去材料的应变硬化影响不计)。此曲线下的面积也代表净截面上的内力, 它也同样应该与外力平衡。因此, 图 6 中实线和虚线下的面积应该相等。由于 EF 和 BC 两段曲线均代表弹性应力场的变化规律, 因此, 其下的面积应该相等。于是要使 ABC 曲线下的面积等于 DEF 曲线下的面积, 就要求 AB 段曲线下的面积等于 DE 段直线下的面积, 即

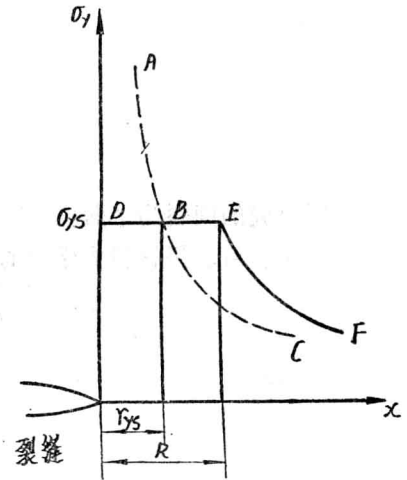


图 6

$$R \cdot \sigma_{ys} = \int_0^{r_{ys}} (\sigma_y)_{\epsilon=0} dr \quad (25)$$

其中: r_{ys} 是在 $(\sigma_y)_{\epsilon=0}$ 这一应力等于 σ_{ys} 时的 r 值。由(9)b 式可得:

$$r_{ys} = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_{ys}^2} \quad (26)$$

先来研究平面应力情况。由于在平面应力情况下材料的屈服极限与材料在单向拉伸时的屈服极限 σ_s 相等, 因此, $\sigma_{ys} = \sigma_s$ 代入(26)式即得:

$$r_{ys} = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_s^2} \quad (27)$$

由(9)b 式可得:

$$(\sigma_y)_{\epsilon=0} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}$$

代入(25)式进行积分并用(27)式所求得的 r_{ys} 作为其积分上限, 即得:

$$\int_0^{r_{ys}} (\sigma_y)_{\epsilon=0} dr = \frac{2K_I}{\sqrt{2\pi}} (r_{ys})^{-\frac{1}{2}} = \frac{K_I^2}{\pi\sigma_s}$$

代入(25)式, 并注意到 $\sigma_{ys} = \sigma_s$ 。于是可得:

$$R = \frac{1}{\sigma_s} \cdot \frac{K_I^2}{\pi \sigma_s} = \frac{K_I^2}{\pi \sigma_s^2} \quad (28)$$

将此R值与(20)式中的 r_0 相比较可发现：在考虑到屈服区域内的应力松弛后，平面应力情况下的屈服区域在X轴上扩大了一倍。较精确的解给出：

$$R = \frac{\pi}{8} \frac{K_I^2}{\sigma_s^2} \quad (29)$$

由此可见，上述粗略估算的解已足够精确了。

再来研究平面应变情况。由于在平面应变情况中， σ_3 为拉应力，裂缝前端的材料处于三向拉伸应力状态下，因此，材料的屈服极限 σ_{ys} 不再等于单向拉伸的屈服极限。根据对具有环形尖切口的圆截面试件做拉伸实验结果及理论分析可知，在这种三向拉伸应力状态下

$$\sigma_{ys} = \sqrt{2} \sqrt{2} \sigma_s \quad (30)$$

将此值代入(26)式可得平面应变情况下的 r_{ys} 为

$$r_{ys} = \frac{K_I^2}{4\sqrt{2} \pi \sigma_s^2} \quad (31)$$

再将(30)式、(31)式中的 σ_{ys} 、 r_{ys} ，代入(25)式即得：

$$R = \frac{K_I^2}{2\sqrt{2} \pi \sigma_s^2} \quad (32)$$

将上式所得的R与(24)式中的 r_0 相比较，可以看出平面应变情况下的屈服区域在考虑了应力松弛的效果后在X轴上的R值增大了好几倍。

下面再来讨论在考虑了裂缝前端屈服区域内的应力松弛效果后，如何来计算应力强度因子 K_I 。前面所介绍的计算 K_I 的方法是建立在理想的线性弹性理论的基础上的。它与裂缝端部附近区域内的弹性应力场有关。现在，由于裂缝前端出现了屈服区域引起的应力松弛，使得上述区域的弹性应力场发生了变化，因此，实际有效的 K_I 值也相应地发生了变化。此时，要计算实际有效的 K_I 值，最简便实用的办法是采用“有效裂缝尺寸”，仍利用线性弹性理论所得的公式来计算。

假设发生应力松弛的屈服区域在X轴上的尺寸为 $AB=R$ （图7），实际的应力变化规律曲线如图7上的实线DEF所示。要确定有效裂纹尺寸，其基本原理是：设想裂缝的计算边界向右移动到0点处，以使在弹性区域内按线性弹性理论所得到的应力 σ_y 变化规律（图7中的虚线）与实际应力 σ_y 变化规律（图7中的实线）基本上符合。

从而确定有效裂缝尺寸，并以此裂缝尺寸代入线性弹性理论所得到的 K_I 公式中算出实际有效的 K_I 值。要使得图7中在弹性区域内虚线所代表的与实际应力变化规律基本上符合的条件应该是：裂缝的计算边界向右移动的距离 r_y ，应使虚线所代表的应力 σ_y 变化规律曲线正好在屈服区域的边界B点处与实线中的水平线（ $\sigma = \sigma_{ys}$ ）右端相交。也就是说，在

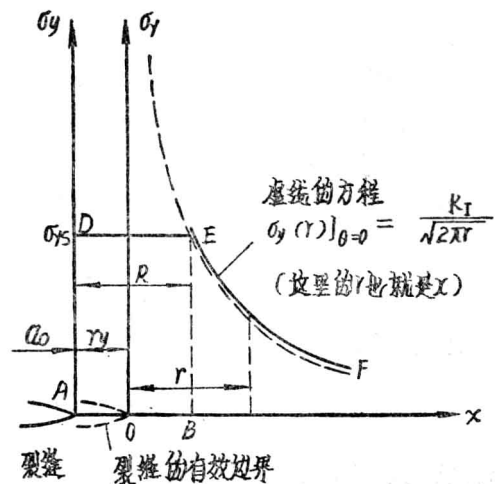


图 7

$r=R-r_y$ 处, $\sigma_y(r)|_{\theta=0}=\sigma_{ys}$, 而由(9)b 式可得:

$$\sigma_y(r)|_{\theta=0}=\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}$$

于是:

$$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi(R-r_y)}}=\sigma_{ys}$$

由此解得:

$$r_y=R-\frac{K_I^2}{2\pi\sigma_{ys}^2} \quad (33)$$

在平面应力情况下: $R=\frac{K_I^2}{\pi\sigma_s^2}$ 和 $\sigma_{ys}=\sigma_s$ 。代入(33)式可得:

$$r_y=\frac{K_I^2}{\pi\sigma_s^2}-\frac{K_I^2}{2\pi\sigma_s^2}=\frac{K_I^2}{2\pi\sigma_s^2} \quad (34)$$

在平面应变情况下: $R=\frac{K_I^2}{2\sqrt{2}\pi\sigma_s^2}$ 和 $\sigma_{ys}=\sqrt{2}\sigma_s$ 。

代入(33)式可得:

$$r_y=\frac{K_I^2}{2\sqrt{2}\pi\sigma_s^2}-\frac{K_I^2}{4\sqrt{2}\pi\sigma_s^2}=\frac{K_I^2}{4\sqrt{2}\pi\sigma_s^2}\approx\frac{K_I^2}{6\pi\sigma_s^2} \quad (35)$$

必须指出, 按上述方法来计算 r_y 只是个近似的结果, 而且, 是建立在“屈服区域很小(小规模屈服)并为周围广大弹性区域所包围”这一前提下的。对大规模屈服以至全面屈服的情况不适用。

由(34)、(35)两式可以看到: 不论是平面应力情况, 还是平面应变情况, 裂缝的计算边界都正好位于 X 轴上屈服区域的中心。平面应力情况下的 r_y 约为平面应变情况下的 r_y 的三倍。

求得 r_y 后, 即可算出裂缝的有效长度(计算长度) $2(a_0+r_y)$, 其中 $2a_0$ 为裂缝的初始长度(实际长度)。然后, 按裂缝的有效长度 $2(a_0+r_y)$ 来计算 K_I 值。

现以葛里菲斯裂缝问题为例来说明考虑了裂缝前端屈服区域影响后, 对 K_I 的表达式(见(13)a 式)应作何修正。

先研究平面应力情况。将(34)式所表达的 r_y 代入 (a_0+r_y) 并以 (a_0+r_y) 代替 a_0 , 则(13)a 式可写作:

$$K_I=\sigma\sqrt{\pi(a_0+K_I^2/2\pi\sigma_s^2)}$$

经简化后可得:

$$K_I=\sigma\sqrt{\pi a_0}\left/\sqrt{1-\frac{1}{2}(\sigma/\sigma_s)^2}\right. \quad (13) d$$

将此式与(13)a 式相比较可见, 在考虑了上述屈服区域影响后, K_I 有所增大, 其增大系数为

$$1/\sqrt{1-\frac{1}{2}(\sigma/\sigma_s)^2}。$$

对于平面应变情况, 则应将(35)式所表达的 r_y 代入 (a_0+r_y) , 于是可得:

$$K_I=\sigma\sqrt{\pi a_0}\left/\sqrt{1-\frac{1}{4\sqrt{2}}(\sigma/\sigma_s)^2}\right. \quad (13) e$$

其 K_I 的增大系数 $1/\sqrt{1-\frac{1}{4\sqrt{2}}(\sigma/\sigma_s)^2}$ 显然较平面应力情况下的为小。

必须指出, 对于不同的裂缝问题, 其 K_I 的表达式不同, K_I 的增大系数形式也不一样。

(6) 在平板表面有浅裂缝时应力强度因子的计算公式

在工程实践中经常大量碰到的不是前面所介绍的平板中有贯穿裂缝的情况, 而是在平板表面上有一些非贯穿的浅裂缝的情况。对于这种情况下如何计算应力强度因子是断裂力学中的一个很重要的课题。欧文在 1962 年利用能量法求得在均匀拉伸应力场中的平板表面上有一个张开型的半椭圆平面裂缝(图 8)时 K_I 的近似计算公式^[5]。

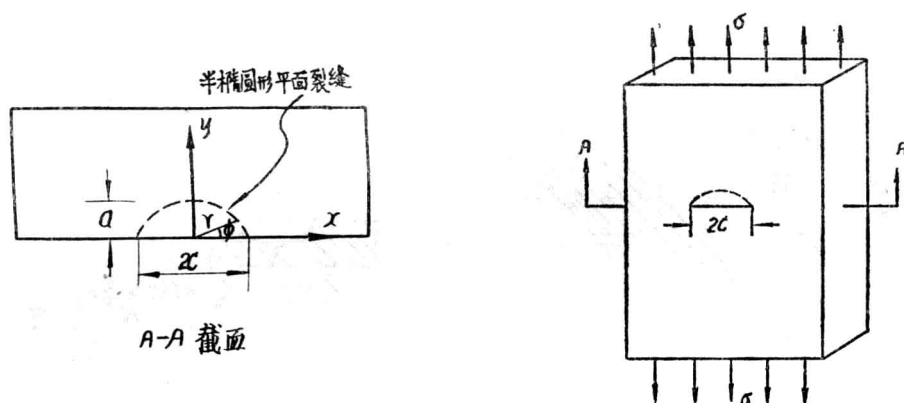


图 8

在裂缝端部完全是弹性区域的情况下, 欧文所得到的半椭圆形裂缝边缘的 K_I 计算公式为:

$$K_I = \frac{1.1\sigma\sqrt{\pi a}}{E_k} \left[\sin^2\phi + \left(\frac{a}{c}\right)^2 \cos^2\phi \right]^{\frac{1}{4}} \quad (36)$$

在 $\phi = \frac{\pi}{2}$ 处(即半椭圆短轴端点处), 裂缝最深; 同时, 该点处的应力强度因子 K_I 也最大, 因此, 是裂缝扩展的起源。所以, 对于这类裂缝, 应该用该点处的 K_I 值来建立脆性断裂的判据。将 $\phi = \frac{\pi}{2}$ 代入(36)式即得:

$$K_I = \frac{1.1\sigma\sqrt{\pi a}}{E_k} \quad (37)$$

在上式的分母中, E_k 是第二类的椭圆积分, 即:

$$E_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sin^2\phi + \left(\frac{a}{c}\right)^2 \cos^2\phi \right]^{\frac{1}{2}} d\phi \quad (38)$$

在小规模屈服的情况下, 应该考虑屈服区域内应力松弛的影响, 即以裂缝的有效长度 $(a+r_y)$ 代替(37)式中的 a 。由于裂缝的最深点在平面应变条件下, 所以, r_y 应该用平面应变条件下的计算公式(35)。将 $(a+r_y)$ 代替(37)中的 a 即得:

$$K_I^2 E_k^2 = 1.21\sigma^2\pi \left(a + \frac{K_I^2}{4\sqrt{2}\pi\sigma_s^2} \right)$$

由此解得:

$$K_I = \frac{1.1\sigma\sqrt{\pi a}}{\left[E_K^2 - 0.212\frac{\sigma^2}{\sigma_s^2}\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{1.95\sigma\sqrt{a}}{\sqrt{Q}} \quad (39)$$

其中： $Q = \left(E_K^2 - 0.212\frac{\sigma^2}{\sigma_s^2}\right)$ 是考虑了屈服区域内应力松弛效果后的裂缝形状参数，可由图9所示曲线中查出。

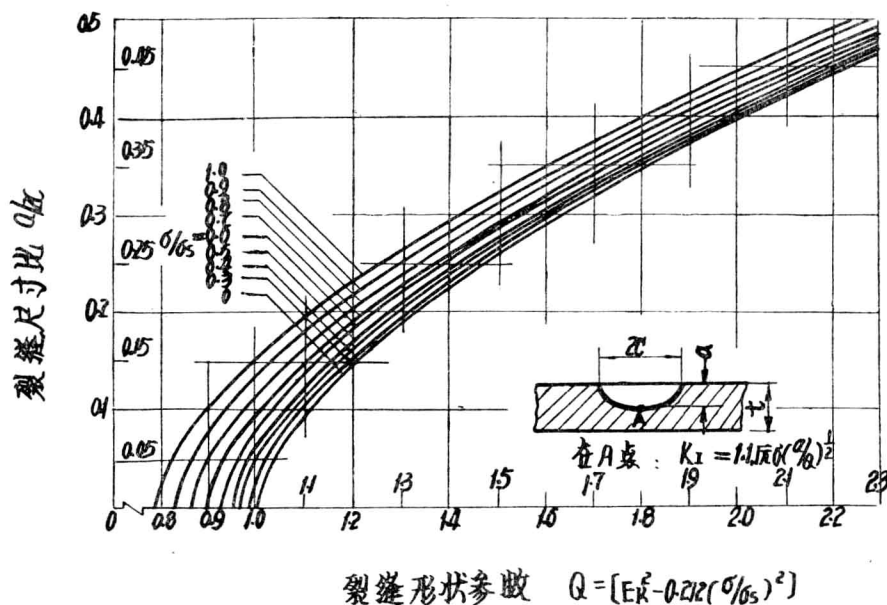


图 9

在实际情况下，平板表面的非贯穿裂缝并不是一个理想的半椭圆形，但通常仍可按(39)式对 K_I 值作近似的估算。其中， a 为裂缝的深度， $2c$ 则为裂缝的长度(注意：欧文的公式只适用于表面浅裂缝，即 a 较板厚为小的情况)。

(7) 小 结：

在这里我们着重以在均匀拉伸应力场中“无限大”的平板内具有张开型(第 I 型)裂缝的问题(通常也称之为葛里菲斯裂缝问题)，在平面应力和平面应变两种情况下为例，说明按线性弹性理论处理的断裂力学方法。这里引进的一些主要概念有：

① 裂缝扩展时的能量率或“裂缝扩展力” g_I

在葛里菲斯裂缝问题中的平面应力情况下：

$$g_I = \frac{\sigma^2 \pi a}{E}$$

在平面应变情况下， $g_I = \frac{(1-\nu^2)}{E} \sigma^2 \pi a$

② 应力强度因子 K_I

应力强度因子 K_I 实际上是表示裂缝端部附近区域内弹性应力场强弱程度的参数。因此，简称为应力强度因子。

在葛里菲斯裂缝问题中，不论是平面应力还是平面应变情况下

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a}$$

③ g_I 与 K_I 间的关系:

在平面应力情况下: $g_I = \frac{K_I^2}{E}$

在平面应变情况下: $g_I = \frac{(1-\nu^2)}{E} K_I^2$

④ 平面应变情况下的断裂韧性(K_{IC}):

K_{IC} 是材料在平面应变情况下发生脆性断裂时 K_I 的临界值, 是材料的一种固有的力学性质。

⑤ 用 g_I 来表示的材料在平面应变情况下的断裂韧性指标 g_{IC}

$$g_{IC} = \frac{(1-\nu^2)}{E} K_{IC}^2$$

⑥ 在考虑到裂缝端部屈服区域的应力松弛效果时, 裂缝的有效长度为 $2(a_0 + r_y)$, 其中,

在平面应力状态下: $r_y = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_s^2}$

在平面应变情况下: $r_y = \frac{K_I^2}{4\sqrt{2}\pi\sigma_s^2} \approx \frac{K_I^2}{6\pi\sigma_s^2}$

在计算 K_I 值时应该用 $2(a_0 + r_y)$ 代替原来的 $2a$, 也可以用 K_I 的增大系数来反映上述屈服区域的影响。

⑦ 在均匀拉伸应力场中的平板表面上有一个半椭圆形的张开型浅裂缝时, 应力强度因子的计算公式:

在不计裂缝端部屈服区域内应力松弛的影响时:

$$K_I = \frac{1.1\sigma\sqrt{\pi a}}{E_K}$$

在计及裂缝端部屈服区域应力松弛的影响时:

$$K_I = \frac{1.1\sigma\sqrt{\pi a}}{\left[E_K^2 - 0.212\frac{\sigma^2}{\sigma_s^2}\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{1.95\sigma\sqrt{a}}{\sqrt{Q}}$$

关于构件在其他受力情况和其他裂缝的几何特征下, K_I 、 K_{II} 、 K_{III} 的计算公式可以参看文献(4)及(6)。

参 考 文 献

- [1] 断裂韧性的基本原理、测试技术及应用, 北京新金属材料编辑部, 1972年8月。
- [2] 超高强度钢, 上海科学技术情报研究所, 1972年6月。
- [3] 机械设计(日), 第16卷第9期, 1972年9月。
- [4] 日本机械学会志(日), 第75卷第642期, 1972年7月。
- [5] Journal of Applied Mechanics, Vol. 29, No. 1, p. 651~654.
- [6] Fracture Toughness Testing and Its Applications, ASTM STP 381, 1965, p. 30~81.
- [7] Fracture Toughness, The Iron and Steel Institute, London, 1968.
- [8] Fracture, Vol. 3, Engineering Fundamentals and Enviromental Effects, Ed. by H. Liebowitz, 1971.
- [9] Journal of Applied Mechanics, 1939, Vol. 6, p. 491.
- [10] Journal of Applied Mechanics, 1957, Vol. 24, No. 4, p. 361.