全国高等院校创新型“十二五”重点规划教材
QUANGUO GAODENG YUANXIAO CHUANGXINXING SHIERWU ZHONGDIAN GUIHUA JIAOCAI

概率论与数理统计

主编 肖小英 唐宏伟

中南大學出版社
www.csupress.com.cn

概率论与数理统计

主　编　肖小英　唐宏伟
副主编　任海平　丁和平
　　　　曾丽华　樊振宇

中南大學出版社
www.csupress.com.cn

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/肖小英,唐宏伟主编.—长沙:中南大学出版社,2013.8

ISBN 978-7-5487-0898-8

Ⅰ.概...　Ⅱ.①肖...②唐...　Ⅲ.①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材　Ⅳ.O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第108974号

概率论与数理统计

主编　肖小英　唐宏伟

□**责任编辑**　谢贵良
□**责任印制**　文桂武
□**出版发行**　中南大学出版社
社址:长沙市麓山南路　　邮编:410083
发行科电话:0731-88876770　　传真:0731-88710482
□**印　　装**　长沙市华中印刷厂

□**开　　本**　787×1092　1/16　□**印张** 13.5　□**字数** 315千字
□**版　　次**　2013年8月第1版　□2013年8月第1次印刷
□**书　　号**　ISBN 978-7-5487-0898-8
□**定　　价**　27.00元

前　言

概率论与数理统计是研究随机现象客观规律性的数学学科，是高等院校理、工科和经济学科等专业的一门主要基础课程，也是研究生入学的考试内容.本书是根据教育部普通高等学校本科非数学专业数学基础课程教学基本要求编写的.全书共9章，内容包括随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、抽样与抽样分布、参数估计、假设检验和线性回归分析等，各章后选配了适量习题(习题中划线以下部分为往届研究生入学考试题)，并在书后附有习题答案.本书强调概率统计概念的阐释，并注意举例的多样性. 本课程的教学目标是，使学生掌握概率论与数理统计的基本概念、基本理论及相应的处理随机事件的基本思想和方法，培养学生运用概率统计方法分析和解决实际问题的能力，为后续课程的学习以及从事工程技术工作和科研工作打下必要的概率统计理论基础. 本书可作为高等学校工科、农医、经济、管理等专业的概率统计课程的教材，也可作为上述专业硕士研究生数学课程入学考试的参考书.

本书第一、二、三、四章由江西理工大学肖小英老师编写；第五、六、七章由江西农业大学唐宏伟老师编写；第七、八、九章由任海平编写，第十章以及各章习题由江西理工大学丁和平老师，江西理工大学曾丽华老师、南昌市青山湖区统计局樊振宇编写与讨论，最后全书由肖小英修改定稿，由肖小英、唐宏伟任主编，任海平、丁和平、曾丽华、樊振宇任副主编.本书在编写过程中还得到了江西理工大学南昌校区领导及数学教研组的大力支持，在此一并表示衷心感谢.

由于编者水平有限，加之时间仓促，教材中难免存在不妥之处，希望使用本书的师生和读者提出宝贵意见，使本教材得以完善.

编　者

2013年8月

目　录

第 1 章　随机事件与概率

1.1　随机事件及其运算

1.确定性现象与不确定性现象(随机现象)

自然界与人类社会生活中发生的现象是多种多样的，这些现象大体上可以分为两类：一类是确定性现象.例如：早晨太阳必然从东方升起；在一个标准大气压下，水加热到 100 摄氏度必然沸腾；两个同性电荷一定互斥；冬天过去，春天就会到来，等等.对于这类现象，其特点是：在试验之前就能断定它有一个确定的结果，即在一定条件下，重复进行试验，其结果必然出现(或必然不出现)且唯一.另一类是不确定性现象，也叫随机现象.例如：某地区的年降雨量；打靶射击时，弹着点离靶心的距离；投掷一枚均匀的硬币，可能出现“正面”，也可能出现“反面”，事先不能作出确定的判断.对于这类现象，其特点是可能的结果不止一个，即在相同条件下进行重复试验，试验的结果事先不能唯一确定.就一次试验而言，时而出现这个结果，时而出现那个结果，呈现出一种偶然性.

2.随机现象的统计规律性

对于随机现象，就每次观察而言，其结果的出现具有偶然性，事先无法判定将会出现哪种结果，但随机现象并不是不可捉摸的.人们通过大量的实践发现：在相同条件下，虽然个别试验结果在某次试验或观察中可以出现也可以不出现，但在大量重复试验或观察中，试验的结果却呈现出某种规律性，这种规律性称为统计规律性.例如：在投掷一枚硬币时，既可能出现正面，也可能出现反面，预先作出确定的判断是不可能的，但是假如硬币均匀，多次抛掷就会发现出现正面与出现反面的机会应该相等，即在大量的试验中出现正面的频率(又叫概率)应接近 50%.概率论就是研究随机现象的统计规律性的一门数学分支.这正如恩格斯所指出的：“在表面上是偶然性在起作用的地方，这种偶然性始终是受内部的隐藏着的规律支配的，而问题只是在于发现这些规律.”

1.1.1　基本概念

1.随机试验

为了研究随机现象的统计规律性，我们把各种科学试验和对某一事物的观测统称为试验.如果试验具有下述 3 个特点：

(1)试验可在相同条件下重复进行；

(2)试验的可能结果不止一个，并且事先可以明确试验所有可能出现的结果；

(3)每次试验总是恰好出现所有可能结果中的一个，但究竟出现哪一个结果，试验前不能确切预言.则称这一试验为随机试验(random trial)，通常用字母 E 或 E_1，E_2，…表示.例如：

E_1：抛一枚硬币，分别用“H”和“T”表示“正面朝上”和“反面朝上”，观察出现的结果，可能是“H”也可能是“T”；

E_2：工商管理部门抽查市场某些商品的质量，检查商品是否合格；

E_3：记录某段时间内电话交换台接到的呼唤次数，可能是 0，1，2，…；

E_4：掷一颗骰子，观察可能出现的点数. 可能是 1，2，3，4，5，6；

E_5：在一批灯泡中任取一只，观察其使用寿命.

2. 样本空间与样本点

对于随机试验，尽管在每次试验之前不能预知其试验的结果，但试验的所有可能结果所组成的集合却是已知的，我们称随机试验 E 的所有可能结果组成的集合，称为样本空间，记为 Ω. 样本空间的元素，即 E 的每个结果，称为样本点，记为 ω.

在前面所举的 5 个试验中，若以 Ω_i 表示试验 E_i 的样本空间，$i=1, 2, \cdots, 5$，则

$\Omega_1=\{H, T\}$；

$\Omega_2=\{$合格品，不合格品$\}$；

$\Omega_3=\{0, 1, 2, \cdots\}$；

$\Omega_4=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$；

$\Omega_5=\{t \mid t \geqslant 0\}$.

注：① 样本空间是一个集合，它是由样本点构成，其表示方法，可以用列举法，也可以用描述法.

② 在样本空间中，样本点可以是一维的，也可以是多维的；可以是有限个，也可以是无限个.

③ 对于一个随机试验而言，样本空间并不唯一. 在同一试验中，当试验的目的不同，样本空间往往是不同的，但通常只有一个会提供最多的信息. 例如：在运动员投篮的试验中，若试验的目的是考察命中率，则样本空间为 $\Omega=\{$中，不中$\}$；若试验的目的是考察得分情况，则样本空间为 $\Omega=\{$0 分，1 分，2 分，3 分$\}$.

3. 随机事件

随机试验 E 的样本空间 Ω 的子集称为 E 的随机事件，简称事件，通常用大写字母 A，B，C，…表示. 在每次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，称这一事件发生. 例如，在掷骰子的试验中，事件 A 表示“出现点数为偶数点”这个事件，若试验结果是“出现 4 点”，则称事件 A 发生.

特别地，由一个样本点组成的单点集，称为基本事件. 例如，试验 E_1 有两个基本事件 $\{H\}$，$\{T\}$；试验 E_4 有 6 个基本事件 $\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{4\}$，$\{5\}$，$\{6\}$.

每次试验中都必然发生的事件，称为必然事件，样本空间 Ω 包含所有的样本点，它是 Ω 自身的子集，每次试验中都必然发生，故它是一个必然事件. 因此必然事件通常也用 Ω 表示. 在每次试验中不可能发生的事件，称为不可能事件. 空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，它作为样本空间的子集，在每次试验中都不可能发生，故它是一个不可能事件. 因此不可能事件也可用 $\varnothing$ 表示. 例如，在上述掷骰子的试验中，“点数小于 7”是必然事件，“点数大于 6”是不可能事件.

严格来讲，必然事件与不可能事件反映了确定性现象，可以说它们并不是随机事件，但为了研究问题的方便，我们把它们作为特殊的随机事件.

1.1.2　事件间的关系及运算

事件是一个集合，因而事件间的关系与事件的运算可以用集合之间的关系与集合的运算来处理.

设 Ω 是试验 E 的样本空间，A，B，C，A_1，A_2，…都是事件，即 Ω 的子集.

1. 事件的包含

若事件 A 发生必有事件 B 发生，则称事件 A 包含于事件 B，或事件 B 包含事件 A，记为 $A\subset B$，或 $B\supset A$.

$A\subset B$ 的一个等价说法是，若事件 B 不发生，则事件 A 必然不会发生.

对于任一事件 A，有

(1)$A\subset A$；(2)$\varnothing\subset A\subset\Omega$；(3)若 $A\subset B$，$B\subset C$，则 $A\subset C$.

若 $A\subset B$，且 $B\subset A$，则称 A 与 B 相等，记为 $A=B$.

2. 事件的并(和)

表示“事件 A 与 B 中至少有一个发生”的事件，称为事件 A 与事件 B 的并(和)，记为 $A\cup B$. 对于任一事件 A 和 B，有

(1)$A\cup A=A$；(2)$A\subset A\cup B$，$B\subset A\cup B$；

(3)若 $A\subset B$，则 $A\cup B=B$；(4)$A\cup\Omega=\Omega$，$A\cup\varnothing=A$.

事件之间的和运算可以推广到有限个和可列无穷多个事件的情形.

$$A=\bigcup_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n,$$

表示“A_1，A_2，…，A_n中至少有一个事件发生” 这一事件.

$$A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots,$$

表示“A_1，A_2，…，A_n，… 中至少有一个事件发生” 这一事件.

3. 互不相容事件(互斥事件)

表示“事件 A 与 B 不能同时发生”的事件，称事件 A 与 B 为互不相容，或互斥，记为 $AB=\varnothing$.

显然有：(1)基本事件是两两互不相容的；(2)$\varnothing$与任意事件是互不相容的.

以后把互斥的事件 A 与 B 的并，记为 $A+B$.

若 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 中任意两个事件互斥，即 $A_iA_j=\varnothing(1\leqslant i<j\leqslant n)$，则称这 n 个事件互斥. 以后把 n 个互斥的事件 A_1，A_2，…，A_n 的并记作 $A_1+A_2+\cdots+A_n$.

4. 事件的交(积)

表示“事件 A 与 B 同时发生”的事件，称为事件 A 与事件 B 的交(积)，记为 $A\cap B$(AB). 对于任一事件 A 和 B，有

(1)$A\cap B\subset A$，$A\cap B\subset B$；

(2)若 $A\subset B$，则 $A\cap B=A$，特别地 $A\Omega=A$；

(3)若 A 与 B 互斥，则 $AB=\varnothing$，特别地$\varnothing A=\varnothing$.

事件之间的积运算也可以推广到有限个和可列无穷多个事件的情形.

$A=\bigcap_{i=1}^{n}A_i$ 或 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 或 $A_1A_2\cdots A_n$，

表示“A_1，A_2，…，A_n n 个事件同时发生”这一事件.

$A=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 或 $A_1\cap A_2\cap\cdots$ 或 $A_1A_2\cdots$，

表示“A_1，A_2，…，A_n，… 可数无穷多个事件同时发生”这一事件.

5.事件的差

表示“事件 A 发生而事件 B 不发生”的事件，称为事件 A 与事件 B 的差，记为 $A-B$.

显然有：(1)若 $A\subset B$，则 $A-B=\varnothing$；

(2)若 A 与 B 互斥，则 $A-B=A$，$B-A=B$；

(3)$A-B=A-AB$(证明：利用 $A-B\subset A-AB$ 且 $A-AB\subset A-B$)；

(4)$A-(B-C)\neq A-B+C$(左边为 A 的子事件，而右边不是).

6.事件的逆(对立事件)

当 $AB=\varnothing$ 且 $A\cup B=\Omega$，则称事件 A 与 B 互为逆事件(对立事件).A 的对立事件记为 $\overline{A}$，$\overline{A}$ 是由所有不属于 A 的样本点组成的事件，它表示“A 不发生”这样一个事件.显然有：

(1)$A\cup\overline{A}=\Omega$，$A\cap\overline{A}=\varnothing$；

(2)$\overline{\overline{A}}=A$，$A\overline{A}=\varnothing$，$A+\overline{A}=\Omega$；

(3)$A-B=A\overline{B}$，(证明：$A-B=A-AB=A(\Omega-B)=A\overline{B}$).

互逆事件与互斥事件的区别：

互逆必定互斥，互斥不一定互逆；互逆只在样本空间只有两个事件时存在，互斥还可在样本空间有多个事件时存在.例如，在抛硬币的试验中，设 A={出现正面}，B={出现反面}，则 A 与 B 互斥且 A 与 B 互为对立事件；而在掷骰子的试验中，设 A={出现 1 点}，B={出现 2 点}，则 A 与 B 互斥，但 A 与 B 不是对立事件.

若用平面上某个矩形区域表示样本空间 Ω，矩形区域内的点表示样本点，则上述事件的关系及运算可以用集合图形直观地表示出来，见下图 1－1 所示.

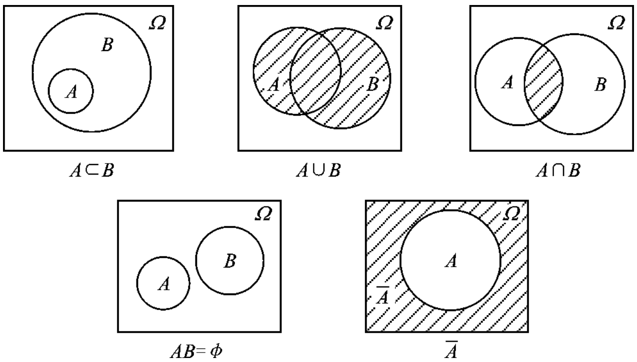

图 1－1

1.1.3 事件的运算性质(规律)

与集合的运算规律相对应，在进行事件的运算时，经常用到下面的运算规律.

1.交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

2. 结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$；

3. 分配律：$A\cap(B\cup C)=(AB)\cup(AC)$，$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

4. $A-B=A\overline{B}=A-AB$；

5. 对有穷个或可数无穷个事件，恒有

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i},\quad \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}\quad \text{（和的逆＝逆的积）；}$$

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i},\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}\quad \text{（积的逆＝逆的和）.}$$

事件的关系及运算与集合的关系及运算的对照表 1－1

表 1－1

记号	概率论	集合论
Ω	样本空间，必然事件	全集
$\varnothing$	不可能事件	空集
ω	样本点（基本事件）	元素
A	事件	子集
$\overline{A}$	A 的对立事件（逆事件）	A 的集
$A\subset B$	事件 A 发生必有事件 B 发生	A 是 B 的子集
$A=B$	事件 A 与事件 B 等价	A 与 B 相等
$A\cup B$	事件 A 与 B 至少有一个发生	A 与 B 的并集
$A\cap B$	事件 A 与 B 同时发生	A 与 B 的交集
$A-B$	事件 A 发生而事件 B 不发生	A 与 B 之差
$AB=\varnothing$	事件 A 与 B 互不相容（互斥事件）	A 与 B 没有公共元素

例 1.1.1　设 A，B，C 为任意三个事件，试用 A，B，C 的运算关系表示下列各事件：

（1）三个事件中至少一个发生　　$A\cup B\cup C$；

（2）没有一个事件发生　　$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}=\overline{A\cup B\cup C}$；

（3）恰有一个事件发生　　$A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$；

（4）至多有两个事件发生

$(A\overline{B}C\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC)\cup(A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C)\cup\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}=\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$；

（5）至少有两个事件发生　　$AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC=AB\cup BC\cup CA$.

例 1.1.2　以 A，B，C 分别表示某城市居民订阅日报、晚报和体育报. 试用 A，B，C 表示以下事件：

（1）只订阅日报；　　（2）只订日报和晚报；

（3）只订一种报；　　（4）正好订两种报；

（5）至少订阅一种报；　　（6）不订阅任何报；

（7）至多订阅一种报；　　（8）三种报纸都订阅；

（9）三种报纸不全订阅.

解 (1)$A\overline{B}\,\overline{C}$；(2)$AB\overline{C}$；(3)$A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$；(4)$AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$；(5)$A+B+C$；(6)$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$；(7)$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}B\,\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}$ 或 $\overline{A}\,\overline{B}+\overline{A}\,\overline{C}+\overline{B}\,\overline{C}$；(8)$ABC$；(9)$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$.

1.2 随机事件的概率

随机事件在一次试验中，可能发生也可能不发生，具有偶然性.但是，人们从实践中认识到，在相同的条件下，进行大量的重复试验，试验的结果具有某种内在的规律性，即随机事件发生的可能性大小是可以比较的，是可以用一个数字进行度量的.例如，在投掷一枚均匀的骰子试验中，事件 A 表示“掷出偶数点”，事件 B 表示“掷出 2 点”，显然事件 A 比事件 B 发生可能性要大.

对于一个随机试验，我们不仅要知道它可能出现哪些结果，更重要的是研究各种结果发生的可能性的大小，从而揭示其内在的规律.

概率就是随机事件发生的可能性大小的数量表征.对于事件 A，通常用 $P(A)$来表示事件 A 发生的可能性大小，即 A 发生的概率.为讨论事件 A 的概率，我们首先引入频率的概念.

1.2.1 频率

定义 1.2.1 设在相同的条件下，重复进行了 N 次试验，若随机事件 A 在 N 次试验中发生了 n 次，则比值$\frac{n}{N}$称为事件 A 在这 N 次试验中发生的频率，记为 $f_N(A)=\frac{n}{N}$.

频率有如下性质：

(1)非负性：对任意事件 A，有 $f_N(A)\geqslant 0$；

(2)规范性：$f_N(\Omega)=1$；

(3)可加性：若事件 A 与 B 互不相容，则

$$f_N(A\cup B)=f_N(A)+f_N(B).$$

一般地，若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容，则

$$f_N\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} f_N(A_i).$$

事件 A 发生的频率 $f_N(A)$表示 A 发生的频繁程度，频率大，事件 A 发生就频繁，在一次试验中，A 发生的可能性也就大，反之亦然.也就是说频率在一定程度上反映了随机事件发生的可能性的大小.但是，由于试验的随机性，即对同样的 N 所得的 $f_N(A)$的值也不一定相同.但大量实验证实，随着重复试验次数 N 的增加，频率 $f_N(A)$会逐渐稳定于某个常数附近，而偏离的可能性很小.频率具有“稳定性”这一事实，说明了刻画事件 A 发生的可能性大小的数——概率具有一定的客观存在性.我们来看下面的例子.

考虑“抛掷硬币”试验.我们把一枚硬币抛掷 50 次、500 次，各做 5 遍，其结果记录在表 1－2 里，表中 N 表示抛掷次数，n 表示出现“正面朝上”的次数，$\frac{n}{N}$是事件“正面朝上”发生的频率.

表 1－2

试验序号	$N=50$		$N=500$	
	n	$\frac{n}{N}$	n	$\frac{n}{N}$
1	22	0.44	251	0.502
2	25	0.50	249	0.498
3	21	0.42	256	0.512
4	24	0.48	253	0.506
5	18	0.36	251	0.502

表 1－3 是历史上著名的“抛掷硬币”试验的结果.

表 1－3

试验者	掷硬币次数 N	出现正面次数 n	$f_N(A)$
D. Mogen	2048	1061	0.5181
Buffon	4040	2048	0.5069
K. Pearson	12000	5981	0.4984
K. Pearson	24000	12012	0.5005

从上述数据可以看出：

频率具有随机波动性，即对同样的 N 所得的 $f_N(A)$不尽相同. 但随着 N 的增大，频率 $f_N(A)$呈现出“稳定性”，即当 N 逐渐增大时，$f_N(A)$总是在 0.5 附近摆动，并逐渐稳定于 0.5.

每个事件都存在一个这样的常数与之对应，因而可将频率 $f_N(A)$在 N 无限增大时逐渐趋向稳定的这个常数定义为事件 A 发生的概率，这就是概率的统计定义.

定义 1.2.2　在相同的条件下，独立重复地做 N 次试验，当试验次数 N 很大时，如果某事件 A 发生的频率 $f_N(A)$稳定地在$[0, 1]$上的某一数值 p 附近摆动，而且一般来说随着试验次数的增多，这种摆动的幅度会越来越小，则称数值 p 为事件 A 发生的概率，记为$P(A)=p$.

概率的统计定义一方面肯定了任一事件的概率是存在的；另一方面又给出了一个近似计算概率的方法，在很多实际问题中，当概率不易求出时，往往就是这样做的. 例如，要预测足球比赛的最后输赢，就需要知道每个足球队的获胜几率，也就是获胜概率，这个概率只能通过以往的比赛情况计算频率作为近似值. 但其不足之处是要进行大量的重复试验. 在实际中，我们不可能对每一个事件都做大量的试验，况且我们不知道 N 取多大才行. 如果 N 取很大，不一定能保证每次试验的条件都完全相同. 而且也没有理由认为，取试验次数为 $N+1$ 来计算频率，总会比取试验次数为 N 来计算频率将会更准确、更逼近所求的概率.

为了理论研究的需要，我们从频率的稳定性和频率的性质出发，给出度量事件发生的可能性大小的量——概率的定义及性质.

1.2.2 概率的公理化定义

定义 1.2.3 设 E 为随机试验，Ω 是它的样本空间，对于 E 的每一个事件 A 赋予一个实数，记为 $P(A)$，如果集合函数 $P(\cdot)$满足下列条件：

公理一 非负性：对于每一个事件 A，$P(A)\geqslant 0$；

公理二 规范性：$P(\Omega)=1$；

公理三 可列可加性：对于两两互斥的事件 A_1，A_2，…，A_n，…，即 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j)$，有

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n),$$

则称实数 $P(A)$ 为事件 A 的概率(probability).

由概率的公理化定义，可以推出概率的一些性质.

性质 1 不可能事件 $\varnothing$ 的概率为 0，即 $P(\varnothing)=0$.

证 令 $A_n=\varnothing(n=1,2,\cdots)$，则

$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\varnothing$，且 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j,i,j=1,2,\cdots)$. 由概率的可列可加性，得

$$P(\varnothing)=P(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(\varnothing),$$

而由 $P(\varnothing)\geqslant 0$，故 $P(\varnothing)=0$.

这个性质说明：不可能事件的概率为 0. 但逆命题不一定成立.

性质 2 有限可加性，若 A_1，A_2，…，A_n 为两两互斥事件，即 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j)$，则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

证明 令 $A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\varnothing$，则 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j,i,j=1,2,\cdots)$ 时，因为

$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\bigcup_{i=1}^{n}A_i\cup\varnothing\cup\varnothing\cup\cdots$，由可列可加性，得

$$\begin{aligned}P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)&=P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\cup\varnothing\cup\cdots)=P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)\\&=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)=P(A_1)+\cdots+P(A_n)+P(\varnothing)+\cdots\\&=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).\end{aligned}$$

性质 3 设 A，B 是两个事件，$P(B-A)=P(B)-P(BA)$.

证明 由 $B=(B-A)\cup BA$ 且$(B-A)\cap BA=\varnothing$，得

$$P(B)=P((B-A)\cup BA)=P(B-A)+P(BA).$$

若 $A\subset B$，则有 $P(B-A)=P(B)-P(A)$；$P(B)\geqslant P(A)$.

事实上，由 $A\subset B$，得 $B=A\cup(B-A)$，且 $A(B-A)=\varnothing$，由概率的有限可加性，得

$$P(B)=P(A\cup(B-A))=P(A)+P(B-A),\text{ 即}$$

$$P(B-A)=P(B)-P(A);$$

又由 $P(B-A)\geqslant 0$，得 $P(B)\geqslant P(A)$.

性质 4　对于任一事件 A，有　$P(A)\leqslant 1$.

因为 $A\subset\Omega$，由性质 3 得 $P(A)\leqslant P(\Omega)=1$.

性质 5　对于任一事件 A，有

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

证明　因为 $A\cup\overline{A}=\Omega$，$A\cap\overline{A}=\varnothing$，由有限可加性，得

$$P(A)+P(\overline{A})=P(A\cup\overline{A})=P(\Omega)=1，即$$

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

性质 6　对于任意的两个事件 A，B 有

$$P(A\cup B)=P(A)+P((B)-P(AB).$$

特别，若 A 与 B 互斥，则有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

证明　因为 $A\cup B=A\cup(B-AB)$且 $A\cap(B-AB)=\varnothing$，$AB\subset B$，故

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

上述公式通常称为概率加法公式，概率加法公式可以推广到多个事件的情形. 如对于任意三个事件 A，B，C，有

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC).$$

一般地，若 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$为任意 n 个事件，则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

例 1.2.1　设 $P(A)=\frac{1}{3}$，$P(B)=\frac{1}{2}$，试就以下三种情况分别求 $P(B\overline{A})$：

(1)$AB=\varnothing$；(2)$A\subset B$；(3)$P(AB)=\frac{1}{8}$.

解　(1)$P(B\overline{A})=P(B-AB)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{2}$；

(2)$P(B\overline{A})=P(B-A)=P(B)-P(A)=\frac{1}{6}$；

(3)$P(B\overline{A})=P(B-AB)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$.

例 1.2.2　设 A，B 为随机事件，且 $P(A)=0.7$，$P(A-B)=0.3$，求 $P(\overline{AB})$.

解　$P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-[P(A)-P(A-B)]=1-[0.7-0.3]=0.6$.

例 1.2.3　设 A，B，C 为三事件，且 $P(A)=P(B)=\frac{1}{4}$，$P(C)=\frac{1}{3}$ 且 $P(AB)=P(BC)=0$，$P(AC)=\frac{1}{12}$. 求 A，B，C 至少有一事件发生的概率.

解　$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{12}=\frac{3}{4}.$$

1.2.3　古典概率

定义 1.2.4　若随机试验 E 满足如下条件：