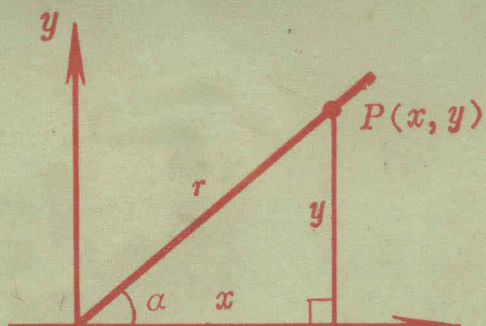
义务教育初级中学

数学

补充教材

（暂用本）

人民教育出版社数学室 编著



人民教育出版社 出版

义务教育初级中学

数　学

补充教材

（暂　用　本）

人民教育出版社数学室　编著

人民教育出版社　出版

(京)新登字 113 号

义务教育初级中学

数　　学

补充教材

(暂 用 本)

人民教育出版社数学室　编著

*

人民教育出版社出版

新华书店总店科技发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 787×1092　1/32　印张 5.625　字数 93,000

1992 年 4 月第 1 版　1992年10月第 1 次印刷

印数　1—110,000

ISBN 7-107-01416-1

G·2826(课)定价1.25元

说　明

1. 由于《九年制义务教育全日制初级中学数学教学大纲(初审稿)》与《全日制中学数学教学大纲(修订本)》的初中部分相比,教学时数和教学内容略有减少,义务教育教材试验班的初中毕业生继续升入高中时,需要解决两种大纲内容差异带来的衔接问题.为此,国家教委委托我社编写这本补充教材,供试验义务教育初中数学教材的学校选用.

2. 本书按需要补充的内容分节编写,代数内容在前,几何内容在后.编写时注意了前后各节间的顺序与呼应,并注意了与试验班已学内容的联系.

3. 本教材编写时较多保留按《全日制中学数学教学大纲(修订本)》编写的通用教材的讲法及例题、习题,以便教学.

4. 本书编者是吕学礼,责任编辑是许缦阁、颜其鹏.

人民教育出版社数学室

1992 年 4 月

目　录

❶ 本节移到高中代数“对数函数”之前学习.

1. 多项式除以多项式

关于多项式的运算，我们学过了多项式的加减法，多项式的乘法和因式分解，以及多项式的除法中的单项式除以单项式，多项式除以单项式.

现在来学习多项式除以多项式.

两个多项式相除，可以先把这两个多项式都按照同一字母降幂排列，然后仿照两个多位数相除的演算方法，用竖式进行演算. 例如，我们来计算

$$(7x+2+6x^2)\div(2x+1).$$

把两个多项式按 x 的降幂排列，上式成

$$(6x^2+7x+2)\div(2x+1).$$

仿照 $672\div21$，演算如下：

$$\begin{array}{r} 3\ 2 \\ 21\overline{)6\ 7\ 2} \\ \underline{6\ 3\ \ \ } \\ 4\ 2 \\ \underline{4\ 2} \\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rrl} & 3x+2 & \leftarrow\text{商式} \\ \text{除式}\rightarrow 2x+1 & \overline{)6x^2+7x+2} & \leftarrow\text{被除式} \\ & \underline{6x^2+3x\ \ \ \ \ } & \\ & 4x+2 & \\ & \underline{4x+2} & \\ & 0 & \leftarrow\text{余式} \end{array}$$

$\therefore\quad (7x+2+6x^2)\div(2x+1)=3x+2.$

演算的步骤是：

1\. 用除式的第一项 $2x$ 去除被除式的第一项 $6x^2$，

得商式的第一项 $3x$;

2. 用商式的第一项 $3x$ 去乘除式，把积 $6x^2+3x$ 写在被除式下面(同类项对齐)，从被除式中减去这个积,得 $4x+2$;

3. 把 $4x+2$ 当作新的被除式,再按照上面的方法继续演算,直到余式是零,或余式的次数低于除式的次数为止.

例 1 计算$(5x^2+2x^3-1)\div(1+2x)$.

解:

$$
\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{r}{x^2+2x-1} \\
\cline{2-2}
2x+1 & 2x^3+5x^2\qquad\quad -1 \\
 & 2x^3+\ \ x^2 \\
\cline{2-2}
 & \qquad 4x^2\qquad\quad -1 \\
 & \qquad 4x^2+2x \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad -2x-1 \\
 & \qquad\qquad -2x-1 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad\ \ 0
\end{array}
$$

$\therefore\quad (5x^2+2x^3-1)\div(1+2x)=x^2+2x-1.$

注意 按照 x 的降幂排列,如果有缺项,要留出空位,也可用加零的办法补足缺项.例如,把 $2x^3+5x^2-1$ 写成 $2x^3+5x^2+0-1$.

例 1 的余式为零. 如果一个多项式除以另一个多项式的余式为零，我们就说这个多项式能被另一个多项式**整除**,或另一个多项式能整除这个多项式.

整式除法也有不能整除的情况，按照某个字母降幂排列的整式除法，当余式不是零而余式的次数低于除式的次数时，除法演算就不能继续进行了，这说明除式不能整除被除式.

例 2 计算$(2x^3+9x^2+3x+5)\div(x^2+4x-3)$.

解:

$$
\begin{array}{r@{}l}
 & 2x+1 \\
x^2+4x-3\,\big) & \overline{2x^3+9x^2+3x+5} \\
 & 2x^3+8x^2-6x \\ \cline{2-2}
 & \phantom{2x^3+{}}x^2+9x+5 \\
 & \phantom{2x^3+{}}x^2+4x-3 \\ \cline{2-2}
 & \phantom{2x^3+9x^2+{}}5x+8
\end{array}
$$

$\therefore$ 商式$=2x+1$，余式$=5x+8$.

我们知道，整数相除，有时不能整除，带有余数，例如，

$$
\begin{array}{r@{}r}
 & 37 \\
21\,\big) & \overline{785} \\
 & 63 \\ \cline{2-2}
 & 155 \\
 & 147 \\ \cline{2-2}
 & 8
\end{array}
$$

在数的带余除法中，有下面的关系：

$$
\begin{array}{ccccccc}
785 & = & 21 & \times & 37 & + & 8. \\
\updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\
\text{被除数} & & \text{除数} & & \text{商数} & & \text{余数}
\end{array}
$$

与数的带余除法类似，在上面的例 2 中，也有下面的关系：

$$\underbrace{(2x^3+9x^2+3x+5)}_{\text{被除式}} = \underbrace{(x^2+4x-3)}_{\text{除式}}\underbrace{(2x+1)}_{\text{商式}} + \underbrace{(5x+8)}_{\text{余式}}.$$

一般地，被除式、除式、商式及余式之间有下面的关系：

$$\textbf{被除式}=\textbf{除式}\times\textbf{商式}+\textbf{余式}.$$

例 3 已知 $x^4+x^3-12x^2+ax+b$ 能被 x^2-3x+2 整除，求 a 和 b.

解： 两式相除：

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2+4x-2 \\ \hline
x^2-3x+2 & x^4+x^3-12x^2+ax+b \\
 & x^4-3x^3+2x^2 \\ \hline
 & 4x^3-14x^2+ax \\
 & 4x^3-12x^2+8x \\ \hline
 & -2x^2+(a-8)x+b \\
 & -2x^2+6x-4 \\ \hline
 & (a-14)x+(b+4)
\end{array}$$

整除时余式为零，得

$$a-14=0,\ b+4=0.$$

解得: $\quad a=14,\ b=-4.$

习 题 一

1. 计算:

(1) $(8x^2+53x-21)\div(x+7)$;

(2) $(1+x^2+x^4)\div(x^2+1-x)$;

(3) $(x^4-x^3+3x^2+7x-10)\div(x^2-x+5)$;

(4) $(2y^4-y^3+y-3)\div(3-2y+y^2)$.

2. 已知除式、商式及余式,求被除式:

(1) 除式 $=3x-5$, 商式 $=2x+7$, 余式 $=10$;

(2) 除式 $=6x^2+3x-5$, 商式 $=4x-5$, 余式 $=x-8$.

3. 已知 $2x^4-5x^3-11x^2+ax+b$ 能被 x^2-3x-2 整除, 求 a 和 b.

4. 已知 $A=x^3-7x+6, B=x^2+2x-3, C=x^2+x-6$. 计算:

(1) $A\div(B-C)$;

(2) $A\div B-A\div C$.

2. 一些高次方程、分式方程和无理方程

我们学过一元一次方程和一元二次方程的解法. 还学过把一些简单的分式方程、无理方程化成一元一次方程或一元二次方程来解的方法. 有些简单的高次方程和其他一些简单的分式方程、无理方程,也可化成一元一次方程或一元二次方程来解. 现举例如下.

例 1 解方程 $2x^4+x^2-6=0$.

解: 设 $x^2=y$,那么 $x^4=y^2$,于是原方程化成

$$2y^2+y-6=0.$$

解这个方程,得

$$y_1=-2,\ y_2=\frac{3}{2}.$$

当 $y=-2$ 时,$x^2=-2$,这个方程无解.

当 $y=\frac{3}{2}$ 时,$x^2=\frac{3}{2}$,

$$\therefore \qquad x=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

所以原方程有两个根

$$x_1=\frac{\sqrt{6}}{2}, \quad x_2=-\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

像例 1 那样，只含有未知数的偶次项的一元四次

方程，叫做**双二次方程**．这类方程，通常可用换元法来解，即用辅助未知数 y 代替方程里的 x^2，使这个双二次方程变为关于 y 的一元二次方程．求出 y 的值后，就可进一步求出原方程的根．

换元法有时可以把比较复杂难解的问题转化为比较简单易解的问题．

例 2　解方程 $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=120$．

分析：为了利用换元法，可以把 $x-1$ 与 $x-4$ 相乘，$x-2$ 与 $x-3$ 相乘，使所得的积中含未知数的部分相同．

解：原方程可以改写为

$$(x-1)(x-4)(x-2)(x-3)=120,$$

即

$$(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)=120.$$

设 $x^2-5x=y$，那么上面的方程成为

$$(y+4)(y+6)=120,$$

即

$$y^2+10y+24=120.$$

解这个方程，得

$$y_1=6, y_2=-16.$$

当 $y=6$ 时，有 $x^2-5x=6$，解得

$$x_1=6, x_2=-1.$$

当 $y=-16$ 时，有 $x^2-5x=-16$，这个方程无解．

所以原方程有两个根

$$x_1=6, x_2=-1.$$

例3 解方程 $\frac{2(x^2+1)}{x+1}+\frac{6(x+1)}{x^2+1}=7.$

分析:这个方程左边两个分式中的$\frac{x^2+1}{x+1}$与$\frac{x+1}{x^2+1}$互为倒数,根据这个特点,可以用换元法来解.

解:设$\frac{x^2+1}{x+1}=y$,那么$\frac{x+1}{x^2+1}=\frac{1}{y}$,于是原方程变为

$$2y+\frac{6}{y}=7.$$

解这个方程,得

$$y_1=2,\ y_2=\frac{3}{2}.$$

当$y=2$时,$\frac{x^2+1}{x+1}=2$,解得

$$x=1\pm\sqrt{2}.$$

当$y=\frac{3}{2}$时,$\frac{x^2+1}{x+1}=\frac{3}{2}$,解得

$$x=\frac{3\pm\sqrt{17}}{4}.$$

检验:把$x=1\pm\sqrt{2}$,$x=\frac{3\pm\sqrt{17}}{4}$分别代入原方程的分母,各分母都不等于零,所以它们都是原方程的根.

从而原方程的根是

$$x_1=1+\sqrt{2},x_2=1-\sqrt{2},$$

$$x_3=\frac{3+\sqrt{17}}{4},\ x_4=\frac{3-\sqrt{17}}{4}.$$

例 4 解方程 $\sqrt{3x+4}-\sqrt{x-3}=\sqrt{2x-5}.$

分析:把$\sqrt{x-3}$ 移到方程右边，可使两边平方后各边含 x 的项相同,从而容易消去.

解: 移项,得

$$\sqrt{3x+4}=\sqrt{2x-5}+\sqrt{x-3}.$$

两边平方,得

$$3x+4=2x-5+2\sqrt{(2x-5)(x-3)}+x-3,$$

即
$$\sqrt{(2x-5)(x-3)}=6.$$

两边再平方,得

$$2x^2-11x+15=36,$$

即
$$2x^2-11x-21=0.$$

解这个方程,得

$$x_1=7,\ x_2=-\frac{3}{2}.$$

检验:把 $x=7$ 代入原方程,两边相等.

把 $x=-\frac{3}{2}$代入原方程,根式无意义,

$\therefore\ \ x=-\frac{3}{2}$是增根.

因此原方程的根是 $x=7$.

注意 解分式方程和无理方程时，变形后的方程的根可能是增根，因此，检验(必须代入原方程)是解分式方程和无理方程的必要步骤.

习 题 二

1. 解下列高次方程:

(1) $5x^3-6x^2+x=0$;

(2) $3x^4-2x^2-1=0$;

(3) $(x^2+2x)^2-14(x^2+2x)-15=0$;

(4) $(x+1)(x+3)(x+4)(x+6)=72$.

2. 解下列分式方程:

(1) $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2-5\left(\frac{x}{x-1}\right)+6=0$;

(2) $\frac{3x}{x^2-1}+\frac{x^2-1}{3x}=\frac{5}{\ }$;

(3) $2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=1$.

3. 解下列无理方程:

(1) $2x^2+3x-5\sqrt{2x^2+3x+9}+3=0$;

(2) $\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}+\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}=\frac{5}{2}$;

(3) $\sqrt{3x+1}+\sqrt{4x-3}-\sqrt{5x+4}=0$.

3. 一些二元二次方程组

关于二元二次方程组，我们学过由一个二元二次方程和一个二元一次方程组成的方程组的解法，以及由一个二元二次方程和一个可以分解为两个二元一次方程的方程组成的方程组的解法．这里再举例说明一些简单的由两个二元二次方程组成的方程组的解法．

例 1 解方程组

$$\begin{cases} x^2+2xy+y^2=9, & (1) \\ (x-y)^2-3(x-y)+2=0. & (2) \end{cases}$$

分析：这个方程组的每一个方程都可以化为两个二元一次方程．把由(1)化得的每一个二元一次方程分别与由(2)化得的两个二元一次方程进行组合，一共可以得到四个二元一次方程组．解这四个二元一次方程组，就可得到原方程组的所有的解．

解： 由(1)，得

$$(x+y)^2=9,$$

$\therefore\quad x+y=3$，或 $x+y=-3$．

由(2)，得

$$[(x-y)-1][(x-y)-2]=0,$$