北京大学研究生院策划

北大版

研究生入学考试 2005

微积分

范培华 刘书田 编著

北京大学出版社

2005年研究生入学考试应试指导丛书

微　积　分

范培华　刘书田　编著

北京大学出版社
·北　京·

图书在版编目(CIP)数据

微积分/范培华,刘书田编著.—北京:北京大学出版社,2004.3
(2005年研究生入学考试应试指导丛书)
ISBN 7-301-04482-8

Ⅰ.微…　Ⅱ.①范…　②刘…　Ⅲ.微积分-研究生-入学考试-自学参考资料　Ⅳ.O172

内 容 简 介

本书是经济、管理类硕士研究生入学考试科目“微积分”复习指导书.本书作者多年来一直参加有关考研数学试卷的命题、阅卷和考研辅导班的教学,深知考生的疑难与困惑.作者把他们的教学经验结合考生的考试实际加以细化、归纳和总结,整理成书奉献给广大读者,旨在提高考研者的数学水平与考试成绩.

本书紧扣数学三、四的考试大纲,贴切考试实践,内容丰富.作者根据2003年经济管理类考生考研实践,对本书内容、结构作了修订.全书共分两篇:第一篇考试要求与内容要点;第二篇解题思路导读与典型例题分析.第一篇分八章讲述考试大纲中的考试要求与内容要点(重要定义、定理及公式);第二篇共分九讲,每讲中按考试内容第一部分给出综述和解题思路导读,第二部分进行典型例题分析,每讲末给出自测练习题及答案与提示.本书概念叙述简洁,解题思路清晰,对典型例题从多侧面、不同角度、用多种解法进行讲解,注重对考生基本概念的理解和综合解题能力的训练,是考研者较好的复习指导书和良师益友.

本书可作为经济、管理类硕士研究生入学考试数学考试科目“微积分”的复习指导书,也可作为理工科考研者的复习参考书.对于在校的经济类及管理类大学生、大专生及自学考试者,本书也是一本较好的学习用书.

书　　名:微积分
著作责任者:范培华　刘书田　编著
责 任 编 辑:刘　勇
标 准 书 号:ISBN 7-301-04482-8/G·0566
出　版　者:北京大学出版社
地　　　址:北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　　址:http://cbs.pku.edu.cn
电　　　话:邮购部 62757515　发行部 62750672　理科编辑部 62752021
电 子 信 箱:zpup@pup.pku.edu.cn
印　刷　者:
发　行　者:北京大学出版社
经　销　者:新华书店
787×1092　16开本　18.25印张　490千字
2001年5月第2版　2004年3月第2次修订
2004年3月第3次印刷
定　　　价:25.00元

前言

为了帮助有志攻读硕士研究生的广大考生能在较短的时间内全面、系统地复习有关的数学内容，我们根据教育部制定的“全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”的有关要求，结合我们多年参加数学考研及有关考试的命题、阅卷和辅导积累的经验，编写了这套数学《2005年研究生入学考试应试指导丛书》，其中包括复习指导书：《高等数学(工学类)》、《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》(基础篇)以及《数学模拟试卷(经济学类)》共5册，其中《线性代数》、《概率论与数理统计》(基础篇)供数学一至数学四考生共同使用，《微积分》、《数学模拟试卷(经济学类)》为经济学与管理学考生所编写。

本套应试指导丛书的每一章由以下四部分构成：

一、考试要求——编写这部分的目的是使广大考生明确每一章考的内容是什么，掌握到什么程度就可以了。在编写过程中，根据我们多年以来参加有关命题的经验把考试大纲所要求的内容加以细化、归纳和总结，使广大考生能够正确把握考试要求，这是区别于其他考研辅导书的一大特点。

二、重要定义、定理及公式——这部分根据考试大纲的要求，将概念、定理和公式、方法进行了简明扼要地叙述、归纳和总结；精选了各种典型的例题并作详细的解答，使得考生能够在较短的时间内对重点、难点、热点问题进行复习，全面、系统地掌握所需要的知识，在考试时能够拿得出、用得上。

三、典型例题分析——这部分根据考试大纲要求的题型进行了分类、归纳，总结了各种题型解题的方法及技巧，开阔了考生的解题思路，使所学的知识能够融会贯通，并迅速提高考生的综合解题能力。

四、练习题——每章的最后部分精选了适量的练习题，全部习题都附有答案或提示，这些题目作为考生巩固所学知识、复习有关内容时使用，这有利于提高考生分析问题和解决问题的能力。

《数学模拟试卷(经济学类)》一书由两部分组成：一部分是为了检查前一阶段考生复习效果、更好地提高考生的应试能力而设计编制的全真模拟试题共十四份，其中数学三、四各7份；另一部分是历年数学三、四考研试题及解答。

本套书可作为参加硕士研究生入学考试数学一至数学四考生的复习指导书，对于在校的大学生、大专生及自学考试者，本套书也是较好的学习参考用书。

由于编者水平有限，加之时间比较仓促，书中难免有错误和疏漏之处，恳请读者批评指正。

编　者

2004年3月

目　录

第一篇　考试要求与内容要点

第二编　解题思路导读与典型例题分析

第一篇　考试要求与内容要点

第一章　函数、极限与连续

一、考试要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，会建立简单应用问题的函数关系.

2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

3. 理解复合函数、反函数、隐函数和分段函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，理解初等函数的概念.

5. 了解数列极限和函数极限(包括左极限与右极限)的概念.

6. 理解无穷小的概念和基本性质，掌握无穷小的阶的比较方法. 了解无穷大的概念及其与无穷小的关系.

7. 了解极限的性质与极限存在的两个准则，掌握极限四则运算法则，会应用两个重要极限.

8. 理解函数连续性的概念(包括左连续与右连续)，会判断函数间断点的类型.

9. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，了解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值与最小值定理和介值定理)及其简单应用.

二、内容要点

(一) 函数

1. 函数的概念

定义 1.1(函数定义)　设 D 是一个给定的数集，若对于每一个数 $x\in D$，变量 y 按一定法则总有一个确定的数值与之相对应，则称变量 y 是变量 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$，x 称作**自变量**，y 称作**因变量**，数集 D 称作函数 $y=f(x)$的**定义域**.

当 x 取值 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的值称为函数 $y=f(x)$在点 x_0 的**函数值**，当 x 取遍 D 的每一个数值，对应的函数值的全体 $Y=\{y|y=f(x),x\in D\}$称为函数 $y=f(x)$的**值域**.

反函数　设函数 $y=f(x)$的定义域为 D，值域为 Y，若对于每个 $y\in Y$，存在惟一的 $x\in D$，使 $f(x)=y$，当把 y 看作自变量，x 看作因变量时，则 x 是一个定义在 $y\in Y$ 上的函数，记作

$$x=f^{-1}(y)\quad (y\in Y),$$

称其为 $y=f(x)$ $(x\in D)$的**反函数**.

习惯上把 x,y 互换，写成

$$y=f^{-1}(x)\quad (x\in Y).$$

复合函数 设函数 $y=f(u)$ 的定义域是 D_f，值域是 Y. 函数 $u=g(x)$ 的定义域是 D_g，值域是 G. 如果 $G\cap D_f\neq\varnothing$，则称函数

$$g=f[g(x)],\quad x\in D=\{x\,|\,g(x)\in D_f\}$$

是 $y=f(u)$ 与 $u=g(x)$ 复合而成的**复合函数**，u 称为**中间变量**.

初等函数 常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数等六种函数称为**基本初等函数**. 基本初等函数经过有限次四则运算和复合而得到的函数称为**初等函数**

分段函数 两个变量之间的函数用两个或多于两个的数学式子来表达的函数.

显函数与隐函数 若因变量 y 用自变量 x 的数学式直接表示出来函数称为**显函数**；若两个变量 x 与 y 之间的函数关系用方程 $F(x,y)=0$ 来表示，则称为**隐函数**.

2. 函数的几种特性

单调性 设函数 $f(x)$ 定义在区间 I 上，对 I 中任意两点 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)<f(x_2)$（$f(x_1)>f(x_2)$），则称 $f(x)$ 在区间 I 上**单调增加**（**单调减少**）. 它们统称为**单调函数**.

有界性 若存在 $M>0$，使得对任意 $x\in I$，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 是 I 上的**有界函数**，否则称函数 $f(x)$ 在 I 上**无界**.

奇偶性 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，若对任意 $x\in D$，有

$$f(-x)=f(x)\quad \text{或}\quad f(-x)=-f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**偶函数**或**奇函数**.

周期性 设函数 $f(x)$ 定义在 I 上，若存在常数 $T\neq 0$，满足对任意 $x\in I$，有 $x\pm T\in I$，且 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**周期函数**，满足上式的最小正数 T 称为函数 $f(x)$ 的**周期**.

（二）极限

1. 极限的概念

定义 1.2（极限的定义）

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A\Leftrightarrow\forall\ \varepsilon>0,\exists$ 自然数 N，当 $n>N$ 时，都有 $|x_n-A|<\varepsilon$. 若 x_n 存在极限（有限数），则称 $\{x_n\}$ **收敛**，否则称 $\{x_n\}$ **发散**.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\ \varepsilon>0,\exists\ X>0$，当 $|x|>X$ 时，都有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

类似可定义：$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，都有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

类似可定义：$f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$，$f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

极限存在的充分必要条件

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

2. 极限的基本性质

性质 1（极限的惟一性） 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=B$，则 $A=B$.

性质 2（极限的不等式性质） 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$.

若 $A>B$，则 $\exists\ \delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$f(x)>g(x)$；

若 $f(x)\geqslant g(x)$（$0<|x-x_0|<\delta$），则 $A\geqslant B$.

性质 3(极限的保号性) 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$. 若 $A>0(A<0)$,则 $\exists\ \delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, $f(x)>0(f(x)<0)$;若 $f(x)\geqslant 0(0<|x-x_0|<\delta)$,则 $A\geqslant 0$.

性质 4(存在极限的函数局部有界性) 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则 $f(x)$ 在 x_0 的某空心邻域内有界,即 $\exists\ \delta>0,M>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,就有 $|f(x)|\leqslant M$.

3. 数列敛散性的判别定理

定理 1.1(夹逼定理) 若 $\exists\ N$,当 $n>N$ 时,$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$. 又若 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=A$,则

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A.$$

定理 1.2(单调有界数列必有极限准则) 若数列$\{x_n\}$单调上升有上界,即 $x_{n+1}\geqslant x_n(n=1,2,\cdots)$,并存在一个常数 M,使得对一切 n 有 $x_n\leqslant M$,则$\{x_n\}$收敛,即存在一个数 a,使得

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a,\ \text{且有}\ x_n\leqslant a\ (n=1,2,\cdots).$$

若数列$\{x_n\}$单调下降有下界,即 $x_{n+1}\leqslant x_n(n=1,2,\cdots)$并存在常数 m,使得对一切 n 有 $x_n\geqslant m$,则$\{x_n\}$收敛,即存在一个常数 b,使得

$$\lim_{n\to\infty}x_n=b,\ \text{且有}\ x_n\geqslant b\ (n=1,2\cdots).$$

说明 对函数也有类似的夹逼定理.

4. 极限的四则运算法则

设 $\lim f(x)=A,\lim g(x)=B$,则

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=A+B;$$
$$\lim[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B;$$
$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}\ (B\neq 0).$$

说明 $\lim f(x)=A$,符号"lim"下没写 x 的变化过程,表示 $x\to x_0,x\to\infty$时均成立,在同一问题中 x 的变化过程是一致的.

5. 复合函数 $f(\varphi(x))$的极限

设 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$,但在 x_0 的某空心邻域内 $\varphi(x)\neq a$,又 $\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$,则

$$\lim_{x\to x_0}f(\varphi(x))=\lim_{u\to a}f(u)=A.$$

说明 极限式"$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$"中, $x\to x_0$ 可以改为 $x\to\infty$,极限 a 也可改为∞.

6. 无穷小、无穷大及无穷小的阶

(1) 无穷小、无穷大定义及二者关系

$\lim f(x)=0\Longleftrightarrow f(x)$为无穷小; $\lim f(x)=\infty\Longleftrightarrow f(x)$为无穷大.

若 $f(x)$为无穷小,且 $f(x)\neq 0$,则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷大;若 $f(x)$为无穷大,则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷小.

(2) 无穷小与有界变量的乘积是无穷小.

(3) 无穷小与极限的关系

$$\lim f(x)=A\Longleftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)\quad(\lim\alpha(x)=0).$$

(4) 无穷小的阶

设 $\lim\alpha(x)=\lim\beta(x)=0$. 若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=l$,

当 $l\neq 0$ 时,称 $\alpha(x),\beta(x)$为同阶无穷小;

当 $l=1$ 时，称 $\alpha(x),\beta(x)$ 为**等价无穷小**，记作 $\alpha(x)\sim\beta(x)$；

当 $l=0$ 时，称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶的无穷小.

若 $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$，称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 低阶的无穷小.

若 $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 不存在(也不为 ∞)，则 $\alpha(x),\beta(x)$ 不可比较.

常用的等价无穷小：

当 $x\to 0$ 时，

$$\sin x\sim x,\quad \arcsin x\sim x,\quad \tan x\sim x,\quad \arctan x\sim x,$$

$$\ln(1+x)\sim x,\quad e^x-1\sim x,\quad a^x-1\sim x\ln a,$$

$$\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\sim x,\quad \sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}\sim x,$$

$$\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}\sim x,\quad 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,$$

$$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x.$$

(5) 等价无穷小的传递和代换性质

设 $\lim\alpha=0,\ \lim\beta=0,\ \lim\gamma=0$.

1° 若 $\alpha\sim\gamma,\beta\sim\gamma$，则 $\alpha\sim\beta$；

2° 若 $\alpha\sim\gamma$，则

$$\lim\alpha\beta=\lim\gamma\beta,\quad \lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta}{\gamma},\quad \lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\gamma}{\beta}.$$

(三) 函数的连续性

1. 连续函数的定义

定义 1.3 (1) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ **连续**.

(2) 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ **左连续**；

若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ **右连续**.

(3) 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内任意点均连续，称 $f(x)$ 在 (a,b) 连续.

(4) 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，在 $x=a$ 右连续，在 $x=b$ 左连续，称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续.

在点 x_0 连续的充分必要条件：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$.

2. 连续性运算法则

(1) 连续函数的四则运算法则：设 $f(x),g(x)$ 在 x_0 连续，则

$$f(x)\pm g(x),\quad f(x)\cdot g(x),\quad \frac{f(x)}{g(x)}\ (g(x_0)\neq 0)$$

在 x_0 连续.

(2) 复合函数的连续性：设 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_0)=u_0,\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=f(u_0)$，则

$$\lim_{x\to x_0}f(\varphi(x))=f(u_0)=f(\varphi(x_0)).$$

(3) 反函数的连续性：设 $y=f(x)$ 在区间 I_x 上单调且连续，则其反函数 $x=\varphi(y)$ 在对应的区间 $I_y=\{y\,|\,y=f(x),\ x\in I_x\}$ 上连续且有相同的单调性.

(4) 一切初等函数在其定义区间上都连续.

3. 间断点及其分类

若函数 $f(x)$在点 x_0 不连续，则称 x_0 是 $f(x)$的**间断点**.

间断点的分类

第一类间断点		第二类间断点	
$f(x_0-0)$，$f(x_0+0)$均存在		$f(x_0-0)$，$f(x_0+0)$至少有一个不存在	
$f(x_0-0)=f(x_0+0)$	$f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$	$f(x_0-0)$，$f(x_0+0)$ 至少一个为∞	除前面情况以外
可去间断点	跳跃间断点	无穷间断点	振荡间断点

4. 闭区间上连续函数的性质

设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则

(1) **最值定理**：$f(x)$在$[a,b]$上有最大值和最小值.

(2) **介值定理**：设 $f(x)$在$[a,b]$上有最大值 M 和最小值 m，则对任意数 $c\in(m,M)$，在(a,b)内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=c$.

(3) **根值定理**：若 $f(a)$与 $f(b)$异号，则在(a,b)内至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=0$.

第二章　一元函数微分学

一、考试要求

1. 理解导数的概念及可导性与连续性之间的关系，了解导数的几何意义与经济意义（含边际与弹性的概念）.

2. 掌握基本初等函数的导数公式、导数的四则运算法则及复合函数的求导法则，掌握反函数与隐函数求导法以及对数求导法.

3. 了解高阶导数的概念，会求简单函数的高阶导数.

4. 了解微分的概念，导数与微分之间的关系，以及一阶微分形式的不变性，会求函数的微分.

5. 理解罗尔(Rolle)定理、拉格朗日(Lagrange)中值定理、了解柯西(Cauchy)中值定理，掌握这三个定理的简单应用.

6. 会用洛必达法则求极限.

7. 掌握函数单调性的判别方法及其应用，掌握函数极值、最大值和最小值的求法，会解较简单的应用题.

8. 会用导数判断函数图形的凹凸性，会求函数图形的拐点和渐近线.

9. 掌握函数作图的基本步骤和方法，会作简单函数的图形.

说明　数学四与上述考试要求不同之处：

1. 第2条中，“掌握反函数与隐函数求导法以及对数求导法”应改为“掌握反函数与隐函数求导法，了解对数求导法”.

2. 第5条中，去掉“了解柯西中值定理”，应是“理解罗尔定理和拉格朗日中值定理，掌握这两个定理的简单应用.

3. 第7条中，“掌握函数极值、最大值和最小值的求法，会解较简单的应用问题”应改为“……最小值的求法（会解较简单的应用问题）”.

二、内容要点

（一）函数 $y=f(x)$ 的导数

1. 导数概念

定义2.1（在点 x_0 的导数）　函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的**导数**记作 $f'(x_0)$，$y'\big|_{x=x_0}$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}$，定义为下述极限：

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\quad \text{或}\quad f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

左导数　$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

右导数 $f'_+(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

可导的充要条件 $f'(x_0)=A\Longleftrightarrow f'_-(x_0)=A=f'_+(x_0)$.

导函数 在区间 I 内每一点都可导,导函数简称为导数,定义为

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

定理 2.1(可导与连续的关系) 若函数 $f(x)$在 x_0 可导,则 $f(x)$在 x_0 连续,反之则不成立.

高阶导数 函数 $y=f(x)$的**二阶导数**定义为

$$f''(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x},$$

函数 $y=f(x)$的$(n-1)$阶导数的导数称为 $f(x)$的 **n 阶导数**,记作 $f^{(n)}(x)$,$y^{(n)}$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$.

2. 导数公式与运算法则

(1) **基本初等函数的导数公式**

$(C)'=0$ (C 为任意常数); $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$($\alpha$ 为实数);

$(a^x)'=a^x\ln a$ $(a>0,a\neq 1)$; $(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$;

$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$ $(a>0,a\neq 1)$; $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$;

$(\sin x)'=\cos x$; $(\cos x)'=-\sin x$;

$(\tan x)'=\sec^2 x$; $(\cot x)'=-\csc^2 x$;

$(\sec x)'=\sec x\cdot\tan x$; $(\csc x)'=-\csc x\cdot\cot x$;

$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$; $(\mathrm{arccot}\, x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

(2) **导数的四则运算法则** 设函数 $u=u(x)$,$v=v(x)$都可导,则

$$[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x);$$
$$[u(x)\cdot v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x);$$
$$[Cv(x)]'=Cv'(x)\quad (C\text{ 为任意常数});$$
$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'=\frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{v^2(x)}\quad (v(x)\neq 0).$$

(3) **反函数的导数** 若 $y=f(x)$与 $x=f^{-1}(y)$互为反函数,$f(x)$在其定义域内可导且 $f'(x)\neq 0$,则

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}\quad\text{或}\quad [f^{-1}(y)]'=\frac{1}{f'(x)}.$$

(4) **复合函数的求导法则** 设函数 $u=\varphi(x)$在一点 x 处有导数$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi'(x)$,又函数 $y=f(u)$在对应点 u 处有导数$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}=f'(u)$,则复合函数 $y=f(\varphi(x))$在点 x 处也有导数,并且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\quad\text{或}\quad y'_x=f'(u)\varphi'(x)=f'(\varphi(x))\varphi'(x).$$

(二) 函数 $y=f(x)$的微分

1. 微分概念

定义 2.2(微分定义) 若自变量在点 x 的改变量 Δx 与函数 $f(x)$相应的改变量 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$有关系

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x),$$

其中 A 与 Δx 无关,则称函数 $f(x)$在点 x **可微**,并称 $A \cdot \Delta x$ 为函数 $f(x)$在点 x 的**微分**. 记作 $\mathrm{d}y$ 或 $\mathrm{d}f(x)$,即

$$\mathrm{d}y = A \cdot \Delta x.$$

在点 x_0 的微分,记作 $\mathrm{d}y|_{x=x_0}$.

可导与可微的关系 函数 $y=f(x)$在点 x 可微的充要条件是 $f(x)$在点 x 可导,且

$$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x \quad (\text{自变量的微分 } \mathrm{d}x = \Delta x).$$

2. 微分公式与运算法则

由关系式 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$ 知,对应于每一个基本初等函数的导数公式和导数的四则运算法则就有一个基本初等函数的微分公式和微分的四则运算法则.

微分形式的不变性 设函数 $y=f(u)$可导,当 u 是自变量时或 u 是自变量 x 的可导函数 $u=\varphi(x)$时,都有 $\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u$.

(三) 微分中值定理

定理 2.2(罗尔定理) 设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,在开区间(a,b)内可导, $f(a)=f(b)$,则在区间(a,b)内至少存在一点 ξ,使得 $f'(\xi)=0$.

定理 2.3(拉格朗日中值定理) 设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,在开区间(a,b)内可导,则在区间(a,b)内至少存在一点 ξ,使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \text{或} \quad f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a).$$

推论 1 在区间(a,b)内,若 $f'(x)\equiv 0$,则 $f(x)=C$(C 是常数).

推论 2 在区间(a,b)内,若 $f'(x)=g'(x)$,则 $f(x)=g(x)+C$.

定理 2.4(柯西中值定理) 设函数 $f(x)$,$g(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,在开区间(a,b)内可导,且 $g'(x)\neq 0$,则在区间(a,b)内至少存在一点 ξ,使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

(四) 洛必达法则

定理 2.5(洛必达法则) 若函数 $f(x)$和 $g(x)$满足

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$;

(2) 在点 x_0 的某空心邻域内可导,且 $g'(x)\neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$(有限数)或$\infty$,

则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A \text{ 或 } \infty.$$

说明 (1) 定理 2.5 中的条件(1),若改为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$,将是$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式,