经济学硕士入学考试

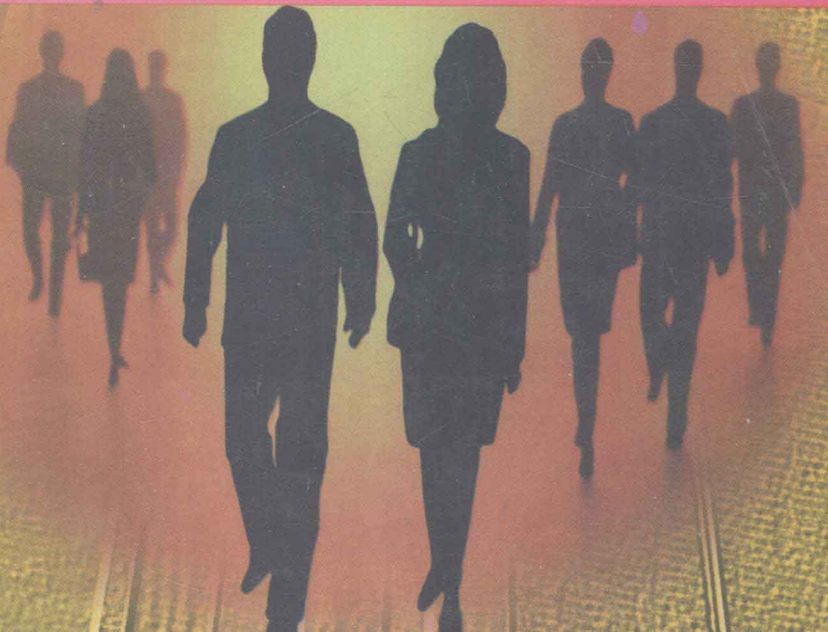
数学解题方法辨析

（修订本）

傅维潼　编著

人大版考研

中国人民大学出版社



经济学硕士入学考试
数学解题方法辨析

（修 订 本）

傅维潼　编著

图书在版编目（CIP）数据

经济学硕士入学考试数学解题方法辨析/傅维潼编著．第2版（修订本）
北京：中国人民大学出版社，1998.4

ISBN 7-300-02625-7/G·416
Ⅰ．经…
Ⅱ．傅…
Ⅲ．高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料
Ⅳ．O13

中国版本图书馆CIP数据核字（98）第06476号

经济学硕士入学考试
数学解题方法辨析
（修订本）
傅维潼　编著

出版发行：中国人民大学出版社
（北京海淀路157号　邮码100080）
经　　销：新华书店
印　　刷：北京市丰台区丰华印刷厂

开本：787×1092毫米 1/16　印张：27.75
1996年7月第1版　1998年4月第2版
1998年4月第1次印刷
字数：634 000

定价：34.00元
（图书出现印装问题，本社负责调换）

前　　言

笔者在中国人民大学研究生院历次为经济学硕士研究生入学考试所举办的数学辅导班进行辅导的过程中，深感多数考生在如何运用所学数学知识去分析数学问题，探索解题途径方面的能力是薄弱的，参加辅导班的考生也要求强化这方面的能力. 要保证研究生入学考试的选拔性功能，试卷就应该有相应的区分度，这样，在试题中必然包含若干综合性的、具有相应难度的问题，要解答这类问题，就应当具备相应的分析问题和解决问题的能力.

笔者希望能通过本书，启发和引导广大考生在复习数学的过程中，既注意考试大纲中规定的基本概念、基本性质、基本定理、基本公式和法则以及基本算法，又能关注自己的思维过程，经常分析自己思考的“成功”和“失败”的实例，学会调节和重新组织自己的思想，改进思维方式，提高运用数学语言的能力，从而尽快地找到适合于自己的提高解题能力的途径.

本书在中国人民大学出版社有关同志的关心和支持下，于1996年9月出版发行，发行后受到广大读者的好评与欢迎，有的读者来信提出了改进和完善该书内容的意见. 在此，笔者向出版社的有关同志致谢，并感谢广大热心读者的厚爱和鼓励.

本书在第一版的基础上根据新考试大纲进行了修订，补充了新大纲中要求的一些内容和例题，删去了一些内容或方法上重复的例题；在每章之后编选了练习题及其解答与提示；在书后还编选了一些模拟性的综合练习并给出了解答或提示，最后把1998年试题及其解答或提示附在后面. 笔者希望本书经过本次修订，更适合于广大考生使用.

本书也可作为全日制财经院校的大学本科生学习数学的参考书.

书中不当或错误之处，望广大读者不吝赐教.

编者

1998. 3.

目 录

绪 论

第一篇 微积分

第二篇 线性代数

第三篇 概率统计

绪　　论

第一章　矛盾转移的基本思想

做任何事情都应该讲究方法，方法不当，事倍功半；方法得当，事半功倍.

数学问题是千变万化的，解题方法也是灵活多样的，我们不可能归纳出题目的所有类型，更不可能找到包解各种数学问题的万能方法. 尽管如此，人们在长期解题实践中，总结了一些寻求解题途径的科学思维方法和模式，这些方法和模式在解决数学问题时，能指导和启发人们思考如何去探索解题途径. 因此，当你解答所面临的数学问题时，除了必须熟练掌握数学的基础知识之外，还应当学会科学的思维方法，这样才能提高你的解题能力，以适应经济学硕士研究生选拔性入学考试的要求.

人们不论在生活中还是在工作中，遇到较困难的问题或难以解决的矛盾时，往往要想办法创造条件将其转化为较易处理的问题或矛盾，以求得解决的方法. 这是一种非常普遍的思想方法 —— 矛盾转移法.

不少学者认为：数学思维的一个重要特点，就是人们往往不是对问题进行正面攻击，而是不断地将它变形，直到把它转移到能够得到解决的问题时，也就是根据原来的问题的特点，发现一个或几个比原来问题简单、难度较低、易于解决的新问题，通过对新问题的考察，发现原问题的解题途径，最后达到解决原问题的目的.

莫斯科大学一位数学教授，更简明扼要地指出："解题就是意味着把要解的题转化为解过的题."

如果问题 P_1 的解决有赖于问题 P_2 的解决，则我们说问题 P_1 可转移到问题 P_2；若问题 P_1 的解决有赖于若干问题 $P_1{}'$，$P_2{}'$，…，$P_n{}'$ 都得到解决，则我们说问题 P_1 可分解为 n 个子问题 $P_1{}'$，$P_2{}'$，…，$P_n{}'$.

§1.1　转移问题的基本策略原则

一、陌生问题尽量转移到熟悉的问题

如果能把陌生问题转移到我们所熟悉的问题，那么我们就可以充分利用已经掌握的知识和已经有的解题经验.

例 1　设 $f(x)$ 是自变量和因变量都取实数的函数，且满足关系式：

$$f(x) + \frac{1}{3}f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} \tag{1}$$

求：$f(x)$

[分析]关系式(1)中含有未知函数$f(x)$和$f(\frac{1}{x})$，它们的变元x和$\frac{1}{x}$互为倒数，若把x用$\frac{1}{x}$代换，则(1)式可变为

$$f(\frac{1}{x}) + \frac{1}{3}f(x) = x \tag{2}$$

把(1)、(2)联立起来，就得到关于$f(x)$和$f(\frac{1}{x})$的二元一次方程组：

$$\begin{cases} f(x) + \frac{1}{3}f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} \\ \frac{1}{3}f(x) + \quad f(\frac{1}{x}) = x \end{cases}$$

这是熟悉的问题，用加减消元法可得：

$$f(x) = \frac{3(3 - x^2)}{8x}$$

二、复杂问题应尽量分解为简单问题

若能把复杂问题，分解成几个简单的子问题，则可利用所学知识，个个击破，再按原问题的要求得出原问题的解答.

例 2　求积分：$\int \frac{x}{1+x}dx$

[分析]一般遇到这种形式的积分是用拆项的方法：

$$\frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$$

积分就拆成两个积分的差

$$\int \frac{x}{1+x}dx = \int dx - \int \frac{1}{1+x}dx \tag{1}$$

个个击破，

$$\int dx = x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x}dx = \ln|1+x| + c$$

按(1)组合成原问题解答

$$\int \frac{x}{1+x}dx = x - \ln|1+x| + c$$

例 3　甲、乙两人向同一目标射击，甲击中的概率为 0.8，乙击中的概率为 0.7，两人同时各射击一发子弹，且甲、乙是否击中目标互相独立.

求：恰好有一发子弹击中目标的概率.

[分析]先用字母表示有关的事件.

设：A 表示“恰好有一发子弹击中目标”的事件. 与 A 有关的事件是：

B_1 表示“甲击中目标”的事件；

B_2 表示“乙击中目标”的事年.

已知：$P(B_1) = 0.8 \quad P(B_2) = 0.7 \quad$ 且 $P(B_1B_2) = P(B_1)P(B_2)$

求：$P(A)$

$\because A = B_1\overline{B}_2 + \overline{B}_1 B_2$

$\therefore P(A) = P(B_1\overline{B}_2) + P(\overline{B}_1 B_2)$ (1)

这样就把求 $P(A)$ 的问题分解成求 $P(B_1\overline{B}_2)$ 和 $P(\overline{B}_1 B_2)$. 个个击破，

$$P(B_1\overline{B}_2) = P(B_1)P(\overline{B}_2) = 0.8 \times 0.3 = 0.24$$

$$P(\overline{B}_1 B_2) = 0.2 \times 0.7 = 0.14$$

再按(1) 组合成原问题的解答

$$P(A) = 0.38$$

三、抽象问题尽量直观形象化

如果能把抽象的问题直观形象地表现出来，就可能形象地把握问题所涉及的对象之间的关系，便于寻求解题的线索.

例 4 设 $f(x)$ 是定义在$(-\infty, +\infty)$ 中以 T 为周期的连续函数.

证明：对任何实数 a，有

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\mathrm{d}s \tag{1}$$

[分析] 画出周期为T 的函数 $y = f(x)$（如图 0-1），表示出以上等式左、右两边的几何意义，即要证明，由 $x = a, x = T + a$ 及 x 轴，曲线 $y = f(x)$ 围成的曲边梯形的面积与由 y 轴，$x = T$，x 轴及曲线 $y = f(x)$ 围成的曲边梯形的面积相等.

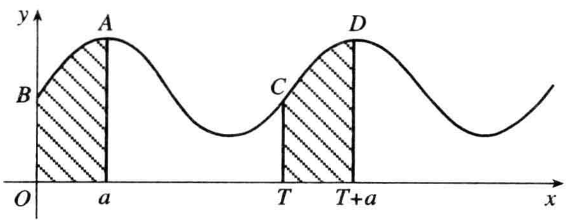


图 0-1

它们共同的部分是由 $x = a, x = T$，x 轴及曲线 $y = f(x)$ 所围成的曲边梯形的面积. 因此，只需证明曲边梯形 $OaAB$ 和 T、$T + aDC$ 面积相等即可. 即只需证明：对任何实数 a，有

$$\int_T^{T+a} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a f(x)\mathrm{d}x \tag{2}$$

成立. 怎样证明？用换元法：

设：$x = T + t$，则 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$，当 $x = T$ 时 $t = 0$，当 $x = T + a$ 时 $t = a$

于是
$$\begin{aligned}\int_T^{T+a} f(x)\mathrm{d}x &= \int_0^a f(T + t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^a f(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^a f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

有了(2) 成立，

$$\begin{aligned}\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x &= \int_a^T f(x)\mathrm{d}x + \int_T^{a+T} f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_a^T f(t)\mathrm{d}t + \int_0^a f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^T f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

式(1) 得证.

四、一般性的问题尽量先考虑其特殊情况

若一般性的问题的解题途径不明确，可以先将其特殊化，从特殊情况的解法中寻求一般性问题的解法.

例 5　计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x & x \\ x & a_2 & x & \cdots & x & x \\ x & x & a_3 & \cdots & x & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & a_{n-1} & x \\ x & x & x & \cdots & x & a_n \end{vmatrix} \qquad (a_i \neq x \neq 0; i = 1,2,\cdots,n)$$

[分析] 如何将 D_n 化成三角形行列式. 当 $n = 3$ 时的情况下如何化为三角形的?

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & x & x \\ x & a_2 & x \\ x & x & a_3 \end{vmatrix}$$

第 1 行乘(－ 1) 分别加于第 2 行，第 3 行

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & x & x \\ x - a_1 & a_2 - x & 0 \\ x - a_1 & 0 & a_3 - x \end{vmatrix}$$

第 1 列提出$(a_1 - x)$，第 2 列提出$(a_2 - x)$，第 3 列提出$(a_3 - x)$

$$D_3 = (a_1 - x)(a_2 - x)(a_3 - x)\begin{vmatrix} \dfrac{a_1}{a_1 - x} & \dfrac{x}{a_2 - x} & \dfrac{x}{a_3 - x} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

由$\dfrac{a_1}{a_1 - x} = 1 + \dfrac{x}{a_1 - x}$. 把第 2 列，第 3 列都加于第 1 列

$$D_3 = (a_1 - x)(a_2 - x)(a_3 - x) \cdot \begin{vmatrix} 1 + \dfrac{x}{a_1 - x} + \dfrac{x}{a_2 - x} + \dfrac{x}{a_3 - x} & \dfrac{x}{a_2 - x} & \dfrac{x}{a_3 - x} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a_1 - x)(a_2 - x)(a_3 - x) \cdot \left[1 + \frac{x}{a_1 - x} + \frac{x}{a_2 - x} + \frac{x}{a_3 - x}\right]$$

$$= x(a_1 - x)(a_2 - x)(a_3 - x) \cdot \left[\frac{1}{x} + \frac{x}{a_1 - x} + \frac{x}{a_2 - x} + \frac{x}{a_3 - x}\right]$$

那么，对于 n 阶的行列式的情形也可以用这样的步骤化为三角形行列式(这是一种特

殊的行列式)：

第一行乘(-1)加于第i行$(i=2,3,\cdots,n)$

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x & x \\ x-a_1 & a_2-x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x-a_1 & 0 & a_3-x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x-a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}-x & 0 \\ x-a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n-x \end{vmatrix}$$

从第j列提出(a_j-x) $(j=1,2,\cdots,n)$

$$D_n=\prod_{j=1}^{n}(a_j-x)\begin{vmatrix} \dfrac{a_1}{a_1-x} & \dfrac{x}{a_2-x} & \dfrac{x}{a_3-x} & \cdots & \dfrac{x}{a_n-x} \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

由$\dfrac{a_1}{a_1-x}=1+\dfrac{x}{a_1-x}$.把第$j$列加于第1列 $(j=2,3,\cdots,n)$

$$D_n=\prod_{j=1}^{n}(a_j-x)\begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{x}{(a_j-x)} & \dfrac{x}{a_2-x} & \cdots & \dfrac{x}{a_n-x} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\prod_{j=1}^{n}(a_j-x)\left[1+\sum_{j=1}^{n}\frac{x}{(a_j-x)}\right]$$

$$=x\prod_{j=1}^{n}(a_j-x)\left[\frac{1}{x}+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j-x}\right]$$

五、特殊情形的问题尽量从其一般情形考虑

若把特殊问题一般化，又能找到一般情形下的解题途径或已经知道了一般问题的解法，那么，特殊问题的解法是可以从中得到启示的.

例 6 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a & x & x & \cdots & x & x \\ x & a & x & \cdots & x & x \\ x & x & a & \cdots & x & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & a & x \\ x & x & x & \cdots & x & a \end{vmatrix} \qquad (a\neq x)$$

[分析] 例 6 是例 5 当$a_1=a_2=\cdots=a_n=a$时的特殊情况，可以把$a_1=a_2=\cdots=a_n=a$代入例 5 的解答中，

$$D_n = x(a-x)^n\left[\frac{1}{x}+\frac{n}{a-x}\right]$$
$$= (a-x)^n + n(a-x)^{n-1}x$$
$$= (a-x)^{n-1}[a+(n-1)x]$$

或按例 5 的步骤把例 6 的行列式化为三角形.

(读者自己做)

或者把第 j 列加于第 1 列($j=2,3,\cdots,n$),再把第 1 行乘以(-1)加于第 i 行($i=2,3,\cdots,n$)

$$D_n = \begin{vmatrix} a+(n-1)x & x & x & \cdots & x & x \\ 0 & a-x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a-x \end{vmatrix}$$
$$= (a-x)^{n-1}[a+(n-1)x]$$

(这个解法不同于例 5 的方法)

以下行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}$$

又是例 6 中 $a=2,x=1$ 的特殊情况.这时若把 $x=1,a=2$ 代入例 6 的解答中,可得出结果:

$$D_n = (2-1)^{n-1}[2+n-1] = (n+1)$$

或按例 6 的步骤求出结果.

六、注意条件与结论、形与数、内容与形式的合谐统一

这样才便于突出问题所涉及的对象之间的本质联系.

例 7　设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续且单调增加.

证明:至少存在一点 $\xi\in[a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(a)(\xi-a)+f(b)(b-\xi) \tag{1}$$

[分析] 式(1) 的几何解释,依题意画出图形(见图 0-2):

(1) 函数 $y=f(x)$ 的曲线连接点 $F(a,f(a))$ 和 $C(b,f(b))$,从左向右上升,且曲线是连续的.

(2) 由曲线 $y=f(x)$,直线 $x=a,x=b$ 及 x 轴围成的曲边梯形的面积为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

(3)$f(a)(\xi-a)$ 表示矩形 $AGEF$ 的面积,而 $f(b)(b-\xi)$ 表示矩形 $BCDG$ 的面积.

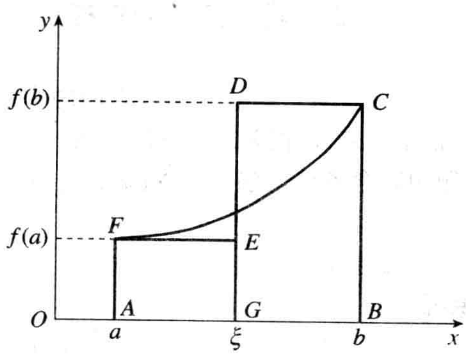


图 0-2

(4) 等式(1) 的右边是这两个矩形面积之和,它是阶梯形 $ABCDEF$ 的面积

$$f(a)(\xi-a)+f(b)(b-\xi)$$

(5) 若把(1) 式右端的 ξ 改成 x,x 在$[a,b]$ 中变动,就得到变动的阶梯形,其面积为

$$F(x)=f(a)(x-a)+f(b)(b-x)$$

在这样的阶梯形中,当 $x=a$ 时面积最大,等于 $F(a)=f(b)(b-a)$;当 $x=b$ 时,面积最小,等于 $F(b)=f(a)(b-a)$,曲边梯形的面积在这两个面积之间,即

$$F(a)\geqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant F(b)$$

(6) 等式(1) 表明:存在一个阶梯形,其面积恰好等于该曲边梯形的面积.

从以上图形的解释中,明确了解决问题的关键在于作一个辅助函数

$$F(x)=f(a)(x-a)+f(b)(b-x)$$

使
$$F(b)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant F(a)$$

又 $F(x)$ 在$[a,b]$ 上连续,这样,就能用闭区间$[a,b]$ 上连续函数的介值定理.

[证明] 设 $F(x)=f(a)(x-a)+f(b)(b-x)$. 它显然在$[a,b]$ 上连续,且由 $f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续,单调增加,所以,对任意 $x\in[a,b]$

$$f(a)\leqslant f(x)\leqslant f(b)$$

$$\therefore f(a)(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant f(b)(b-a)$$

即
$$F(b)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant F(a)$$

由闭区间上连续函数的介值定理知:存在 $\xi\in[a,b]$,使

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x&=F(\xi)\\&=f(a)(\xi-a)+f(b)(b-\xi)\end{aligned}$$

注意:在运用以上各策略原则时,应从具体问题的特点出发,灵活地结合起来运用,才能启发我们发现解题线索.

§1.2　隐含条件的挖掘

若面临的数学问题较难，则往往有一些条件隐含在问题中，这时，关键在于把隐含在问题中，解题又需要的条件挖掘出来，以便解决问题时使用.

下面总结挖掘数学问题中隐含条件，突破关键问题的方法，对于提高解题能力，是很有意义的.

隐含条件可以从以下几方面挖掘.

一、从概念的特征中挖掘

有时，解题所需要的条件，要从理解、分析问题所涉及的主要概念的特征中入手来挖掘.

例 1　已知向量组(Ⅰ)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，(Ⅱ)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$，(Ⅲ)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$，若各向量组的秩分别为

$$\boldsymbol{r}(\text{Ⅰ}) = \boldsymbol{r}(\text{Ⅱ}) = 3, \boldsymbol{r}(\text{Ⅲ}) = 4$$

证明：向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5 - \alpha_4$ 的秩为 4.

[分析] 这一问题所涉及的主要概念是向量组的秩：

$\boldsymbol{r}(\text{Ⅰ}) = \boldsymbol{r}(\text{Ⅱ}) = 3$，表明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的极大线性无关组，因而存在数 l_1，l_2，l_3，使：

$$\alpha_4 = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + l_3\alpha_3 \tag{1}$$

要证明　$\boldsymbol{r}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5 - \alpha_4) = 4$

只需证，若　$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4(\alpha_5 - \alpha_4) = 0$　(2)

则必有 $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$

这可以由 $\boldsymbol{r}(\text{Ⅲ}) = 4$ 推出：把(1) 代入(2)

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4[\alpha_5 - l_1\alpha_1 - l_2\alpha_2 - l_3\alpha_3] = 0$$

即　$(k_1 - k_4l_1)\alpha_1 + (k_2 - k_4l_2)\alpha_2 + (k_3 - k_4l_3)\alpha_3 + k_4\alpha_5 = 0$

$\boldsymbol{r}(\text{Ⅲ}) = 4$ 即 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_5$ 线性无关

$\therefore$　$k_4 = 0$　$k_1 - k_4l_1 = k_2 - k_4l_2 = k_3 - k_4l_3 = 0$

$\therefore$　$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$

即　$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5 - \alpha_4$ 线性无关

$\therefore$　$\boldsymbol{r}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5 - \alpha_4) = 4$

二、从图形特征中挖掘

有时解题所需要的条件，可以从几何解释的图形特征中挖掘来.

例 2　假设函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$ 中有二阶导数，过点 $A(0,f(0))$ 与 $B(1,f(1))$ 的直线与曲线 $y = f(x)$ 相交于点 $C(c,f(c))$，其中 $0 < c < 1$.

证明：在$(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使

$$f''(\xi) = 0$$

[分析] 从 $f(x)$ 所满足的条件知：$f'(x)$ 在$(0,1)$ 中连续且可导，只需能在$(0,1)$ 中找到两点 η_1 和 η_2，使 $f'(\eta_1) = f'(\eta_2)$.