

经济学硕士入学考试 数学解题方法辨析

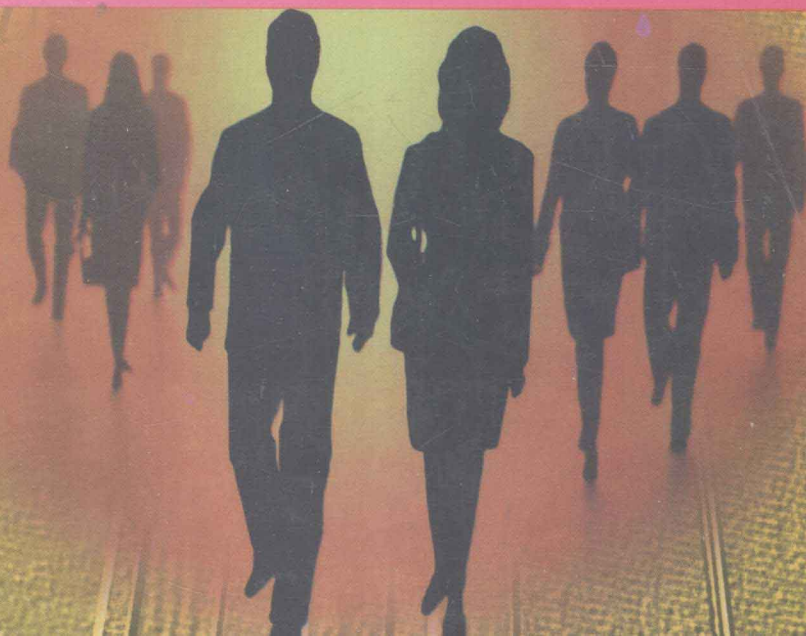
(修订本)

傅维潼 编著



人大版考研

中国人民大学出版社



经济学硕士入学考试 数学解题方法辨析

(修 订 本)

傅维潼 编著

图书在版编目 (CIP) 数据

经济学硕士入学考试数学解题方法辨析/傅维潼编著. 第2版 (修订本)
北京: 中国人民大学出版社, 1998.4

ISBN 7-300-02625-7/G · 416

I. 经…

II. 傅…

III. 高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料

IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (98) 第 06476 号

经济学硕士入学考试 数学解题方法辨析 (修订本)

傅维潼 编著

出版发行: 中国人民大学出版社
(北京海淀路 157 号 邮码 100080)

经 销: 新华书店

印 刷: 北京市丰台区丰华印刷厂

开本: 787×1092 毫米 1/16 印张: 27.75

1996 年 7 月第 1 版 1998 年 4 月第 2 版

1998 年 4 月第 1 次印刷

字数: 634 000

定价: 34.00 元

(图书出现印装问题, 本社负责调换)

前言

笔者在中国人民大学研究生院历次为经济学硕士研究生入学考试所举办的数学辅导班进行辅导的过程中,深感多数考生在如何运用所学数学知识去分析数学问题,探索解题途径方面的能力是薄弱的,参加辅导班的考生也要求强化这方面的能力.要保证研究生入学考试的选拔性功能,试卷就应该有相应的区分度,这样,在试题中必然包含若干综合性的、具有相应难度的问题,要解答这类问题,就应当具备相应的分析问题和解决问题的能力.

笔者希望能通过本书,启发和引导广大考生在复习数学的过程中,既注意考试大纲中规定的基本概念、基本性质、基本定理、基本公式和法则以及基本算法,又能关注自己的思维过程,经常分析自己思考的“成功”和“失败”的实例,学会调节和重新组织自己的思想,改进思维方式,提高运用数学语言的能力,从而尽快地找到适合自己的提高解题能力的途径.

本书在中国人民大学出版社有关同志的关心和支持下,于1996年9月出版发行,发行后受到广大读者的好评与欢迎,有的读者来信提出了改进和完善该书内容的意见.在此,笔者向出版社的有关同志致谢,并感谢广大热心读者的厚爱和鼓励.

本书在第一版的基础上根据新考试大纲进行了修订,补充了新大纲中要求的一些内容和例题,删去了一些内容或方法上重复的例题;在每章之后编选了练习题及其解答与提示;在书后还编选了一些模拟性的综合练习并给出了解答或提示,最后把1998年试题及其解答或提示附在后面.笔者希望本书经过本次修订,更适合于广大考生使用.

本书也可作为全日制财经院校的大学本科生学习数学的参考书.

书中不当或错误之处,望广大读者不吝赐教.

编者

1998. 3.

目 录

绪 论

第一章 矛盾转移的基本思想	1
§ 1.1 转移问题的基本策略原则	1
§ 1.2 隐含条件的挖掘	8
第二章 寻求解题途径的搜索法	13
§ 2.1 正向搜索法	13
§ 2.2 反向搜索法	13
§ 2.3 双向搜索法	14

第一篇 微 积 分

第一章 函数	21
§ 1.1 函数的概念	21
§ 1.2 函数的简单几何特性	26
§ 1.3 基本初等函数与初等函数	31
§ 1.4 函数图形的凸向及拐点	33
§ 1.5 函数图形的描绘	34
练习一	36
练习一解答与提示	37
第二章 极限与连续	40
§ 2.1 极限	40
§ 2.2 无穷小的基本性质与无穷小的比较	42
§ 2.3 极限的计算	45
§ 2.4 连续函数	50
练习二	55
练习二解答与提示	56
第三章 导数和中值定理	58
§ 3.1 导数的概念	58
§ 3.2 导数的运算	64

§ 3.3 微分的概念	67
§ 3.4 中值定理	69
§ 3.5 极值	77
练习三	78
练习三解答与提示	80
 第四章 积分	82
§ 4.1 原函数和不定积分的概念	82
§ 4.2 定积分的概念	87
§ 4.3 定积分的基本性质	88
§ 4.4 变上限积分、牛顿-莱布尼兹公式	91
§ 4.5 换元积分法与分部积分法	93
§ 4.6 广义积分的概念及其计算	98
§ 4.7 应用定积分计算平面图形面积、旋转体体积	101
练习四	103
练习四解答与提示	106
 第五章 多元微积分	110
§ 5.1 多元函数的概念与二元函数的几何意义	110
§ 5.2 二元函数的连续性	110
§ 5.3 偏导数及其计算	111
§ 5.4 全微分的概念及其计算	113
§ 5.5 多元复合函数的导数与隐函数的导数	114
§ 5.6 多元函数的极值、条件极值、最大值和最小值及简单经济应用	116
§ 5.7 二重积分的概念及其计算	120
§ 5.8 无界区域上简单二重积分的计算	122
练习五	125
练习五解答与提示	125
 * 第六章 无穷级数	127
§ 6.1 常数项级数	127
§ 6.2 正项级数及其审敛准则	129
§ 6.3 任意项级数的敛散性的判别	131
§ 6.4 幂级数概念及其基本性质	134
§ 6.5 函数的幂级数展开	137
练习六	139
练习六解答与提示	139
 * 第七章 微分方程与差分方程	140
§ 7.1 微分方程的概念	140

§ 7.2 变量可分离的微分方程与齐次微分方程	140
§ 7.3 一阶线性微分方程	142
§ 7.4 二阶常系数线性微分方程的解法	144
§ 7.5 差分与差分方程	150
练习七	154
练习七解答与提示	154

第二篇 线性代数

第一章 行列式	157
§ 1.1 行列式的概念	157
§ 1.2 行列式的基本性质与计算	158
§ 1.3 克莱姆法则	166
练习八	169
练习八解答与提示	169
第二章 矩阵	171
§ 2.1 矩阵的概念	171
§ 2.2 矩阵的代数运算	172
§ 2.3 逆矩阵的概念与性质	177
§ 2.4 矩阵的初等变换与矩阵的秩	183
§ 2.5 分块矩阵及其运算	187
练习九	192
练习九解答与提示	193
第三章 向量	195
§ 3.1 向量的概念与运算	195
§ 3.2 向量组的极大线性无关组与向量组的秩	203
练习十	206
练习十解答与提示	207
第四章 线性方程组	209
§ 4.1 齐次线性方程组	209
§ 4.2 非齐次线性方程组	209
练习十一	220
练习十一解答与提示	222
第五章 矩阵的特征值与特征向量	225
§ 5.1 矩阵的特征值与特征向量	225

§ 5.2 相似矩阵及其性质	230
* § 5.3 实对称矩阵的相似对角化 (实二次型正交变换化为标准形)	233
练习十二	237
练习十二解答与提示	238
 * 第六章 二次型	239
§ 6.1 二次型的矩阵及二次型的秩	239
§ 6.2 化二次型为标准形	240
§ 6.3 实二次型和实对称矩阵的正定性	247
练习十三	253
练习十三解答与提示	253

第三篇 概率统计

第一章 随机事件及其概率	255
§ 1.1 随机事件及其概率	255
§ 1.2 古典概型中概率的直接计算	257
§ 1.3 条件概率	258
§ 1.4 伯努里概型	264
练习十四	269
练习十四解答与提示	270
 第二章 随机变量及其分布	272
§ 2.1 随机变量的概念	272
§ 2.2 随机变量概率分布的求法	272
§ 2.3 常见的随机变量的分布	277
练习十五	283
练习十五解答与提示	284
 第三章 随机变量函数的分布 (一个随机变量函数的分布)	286
§ 3.1 离散型随机变量函数的分布	286
§ 3.2 连续型随机变量函数的分布	287
练习十六	292
练习十六解答与提示	293
 第四章 数学期望与方差	295
§ 4.1 数学期望	295
§ 4.2 方差	298
练习十七	305

练习十七解答与提示·····	306
第五章 二元随机变量·····	307
§ 5.1 联合分布与边缘分布·····	307
§ 5.2 二元随机变量的分布函数·····	311
§ 5.3 随机变量的独立性·····	312
§ 5.4 二维均匀分布和二维正态分布·····	315
§ 5.5 协方差和相关系数·····	318
* § 5.6 两个随机变量和的分布·····	322
练习十八·····	326
练习十八解答与提示·····	326
* 第六章 大数定律和中心极限定理·····	328
§ 6.1 大数定律 ·····	328
§ 6.2 中心极限定理 ·····	330
练习十九·····	332
练习十九解答与提示·····	332
* 第七章 数理统计初步·····	333
§ 7.1 总体、个体与简单随机样本 ·····	333
§ 7.2 抽样分布 ·····	333
§ 7.3 参数估计 ·····	336
§ 7.4 假设检验 ·····	342
练习二十·····	349
练习二十解答与提示·····	349
综合练习 (一) ·····	350
综合练习 (一) 解答·····	355
综合练习 (二) ·····	368
综合练习 (二) 解答·····	372
1997 年全国攻读硕士学位研究生入学考试数学试题解答 ·····	389
1998 年全国攻读硕士学位研究生入学考试数学试题 ·····	407
1998 年全国攻读硕士学位研究生入学考试数学试题参考解答 ·····	420

绪 论

第一章 矛盾转移的基本思想

做任何事情都应该讲究方法,方法不当,事倍功半;方法得当,事半功倍.

数学问题是千变万化的,解题方法也是灵活多样的,我们不可能归纳出题目的所有类型,更不可能找到包解各种数学问题的万能方法.尽管如此,人们在长期解题实践中,总结了一些寻求解题途径的科学思维方法和模式,这些方法和模式在解决数学问题时,能指导和启发人们思考如何去探索解题途径.因此,当你解答所面临的数学问题时,除了必须熟练掌握数学的基础知识之外,还应当学会科学的思维方法,这样才能提高你的解题能力,以适应经济学硕士研究生选拔性入学考试的要求.

人们不论在生活中还是在工作中,遇到较困难的问题或难以解决的矛盾时,往往要想办法创造条件将其转化为较易处理的问题或矛盾,以求得解决的方法.这是一种非常普遍的思想方法——矛盾转移法.

不少学者认为:数学思维的一个重要特点,就是人们往往不是对问题进行正面攻击,而是不断地将它变形,直到把它转移到能够得到解决的问题时,也就是根据原来的问题的特点,发现一个或几个比原来问题简单、难度较低、易于解决的新问题,通过对新问题的考察,发现原问题的解题途径,最后达到解决原问题的目的.

莫斯科大学一位数学教授,更简明扼要地指出:“解题就是意味着把要解的题转化为解过的题.”

如果问题 P_1 的解决有赖于问题 P_2 的解决,则我们说问题 P_1 可转移到问题 P_2 ;若问题 P_1 的解决有赖于若干问题 $P_1', P_2', \dots, P_n'$ 都得到解决,则我们说问题 P_1 可分解为 n 个子问题 $P_1', P_2', \dots, P_n'$.

§ 1.1 转移问题的基本策略原则

一、陌生问题尽量转移到熟悉的问题

如果能把陌生问题转移到我们所熟悉的问题,那么我们就可以充分利用已经掌握的知识和已有的解题经验.

例 1 设 $f(x)$ 是自变量和因变量都取实数的函数,且满足关系式:

$$f(x) + \frac{1}{3}f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} \quad (1)$$

求: $f(x)$

[分析] 关系式(1)中含有未知函数 $f(x)$ 和 $f(\frac{1}{x})$, 它们的变元 x 和 $\frac{1}{x}$ 互为倒数, 若把 x 用 $\frac{1}{x}$ 代换, 则(1)式可变为

$$f(\frac{1}{x}) + \frac{1}{3}f(x) = x \quad (2)$$

把(1)、(2)联立起来, 就得到关于 $f(x)$ 和 $f(\frac{1}{x})$ 的二元一次方程组:

$$\begin{cases} f(x) + \frac{1}{3}f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} \\ \frac{1}{3}f(x) + f(\frac{1}{x}) = x \end{cases}$$

这是熟悉的问题, 用加减消元法可得:

$$f(x) = \frac{3(3-x^2)}{8x}$$

二、复杂问题应尽量分解为简单问题

若能把复杂问题, 分解成几个简单的子问题, 则可利用所学知识, 个个击破, 再按原问题的要求得出原问题的解答.

例2 求积分: $\int \frac{x}{1+x} dx$

[分析] 一般遇到这种形式的积分是用拆项的方法:

$$\frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$$

积分就拆成两个积分的差

$$\int \frac{x}{1+x} dx = \int dx - \int \frac{1}{1+x} dx \quad (1)$$

个个击破,

$$\int dx = x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x} dx = \ln|1+x| + c$$

按(1)组合成原问题解答

$$\int \frac{x}{1+x} dx = x - \ln|1+x| + c$$

例3 甲、乙两人向同一目标射击, 甲击中的概率为 0.8, 乙击中的概率为 0.7, 两人同时各射击一发子弹, 且甲、乙是否击中目标互相独立.

求: 恰好有一发子弹击中目标的概率.

[分析] 先用字母表示有关的事件.

设: A 表示“恰好有一发子弹击中目标”的事件. 与 A 有关的事件是:

B_1 表示“甲击中目标”的事件;

B_2 表示“乙击中目标”的事年.

已知: $P(B_1) = 0.8$ $P(B_2) = 0.7$ 且 $P(B_1 B_2) = P(B_1)P(B_2)$

求: $P(A)$

$$\because A = B_1\bar{B}_2 + \bar{B}_1B_2$$

$$\therefore P(A) = P(B_1\bar{B}_2) + P(\bar{B}_1B_2) \quad (1)$$

这样就把求 $P(A)$ 的问题分解成求 $P(B_1\bar{B}_2)$ 和 $P(\bar{B}_1B_2)$. 个个击破,

$$P(B_1\bar{B}_2) = P(B_1)P(\bar{B}_2) = 0.8 \times 0.3 = 0.24$$

$$P(\bar{B}_1B_2) = 0.2 \times 0.7 = 0.14$$

再按(1)组合成原问题的解答

$$P(A) = 0.38$$

三、抽象问题尽量直观形象化

如果能把抽象的问题直观形象地表现出来,就可能形象地把握问题所涉及的对象之间的关系,便于寻求解题的线索.

例4 设 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 中以 T 为周期的连续函数.

证明: 对任何实数 a , 有

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)ds \quad (1)$$

[分析] 画出周期为 T 的函数 $y = f(x)$ (如图 0-1), 表示出以上等式左、右两边的几何意义, 即要证明, 由 $x = a, x = T + a$ 及 x 轴, 曲线 $y = f(x)$ 围成的曲边梯形的面积与由 y 轴, $x = T, x$ 轴及曲线 $y = f(x)$ 围成的曲边梯形的面积相等.

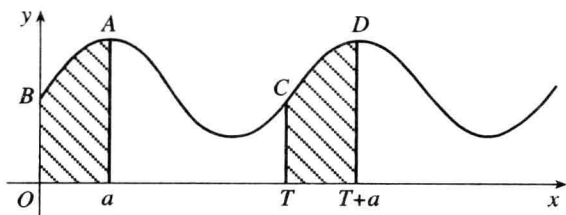


图 0-1

它们共同的部分是由 $x = a, x = T, x$ 轴及曲线 $y = f(x)$ 所围成的曲边梯形的面积. 因此, 只需证明曲边梯形 $OaAB$ 和 $T, T+aDC$ 面积相等即可. 即只需证明: 对任何实数 a , 有

$$\int_T^{T+a} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx \quad (2)$$

成立. 怎样证明? 用换元法:

设: $x = T + t$, 则 $dx = dt$, 当 $x = T$ 时 $t = 0$, 当 $x = T + a$ 时 $t = a$

$$\begin{aligned} \text{于是} \quad \int_T^{T+a} f(x)dx &= \int_0^a f(T+t)dt \\ &= \int_0^a f(t)dt \\ &= \int_0^a f(x)dx \end{aligned}$$

有了(2)成立,

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a+T} f(x)dx &= \int_{-a}^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx \\
&= \int_{-a}^T f(t)dt + \int_0^a f(x)dx \\
&= \int_0^T f(x)dx
\end{aligned}$$

式(1)得证.

四、一般性的问题尽量先考虑其特殊情况

若一般性的问题的解题途径不明确,可以先将其特殊化,从特殊情况的解法中寻求一般性问题的解法.

例 5 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x & x \\ x & a_2 & x & \cdots & x & x \\ x & x & a_3 & \cdots & x & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & a_{n-1} & x \\ x & x & x & \cdots & x & a_n \end{vmatrix} \quad (a_i \neq x \neq 0; i = 1, 2, \cdots, n)$$

[分析] 如何将 D_n 化成三角形行列式. 当 $n = 3$ 时的情况下如何化为三角形的?

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & x & x \\ x & a_2 & x \\ x & x & a_3 \end{vmatrix}$$

第 1 行乘 (-1) 分别加于第 2 行, 第 3 行

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & x & x \\ x - a_1 & a_2 - x & 0 \\ x - a_1 & 0 & a_3 - x \end{vmatrix}$$

第 1 列提出 $(a_1 - x)$, 第 2 列提出 $(a_2 - x)$, 第 3 列提出 $(a_3 - x)$

$$D_3 = (a_1 - x)(a_2 - x)(a_3 - x) \begin{vmatrix} \frac{a_1}{a_1 - x} & \frac{x}{a_2 - x} & \frac{x}{a_3 - x} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

由 $\frac{a_1}{a_1 - x} = 1 + \frac{x}{a_1 - x}$. 把第 2 列, 第 3 列都加于第 1 列

$$\begin{aligned}
D_3 &= (a_1 - x)(a_2 - x)(a_3 - x) \cdot \begin{vmatrix} 1 + \frac{x}{a_1 - x} + \frac{x}{a_2 - x} + \frac{x}{a_3 - x} & \frac{x}{a_2 - x} & \frac{x}{a_3 - x} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (a_1 - x)(a_2 - x)(a_3 - x) \cdot \left[1 + \frac{x}{a_1 - x} + \frac{x}{a_2 - x} + \frac{x}{a_3 - x} \right] \\
&= x(a_1 - x)(a_2 - x)(a_3 - x) \cdot \left[\frac{1}{x} + \frac{x}{a_1 - x} + \frac{x}{a_2 - x} + \frac{x}{a_3 - x} \right]
\end{aligned}$$

那么, 对于 n 阶的行列式的情形也可以用这样的步骤化为三角形行列式(这是一种特

殊的行列式):

第一行乘 (-1) 加于第 i 行 $(i = 2, 3, \dots, n)$

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x & x \\ x - a_1 & a_2 - x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x - a_1 & 0 & a_3 - x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x - a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} - x & 0 \\ x - a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n - x \end{vmatrix}$$

从第 j 列提出 $(a_j - x)$ $(j = 1, 2, \dots, n)$

$$D_n = \prod_{j=1}^n (a_j - x) \begin{vmatrix} \frac{a_1}{a_1 - x} & \frac{x}{a_2 - x} & \frac{x}{a_3 - x} & \cdots & \frac{x}{a_n - x} \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

由 $\frac{a_1}{a_1 - x} = 1 + \frac{x}{a_1 - x}$. 把第 j 列加于第1列 $(j = 2, 3, \dots, n)$

$$\begin{aligned} D_n &= \prod_{j=1}^n (a_j - x) \begin{vmatrix} 1 + \sum_{j=1}^n \frac{x}{(a_j - x)} & \frac{x}{a_2 - x} & \cdots & \frac{x}{a_n - x} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \\ &= \prod_{j=1}^n (a_j - x) \left[1 + \sum_{j=1}^n \frac{x}{(a_j - x)} \right] \\ &= x \prod_{j=1}^n (a_j - x) \left[\frac{1}{x} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j - x} \right] \end{aligned}$$

五、特殊情形的问题尽量从其一般情形考虑

若把特殊问题一般化,又能找到一般情形下的解题途径或已经知道了一般问题的解法,那么,特殊问题的解法是可以从中得到启示的.

例6 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a & x & x & \cdots & x & x \\ x & a & x & \cdots & x & x \\ x & x & a & \cdots & x & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & a & x \\ x & x & x & \cdots & x & a \end{vmatrix} \quad (a \neq x)$$

[分析] 例6是例5当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a$ 时的特殊情况,可以把 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a$ 代入例5的解答中,

$$\begin{aligned}
 D_n &= x(a-x)^n \left[\frac{1}{x} + \frac{n}{a-x} \right] \\
 &= (a-x)^n + n(a-x)^{n-1}x \\
 &= (a-x)^{n-1} [a + (n-1)x]
 \end{aligned}$$

或按例 5 的步骤把例 6 的行列式化为三角形.

(读者自己做)

或者把第 j 列加于第 1 列 ($j = 2, 3, \dots, n$), 再把第 1 行乘以 (-1) 加于第 i 行 ($i = 2, 3, \dots, n$)

$$\begin{aligned}
 D_n &= \begin{vmatrix} a + (n-1)x & x & x & \cdots & x & x \\ 0 & a-x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a-x \end{vmatrix} \\
 &= (a-x)^{n-1} [a + (n-1)x]
 \end{aligned}$$

(这个解法不同于例 5 的方法)

以下行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}$$

又是例 6 中 $a = 2, x = 1$ 的特殊情况. 这时若把 $x = 1, a = 2$ 代入例 6 的解答中, 可得出结果:

$$D_n = (2-1)^{n-1} [2 + n - 1] = (n+1)$$

或按例 6 的步骤求出结果.

六、注意条件与结论、形与数、内容与形式的合谐统一

这样才便于突出问题所涉及的对象之间的本质联系.

例 7 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且单调增加.

证明: 至少存在一点 $\xi \in [a, b]$ 使得

$$\int_a^b f(x) dx = f(a)(\xi - a) + f(b)(b - \xi) \quad (1)$$

[分析] 式(1)的几何解释, 依题意画出图形(见图 0-2):

(1) 函数 $y = f(x)$ 的曲线连接点 $F(a, f(a))$ 和 $C(b, f(b))$, 从左向右上升, 且曲线是连续的.

(2) 由曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = a, x = b$ 及 x 轴围成的曲边梯形的面积为

$$\int_a^b f(x) dx$$

(3) $f(a)(\xi - a)$ 表示矩形 $AGEF$ 的面积, 而 $f(b)(b - \xi)$ 表示矩形 $BCDG$ 的面积.

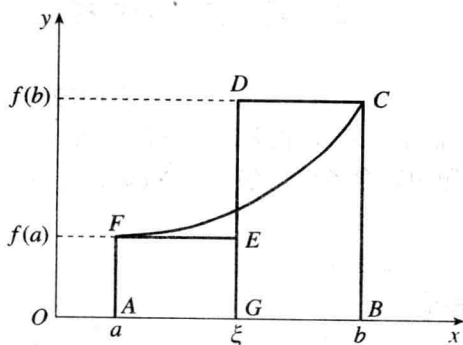


图 0-2

(4) 等式(1)的右边是这两个矩形面积之和,它是阶梯形 $ABCDEF$ 的面积

$$f(a)(\xi - a) + f(b)(b - \xi)$$

(5) 若把(1)式右端的 ξ 改成 x , x 在 $[a, b]$ 中变动,就得到变动的阶梯形,其面积为

$$F(x) = f(a)(x - a) + f(b)(b - x)$$

在这样的阶梯形中,当 $x = a$ 时面积最大,等于 $F(a) = f(b)(b - a)$;当 $x = b$ 时,面积最小,等于 $F(b) = f(a)(b - a)$,曲边梯形的面积在这两个面积之间,即

$$F(a) \geq \int_a^b f(x)dx \geq F(b)$$

(6) 等式(1)表明:存在一个阶梯形,其面积恰好等于该曲边梯形的面积.

从以上图形的解释中,明确了解决问题的关键在于作一个辅助函数

$$F(x) = f(a)(x - a) + f(b)(b - x)$$

使 $F(b) \leq \int_a^b f(x)dx \leq F(a)$

又 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,这样,就能用闭区间 $[a, b]$ 上连续函数的介值定理.

[证明] 设 $F(x) = f(a)(x - a) + f(b)(b - x)$. 它显然在 $[a, b]$ 上连续,且由 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,单调增加,所以,对任意 $x \in [a, b]$

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b)$$

$$\therefore f(a)(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq f(b)(b - a)$$

$$\text{即 } F(b) \leq \int_a^b f(x)dx \leq F(a)$$

由闭区间上连续函数的介值定理知:存在 $\xi \in [a, b]$,使

$$\int_a^b f(x)dx = F(\xi)$$

$$= f(a)(\xi - a) + f(b)(b - \xi)$$

注意:在运用以上各策略原则时,应从具体问题的特点出发,灵活地结合起来运用,才能启发我们发现解题线索.

§ 1.2 隐含条件的挖掘

若面临的数学问题较难,则往往有一些条件隐含在问题中,这时,关键在于把隐含在问题中,解题又需要的条件挖掘出来,以便解决问题时使用.

下面总结挖掘数学问题中隐含条件,突破关键问题的方法,对于提高解题能力,是很有意义的.

隐含条件可以从以下几方面挖掘.

一、从概念的特征中挖掘

有时,解题所需要的条件,要从理解、分析问题所涉及的主要概念的特征中入手来挖掘.

例1 已知向量组(I) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, (II) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, (III) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$, 若各向量组的秩分别为

$$r(I) = r(II) = 3, r(III) = 4$$

证明:向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5 - \alpha_4$ 的秩为 4.

[分析] 这一问题所涉及的主要概念是向量组的秩:

$r(I) = r(II) = 3$, 表明 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的极大线性无关组, 因而存在数 l_1, l_2, l_3 , 使:

$$\alpha_4 = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + l_3\alpha_3 \quad (1)$$

要证明 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5 - \alpha_4) = 4$

$$\text{只需证, 若 } k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4(\alpha_5 - \alpha_4) = 0 \quad (2)$$

则必有 $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$

这可以由 $r(III) = 4$ 推出: 把(1)代入(2)

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4[\alpha_5 - l_1\alpha_1 - l_2\alpha_2 - l_3\alpha_3] = 0$$

$$\text{即 } (k_1 - k_4l_1)\alpha_1 + (k_2 - k_4l_2)\alpha_2 + (k_3 - k_4l_3)\alpha_3 + k_4\alpha_5 = 0$$

$r(III) = 4$ 即 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$ 线性无关

$$\therefore k_4 = 0 \quad k_1 - k_4l_1 = k_2 - k_4l_2 = k_3 - k_4l_3 = 0$$

$$\therefore k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$$

即 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5 - \alpha_4$ 线性无关

$$\therefore r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5 - \alpha_4) = 4$$

二、从图形特征中挖掘

有时解题所需要的条件,可以从几何解释的图形特征中挖掘来.

例2 假设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 中有二阶导数, 过点 $A(0, f(0))$ 与 $B(1, f(1))$ 的直线与曲线 $y = f(x)$ 相交于点 $C(c, f(c))$, 其中 $0 < c < 1$.

证明: 在 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ξ , 使

$$f''(\xi) = 0$$

[分析] 从 $f(x)$ 所满足的条件知: $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 中连续且可导, 只需能在 $(0, 1)$ 中找到两点 η_1 和 η_2 , 使 $f'(\eta_1) = f'(\eta_2)$.