余贤斌 编著

岩土工程中的有限单元法

云南科技出版社

岩土工程中的有限单元法

余贤斌　编著

云南科技出版社

责任编辑：王　韬
封面设计：杨　峻

云南科技出版社出版发行（昆明市书林街 100 号）
昆明理工大学印刷厂印装

开本：787×1092　1/32　印张：6.5　字数　151 千
1996 年 12 月第 1 版　　1996 年 12 月第 1 次印刷
印数：1～1000

ISBN 7－5416－0933－1/O·33　定价：7.60 元
若发现印装错误请向承印厂联系

内容简介　本书较系统地介绍了有限单元法的基本原理及其在岩土工程中的应用状况和对岩土工程中某些特殊问题的处理方法。作为有限单元法的预备知识，首先简要介绍了弹性力学的基本理论和公式。最后简要介绍了边界单元法的基础知识。

本书主要内容包括：弹性力学基础、平面问题有限单元法的原理、高阶单元、轴对称问题、非线性问题的原理及解法、动力学问题、有限元法在岩土工程中的应用、边界单元法基础。

本书可供岩土工程有关部门的工程技术人员参考，也可作为高等院校有关专业本科生和研究生的教学参考书。

前　　言

有限单元法是对各种复杂工程结构进行分析计算的有力工具，自70年代引入我国以来，在许多行业和部门都得到了广泛的发展和应用，发表和出版了大量的论文、专著和教材。然而，在矿山、交通、基础设施建设等与岩土工程有关的行业，却缺少既能反映目前有限元法发展水平和动态，又适合于初学者学习使用的参考书。对于一个初次接触有限元法的读者，要在浩如烟海的文献中找到适合于自己学习的内容，是十分困难的。本书就是以为初学者架设达到这一目的的桥梁而编写的。

有限单元法的内容十分丰富，本书的有限篇幅不可能将这些内容完全包括。对于想全面了解和深入研究有限单元法的读者，本书只能看作入门的参考书，了解了本书的内容后，再参阅一些较全面或较专门的著作。初学者可以只学习第三章、第四章和第八章的前几节，在熟悉了有限元法的基本内容和方法后，再学习其它章节。

边界单元法是较有限单元法稍后出现的一种数值计算方法，在某些条件下，它比有限元法有独到的优越之处。因此，本书在最后一章简要介绍了边界元法的基本内容。

由于编著者水平所限，加上岩土塑性力学等内容本身尚不完善，本书错误和不妥之处在所难免，恳请批评指正。

编著者

1996年10月

目　录

第一章　绪　论

对结构体进行应力分析，力求使所设计的工程结构体具有合理的形状尺寸而且安全可靠，是工程设计中的一个基本任务。对于普通的杆状结构，使用材料力学的理论和公式就可以完成这一任务。对于工程中大量出现的非杆状结构体，则需要在弹性力学范围内才能进行其分析计算。岩土工程所面临的情况更为复杂，通常还要进入塑性力学，并考虑到结构面等因素或与时间有关的变形（即流变）特性时，才能获得较为接近实际情况的解答。然而，迄今为止，由于数学上的困难，弹性力学仅在少数比较简单的问题上，获得了实用的解析解答，大量几何形状和荷载条件并不复杂的结构体，未能得到解析解答。工程中所面临的问题常常是，按实际情况抽象出来的计算模型，在数学上难以求解；为了在数学上易于求解而采取的过分简化了的模型，却又与实际情况相去太远。塑性力学和流变学的有关方程更为复杂，所获得的实用解答更少。因此，采用近似的求解方法以获得工程问题的数值解，在结构分析中就有着十分重要的意义。

有限单元法就是一种数值求解方法。它以电子计算机为工具，将微分方程的求解转变成了线性代数方程组的求解，克服了数学上求解的困难。它比起某些基于能量原理的变分法以及差分法等数值方法更为有效，目前已经成为结构分析中高度通用的计算方法，在许多行业和领域中得到了广泛的应用。

有限单元法不直接求解微分方程，而是将工程结构划分成若干个尺寸为有限大小的单元体，即，把连续的结构体离散化。由于单元尺寸不是无限小，单元总数也必是有限多个，这就是有限单元法这一名称的来源。单元之间仅在边界上的某些点相互连接，这就是节点。将离散化的单元组合起来，在满足弹（塑）性力学有关方程的前提下，可以获得有限单元法的基本方程和计算公式，经过计算就可以得到问题的解答。离散化后组合起来的结构体与真实结构体的差别在于，组合体中单元之间的连接点只有节点，此外再无任何联系，因此，单元间力的传递也只能通过节点来进行。单元间的相互连接虽然只有有限的几个点，它们的公共边界却必须满足变形协调条件，即受力变形后单元的边与边之间既不能出现裂缝，也不能发生相互重叠，这样，对组合体求解的结果才与原来真实结构体的结果一致。

简要地说，有限单元法解题可分为以下几步：

1. 将结构体划分成若干单元。为适应不同问题的需要，可以使用各种不同类型的单元。如平面问题中有三角形单元、直边四边形单元、曲边四边形单元，空间问题中有四面体单元、平面以及曲面六面体单元，以及梁单元、板单元、壳单元等。

2. 对每一个单元进行分析，建立节点力与节点位移之间的关系。

3. 将单元组合起来，形成完整的结构体。在力学上，就是通过能量原理建立节点的平衡方程，得到一个节点力与节点位移之间相互关系的线性代数方程组，这就是有限单元法的基本方程。

4. 把外荷载分配到节点上，并考虑结构体的约束条件。

5. 求解有限元基本方程，得到各节点的节点位移值。

6. 根据节点位移计算各单元的应力和应变。

对于弹塑性、流变等方面的问题，还要进行多次迭代计算，以获得最终的解答。

在通常情况下，对结构体所划分的单元和节点数量越多，计算结果的精度就越高。将问题简化为平面问题进行计算时，一个实际工程结构体通常需要几百至几千个节点，空间问题则需要几千个节点以上。所获得的基本方程虽系线性代数方程组，但因未知数多，计算工作量巨大，用手工方法来获得解答是不可能的，只能依靠电子计算机。

由于不需要结合边界条件求解微分方程，许多本来难于求解的问题对有限元法也变得容易处理，例如：

1. 各种复杂边界条件下问题的求解，可以很容易地通过单元网格的不同划分来方便地处理。

2. 对应力集中问题，可以在应力集中区减小单元尺寸、增加单元数量，以提高计算精度。在应力梯度变化较大的部位，也可以用这样的方法处理。

3. 有限单元法并不要求所有单元都具有相同的力学性质，因此可以十分方便地处理具有各向异性性质的材料以及由多种不同性质材料组合而成的组合体。

4. 可以处理材料非线性（即应力应变关系非线性）、几何非线性（即大变形问题）、流变学、动力学等传统理论计算方法几乎无能为力的问题。

有限单元法的概念是50年代中期提出来的，初期主要用于航空航天器的结构计算分析。由于这种方法具有一系列优点，在60年代得到了广泛的发展，在机械制造、土木工程等领域的许多行业和部门都得到了广泛的应用，目前已被用于固体力学的几乎所有分支，还被用以解决电磁场、流体力学、声学等非结构领域的问题。适应性强、应用范围广，这就是有限单元法的

主要优点。

有限单元法是利用事先编制好的程序以电子计算机为工具来进行分析计算的。使用一个大型通用程序，就可以解决多种学科领域的问题。有的程序则是专为解决某一学科或部门的问题而编制的。目前，有限元程序正日益与CAD（计算机辅助设计）技术相结合，使有限元法成为分析计算和工程设计的自动化工具。

有限单元法的缺点之一是计算量大，对电子计算机的存储量和计算量都有较高的要求，在三维问题和非线性分析中尤其如此。在岩土工程中，由于材料性质本身的复杂性，目前人们对岩土材料本构关系的认识尚不充分，有关理论还不完善，同时，由于岩土材料的力学指标和初始应力等参数难于准确测定，致使有限元法的计算结果还难于与工程现场的状况完全吻合。这种状况的改善有赖于对岩土材料力学性质认识上的深化。

第二章　弹性力学基础

2.1　概述

我们都知道，材料力学是研究工程材料的强度、刚度与稳定性的，当结构体处于拉伸、压缩、剪切、挤压、扭转和弯曲受力状态以及这些受力状态的组合状态时，我们可以根据材料力学的有关公式计算结构体的应力和变形，进行强度校核，实现结构体设计的目标。然而，对材料力学的有关公式进行分析就可以发现，它们只能用于一种类型的结构体——杆件。杆件是最简单的结构体，其特点是长度远大于宽度和厚度。除杆外，工程中其它类型的结构体还有板、壳和体。板的特点是厚度远小于长度和宽度；壳是中轴面具有曲率的板；体则是三个方向尺寸大体相同的结构体。材料力学只能解决杆状结构力学分析的任务，板、壳和体的受力分析则是另一门课程——弹性力学的任务。同时，对杆状结构作进一步的分析，以校核材料力学解答的正确性，也要用到弹性力学。这是因为，为了简化数学推导，材料力学中大都引用了一些关于结构体变形状态或应力分布的假定，因而得到的解答有时只是近似的。弹性力学在研究杆状结构时，一般不必引用那些假定，因而所得解答就比较精确。

例如，在材料力学中计算带圆孔受拉板的应力时，就假定开孔后板内的应力仍然保持均匀分布。弹性力学的计算结果则

表明，孔附近的应力远不是均匀分布的，孔边的最大应力是平均应力的几倍。又如，材料力学在研究梁的弯曲时，引入了平面截面假定，由此得出了梁横截面上的应力按线性分布的结论。弹性力学则不需要引入平面截面假定，并且可以证明，这一假定在多数情况下并不正确；同时还可以证明，梁横截面上的正应力并不总是按线性规律分布的，在梁的高度与跨度尺寸大体相同的情况下，材料力学正应力的计算公式就会产生成倍的误差。

几乎所有自然材料（如岩石和木材）和人工材料（如金属和陶瓷）都在不同程度上具有弹性，即，移去所施加的外荷载，变形就消失；同时也具有不同程度的塑性，即，移去外荷载后，有一定量的变形是不可恢复的永久变形。

实际的材料，这两种性质是同时存在的。但在变形较小的情况下，大多数工程材料的塑性变形都远小于弹性变形。略去塑性变形，进行科学的抽象，我们认为工程材料构成的结构体是完全弹性体，简称弹性体。经典弹性力学所研究的对象，就是这种完全弹性体。

从理论上说，弹性力学可以计算一切弹性体的应力和变形。但由于在求解有关方程时存在数学上的困难，许多工程问题未能获得解析解。以电子计算机为工具的基础上发展起来的有限单元法，使这一困难迎刃而解。但有限单元法的发展离不开弹性力学的理论基础。

弹性力学对所研究的结构体有以下几条基本假设：

1. 结构体是连续的。即，结构体内每一处都被组成这种材料的介质所充满，没有任何空隙。这一假定使我们可以使用坐标的连续函数来描述结构体内的应力、变形等物理量。实际上，物体都是由微粒组成的，与这一假设不相符合。但是，由于微

粒的尺寸远小于结构体的尺寸，这一假设的引用不会产生明显的误差。

2. 结构体是均质的。即，结构体内的任意一点，都有完全相同的力学性质。

3. 结构体是各向同性的。即，材料在各方向都有相同的力学性质。

木材和层状岩体显然不是各向同性的。大多数工程材料都由晶体组成，晶体都是各向异性的，晶体的杂乱堆积也导致各点的性质不完全相同。但因晶粒很小，杂乱堆积而反映出来的宏观性质，基本符合这两条假设。

4. 结构体是完全弹性的。

5. 结构体受力后的变形是微小的。与结构体的原尺寸相比，可以忽略不计。

小变形假设使我们在推导有关方程时，可以略去变形的高阶微量，从而使方程简化为线性方程。

总之，弹性力学把实际的工程材料看作是连续、均质的完全弹性体，而且一般只考虑各向同性和小变形的情况。

2.2 应力、位移与应变

物体受到外力的作用，其形状和尺寸会发生变化，物体内部各部分之间，也将有附加内力产生。在一般情况下，各点的内力是不相同的。取一微小面积 ΔA 来考察，则通过 ΔA 的内力 ΔF 将作用在某一方向上。当面积 ΔA 趋于零时比值 $\Delta F/\Delta A$ 的极限，就称为应力。

对于应力，除某些公式推导外，通常不使用它在坐标轴方向的分量，而是使用与物体的变形和破坏直接相关的正应力 σ

和剪应力 τ，即应力在作用面上的法向分量和切向分量。

作用于物体上的外力有两种，一种是体积力，简称体力，如重力、离心力和磁力；另一种是表面力，简称面力，如静水压力和物体间的接触力。

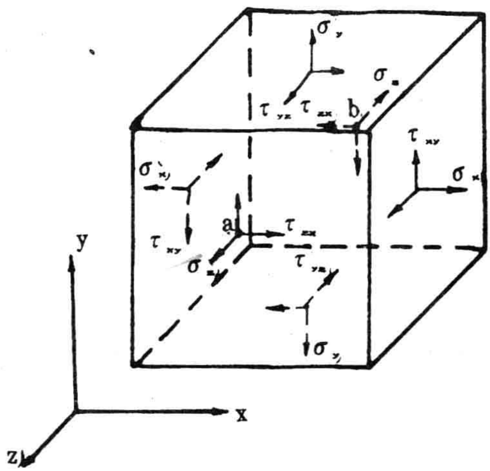

图 2—1

使用与坐标轴平行的平面，从受力体内切出一个微小的六面体，称为单元体。在一般情况下，六面体上应力的方向是未知的，但我们可以把每一个面上的应力分解为一个正应力和两个剪应力，如图 2—1。正应力的符号用 σ_x、σ_y、σ_z 来表示，下标为该应力的作用方向。剪应力则用符号 τ_{xy}、τ_{yz}、τ_{zx}来表示。在剪应力的两个下标中，第一个代表了它所在面的法线方向，第二个代表剪应力本身的作用方向。这样，为了表示一点的应力状态，共需 9 个应力分量，这就是，3 个正应力分量：σ_x、σ_y、σ_z 和 6 个剪应力分量：τ_{xy}、τ_{yx}、τ_{yz}、τ_{zy}、τ_{zx}、τ_{xz}。

应力分量的正负规定为：在外法线的指向与坐标轴正向一致的面上，应力的正向与坐标轴的正向一致；在外法线的指向与坐标轴的正向相反的面上,应力的正向与坐标轴的正向相反。图 2—1 的各应力分量都是在正方向。

应该说明的是，按照应力分量正负号的这一规定，正应力的符号与材料力学相同，即拉伸为正，压缩为负；但剪应力的符号则与材料力学的规定不同，这是应该加以注意的。

在图 2—1 中，设微元体在 x、y、z 三个方向上的长度分别为 dx、dy 和 dz，以连接前后两面中心的直线 ab 为力矩轴，列出力矩平衡方程，可得

$$2\tau_{yz}dxdz\cdot\frac{dy}{2}-2\tau_{zy}dydx\frac{dz}{2}=0$$

类似地，以连接左右两面中心和上下两面中心的直线为力矩轴列出平衡方程，化简，可得

$$\tau_{yz}=\tau_{zy},\qquad \tau_{zx}=\tau_{xz},\qquad \tau_{xy}=\tau_{yx}\qquad (2—1)$$

这就是剪应力互等定律。由此可知，描述一点的应力状态，实际上只有三个独立的正应力和三个独立的剪应力，共六个应力分量。

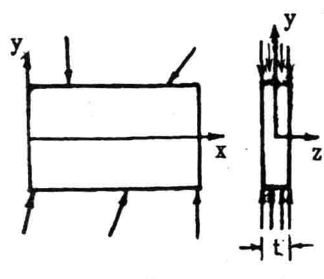

图 2—2

2.3 平面应力与平面应变

任何一个弹性体都是空间物体，因此，弹性力学问题实际上都是空间问题。但是，在某些特殊情况下，空间问题可以简化成平面问题来处理，计算工作量可大大减少，所得结果的精