

高等数学同步训练习题(下)

主 编 邢 军 张金海

副主编 潘 宇 金英善

清华大学出版社

高等数学同步训练习题 (下)

主 编 邢 军 张金海

副主编 潘 宇 金英善

清华大学出版社
北 京

内 容 简 介

本书是与同济大学《高等数学》第五版相配套的同步训练习题,分为上、下两册.上册内容为一元函数微积分、空间解析几何与向量代数,下册内容为多元函数微分学、重积分、曲线与曲面积分、无穷级数和微分方程.

本书是按教学大纲的要求而配备的习题,每一章后配备一套自测题,书的最后配备了四套期末模拟试题,旨在帮助学生迅速而全面地掌握所学内容.本书适用于工科本科生.

版权所有,侵权必究. 侵权举报电话: 010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步训练习题. 下/邢军, 张金海主编. —北京: 清华大学出版社, 2013. 1

ISBN 978-7-302-30841-6

I. ①高… II. ①邢… ②张… III. ①高等数学—高等学校—习题集 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 288325 号

责任编辑: 佟丽霞

封面设计: 常雪影

责任校对: 王淑云

责任印制: 宋 林

出版发行: 清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址: 北京清华大学学研大厦 A 座

社 总 机: 010-62770175

投稿与读者服务: 010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质量反馈: 010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

邮 编: 100084

邮 购: 010-62786544

印 装 者: 北京密云胶印厂

经 销: 全国新华书店

开 本: 260mm×185mm

印 张: 5.75

字 数: 118 千字

版 次: 2013 年 1 月第 1 版

印 次: 2013 年 1 月第 1 次印刷

印 数: 1~5500

定 价: 10.00 元

产品编号: 048751-01

前 言

本书是与同济大学《高等数学》第五版相配套的同步训练习题,分为上、下两册.上册内容为一元函数微积分、空间解析几何与向量代数.下册内容为多元函数微分学、重积分、曲线与曲面积分、无穷级数和微分方程.

本书是以同济大学《高等数学》第五版的章节为顺序,结合本校实际情况,与现行教学计划同步,并按教学大纲的要求而配备的习题,并且每一章最后配备一套自测题,书的最后还配备了四套期末模拟试题,旨在帮助学生迅速而全面地掌握所学内容.同时,这本书的形式为学

生的作业本,比较规范,既便于学生书写、保留,又便于教师批改.书后不配备相应的解答,有利于培养学生独立思考和解决问题的能力.

本书适用于工科本科生.

由于编者水平有限,书中难免有不妥之处,恳请专家、同仁不吝指教.

《高等数学同步训练习题》编写组

2012年10月

目 录

第八章 多元函数微分法及其应用	1	自测题	31
第一节 多元函数的基本概念	1	第十章 曲线积分与曲面积分	33
第二节 偏导数	2	第一节 对弧长的曲线积分	33
第三节 全微分	4	第二节 对坐标的曲线积分	35
第四节 多元复合函数的求导法则	5	第三节 格林公式及其应用	37
第五节 隐函数的求导公式	7	第四节 对面积的曲面积分	39
第六节 多元函数微分学的几何应用	9	第五节 对坐标的曲面积分	41
第七节 方向导数与梯度	11	第六节 高斯公式 通量与散度	43
第八节 多元函数的极值及其求法	12	第七节 斯托克斯公式 环流量与旋度	44
习题课 1	15	习题课 1	45
习题课 2	16	习题课 2	46
自测题	17	自测题	47
第九章 重积分	19	第十一章 无穷级数	49
第一节 二重积分的概念与性质	19	第一节 常数项级数的概念和性质	49
第二节 二重积分的计算法	20	第二节 常数项级数的审敛法	50
第三节 三重积分	23	第三节 幂级数	53
第四节 重积分的应用	27	第四节 函数展开成幂级数	55
习题课 1	29	第五节 傅里叶级数	57
习题课 2	30	第六节 一般周期函数的傅里叶级数	60

习题课 1	61	第七节 高阶线性微分方程	71
习题课 2	62	第八节 常系数齐次线性微分方程	72
习题课 3	62	第九节 常系数非齐次线性微分方程	73
自测题	63	习题课 1	75
第十二章 微分方程	65	习题课 2	76
第一节 微分方程的基本概念	65	自测题	77
第二节 可分离变量的微分方程	66	模拟试题五	79
第三节 齐次方程	67	模拟试题六	81
第四节 一阶线性微分方程	67	模拟试题七	83
第五节 全微分方程	69	模拟试题八	85
第六节 可降阶的高阶微分方程	69		

第八章 多元函数微分法及其应用

重点：各种偏导数的计算与二元函数微分法的几何应用及极值应用.

难点：复合函数求导、隐函数求导、方向导数、梯度及拉格朗日乘数法.

第一节 多元函数的基本概念

1. 填空题

(1) 设 $z = x + y + f(x - y)$, 且当 $y = 0$ 时 $z = x^2$, 则函数 $z =$ _____.

(2) 设 $f(x + y, x - y) = x^2 - y^2$, 则 $f(x, y) =$ _____.

(3) $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续是 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$ 存在的 _____

条件.

2. 求下列函数的定义域, 并画出定义域的图形:

(1) $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$;

(2) $z = \ln(y - x^2) + \sqrt{1 - x^2 - y^2}$;

(3) $z = \frac{1}{\sqrt{x + y}} + \frac{1}{\sqrt{x - y}}$;

(4) $u = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

第二节 偏 导 数

练 习 1

1. 求下列函数的偏导数:

(1) $z = \ln(x + \ln y)$;

(2) $z = \sin(\sqrt{x} + \sqrt{y})e^{xy}$;

(3) $f(x, y, z) = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}}$;

(4) $u = \sin(xyz) + x^2y + 3z^2 + 1$.

2. 设 $f(x, y) = \arctan \sqrt{\frac{y}{x}}$, 求 $f'_x(1, 1)$ 及 $f'_y(1, 1)$.

3. 设 $z = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y})$, 证明: $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}$.

练习 2

1. 填空题

(1) 设 $f(x, y) = x^2 + (y^2 - 1) \tan \sqrt{\frac{x}{y}}$, 则 $f'_x(x, 1)$
= _____.

(2) 曲线 $\begin{cases} z = \sqrt{1+x^2+y^2} \\ x=1 \end{cases}$ 在点 $(1, 1, \sqrt{3})$ 处的切线与 y 轴正向之间的夹角为 _____.

2. 求下列函数的二阶偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$:

(1) $z = y^x$;

(2) $z = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

3. 设 $z = e^{-x} \sin \frac{x}{y}$, 求 $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{(2, \frac{1}{\pi})}$.

第三节 全 微 分

1. 填空题

(1) 设 $z = x^{\ln y}$, 则 $dz =$ _____.

(2) 设 $z = e^{\sin xy}$, 则 $dz|_{(1,0)} =$ _____.

(3) $f(x, y)$ 在点 (x, y) 连续是 $f(x, y)$ 在该点可微分的 _____ 条件.

(4) $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 可微分是函数在该点的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$

及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 存在的 _____ 条件.

2. 求下列函数的全微分:

(1) $z = x^2 + xe^y + \arctan \frac{y}{x}$;

(2) $u = x^{xy}$;

(3) $\omega = z \arctan \frac{x}{y}$.

3. 求函数 $u = \ln(x + \sqrt{y^2 + z^2})$, 当 $x = 1, y = 0, z = 1$, $\Delta x = 0.2, \Delta y = 0.1, \Delta z = 0.2$ 时的全微分.

第四节 多元复合函数的求导法则

1. 设 $z = ue^{\frac{v}{u}}$, 而 $u = x^2 + y^2, v = xy$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

2. 设 $z = \arctan(xy)$, 而 $y = e^x$, 求 $\frac{dz}{dx}$.

3. 设 $z = u^v$, 而 $u = f(x), v = g(x)$ ($f(x), g(x)$ 均可导), 求 $\frac{dz}{dx}$.

4. 已知 $u = (x - y)^z$, 而 $z = x^2 + y^2$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$.

5. 设 $u = f\left(xy, \frac{x}{y}\right)$, 其中 f 具有一阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$.

6. 设 $z=f(xy^2, x+y)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

8. 设 $z=f(x+at, y+bt)$, 证明: $\frac{\partial z}{\partial t}=a \frac{\partial z}{\partial x}+b \frac{\partial z}{\partial y}$.

7. 设 $u=f(x^2+y^2+z^2)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数,

$$\text{求 } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

第五节 隐函数的求导公式

1. 填空题

(1) 设 $z = z(x, y)$ 由方程 $\frac{1}{z} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ 确定, 则 $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} =$ _____.

(2) $x = x(y, z), y = y(x, z), z = z(x, y)$ 都是由方程 $F(x, y, z) = 0$ 所确定的具有连续偏导数的函数, 则 $\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} =$ _____.

2. 求由下列方程所确定的隐函数的导数 $\frac{dy}{dx}$:

(1) $y^x = x^y$;

(2) $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \arctan \frac{y}{x}$ (用隐函数求导公式).

3. 求下列各题中的 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$:

(1) $x^3 + y^3 + z^3 = 3axyz$;

(2) $e^{x+y} \sin(x+z) = 1$.

4. 求由方程 $2xz - 2xyz + \ln(xyz) = 0$ 所确定的函数 $z = f(x, y)$ 的全微分.

5. 设 $z^3 - 2xz + y = 0$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

6. 设 $xyz = a^3$, 证明: $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = -2z$.

第六节 多元函数微分学的几何应用

1. 求曲线 $x = \frac{t^4}{4}, y = \frac{t^3}{3}, z = \frac{t^2}{2}$ 在对应于 $t=1$ 处的切线及法平面方程.

2. 求螺旋线 $x = a \cos \theta, y = a \sin \theta, z = b\theta$ 在点 $(a, 0, 0)$ 处的切线及法平面方程.

3. 在曲线 $x=t, y=t^2, z=\frac{t^3}{3}$ 上求一点, 使该点的切线平行平面 $x+y+z=1$, 并写出此切线方程.

4. 求曲面 $e^z - z + xy = 3$ 在点 $(2, 1, 0)$ 处的切平面及法线方程.

5. 求曲面 $z=2x^2+\frac{y^2}{2}$ 上平行于平面 $2z+2y-4x+1=0$ 的切平面方程,并求切点处的法线方程.

6. 试证曲面 $xyz=a^3(a>0)$ 的切平面与三坐标面围成的四面体的体积为一常数.

第七节 方向导数与梯度

1. 求函数 $z=x^2+y^2$ 在点 $P(1,2)$ 处沿从 P 到 $Q(-1,6)$ 方向的方向导数, 并求 $\text{grad}f(1,2)$.

2. 求函数 $u=x^2y+y^2z+z^2x$ 在点 $M(1,1,1)$ 处沿方向角为 $\alpha=\frac{\pi}{3}, \beta=\frac{\pi}{4}, \gamma=\frac{\pi}{3}$ 的方向的方向导数.

3. 求函数 $u=xyz$ 在点 $M_1(5,1,2)$ 处沿从点 M_1 到点 $M_2(9,4,14)$ 的方向的方向导数, 并求 $\text{grad}u(5,1,2)$.