北京大学研究生院策划

北大版

研究生入学考试

2005

线性代数

李永乐 编著

北京大学出版社

2005年研究生入学考试应试指导丛书

线 性 代 数

李永乐 编著

北京大学出版社
·北 京·

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/李永乐编著.一北京:北京大学出版社,2004.3
(2005年研究生入学考试应试指导丛书)
ISBN 7-301-04481-X

Ⅰ.线… Ⅱ.李… Ⅲ.线性代数-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.0151.2

内 容 简 介

本书是工学类、经济和管理学类硕士研究生入学考试科目“线性代数”的复习指导书.本书作者多年来一直参加有关考研数学试卷的阅卷和考研辅导班的教学工作,深知考生的疑难与困惑.作者把自己的教学经验结合考生与考试的实际加以细化、归纳和总结,整理成书奉献给广大读者,旨在提高考研者的数学水平与考试成绩.

本书紧扣数学考试大纲,贴切考试实践,内容丰富.全书共分七讲.内容包括:行列式,矩阵,向量,线性方程组,矩阵的特征值和特征向量,二次型、向量空间及一个附录(综合题选讲).本书结构新颖,每一讲按照:考试要求,复习要点(重要定义、定理及公式),典型例题分析,练习题四部分编写.概念叙述简捷,解题思路清晰,对典型例题从多侧面、不同角度、用多种解法进行讲解,注重对考生基本概念的理解、多种类型基础题目的训练和综合解题能力的培养,是考研者较好的复习指导书和良师益友.

本书可作为硕士研究生入学考试数学一至数学四的“线性代数”的复习指导书,对于在校的大学生、大专生及自学考试者,本书也是一本较好的学习参考用书.

书 名:线性代数
著作责任者:李永乐 编著
责 任 编 辑:刘 勇
标 准 书 号:ISBN 7-301-04481-X/G·0565
出 版 者:北京大学出版社
地 址:北京市海淀区中关村北京大学校内 100871
网 址:http://cbs.pku.edu.cn
电 话:邮购部 62752015 发行部 62750672 理科编辑部 62752021
电 子 信 箱:zpup@pup.pku.edu.cn
印 刷 者:北京飞达印刷厂
发 行 者:北京大学出版社
经 销 者:新华书店
787×1092 16开本 14印张 320千字
2001年4月第2版 2004年3月第3次修订
2004年3月第6次印刷
定 价:17.00元

前　言

为了帮助有志攻读硕士研究生的广大考生能在较短的时间内全面、系统地复习有关的数学内容，我们根据教育部制定的"全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲"的有关要求，结合我们多年参加数学考研及有关考试的命题、阅卷和辅导积累的经验，编写了这套数学《2005年研究生入学考试应试指导丛书》，其中包括复习指导书：《高等数学(工学类)》、《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》(基础篇)以及《数学模拟试卷(经济学类)》共5册，其中《线性代数》、《概率论与数理统计》(基础篇)供数学一至数学四考生共同使用，《微积分》、《数学模拟试卷(经济学类)》为经济学与管理学考生所编写。

本套应试指导丛书的每一章由以下四部分构成：

一、考试要求——编写这部分的目的是使广大考生明确每一章考的内容是什么，掌握到什么程度就可以了。在编写过程中，根据我们多年以来参加有关命题的经验把考试大纲所要求的内容加以细化、归纳和总结，使广大考生能够正确把握考试要求，这是区别于其他考研辅导书的一大特点。

二、重要定义、定理及公式——这部分根据考试大纲的要求，将概念、定理和公式、方法进行了简明扼要地叙述、归纳和总结；精选了各种典型的例题并作详细的解答，使得考生能够在较短的时间内对重点、难点、热点问题进行复习，全面、系统地掌握所需要的知识，在考试时能够拿得出、用得上。

三、典型例题分析——这部分根据考试大纲要求的题型进行了分类、归纳，总结了各种题型解题的方法及技巧，开阔了考生的解题思路，使所学的知识能够融会贯通，并迅速提高考生的综合解题能力。

四、练习题——每章的最后部分精选了适量的练习题，全部习题都附有答案或提示，这些题目作为考生巩固所学知识、复习有关内容时使用，这有利于提高考生分析问题和解决问题的能力。

《数学模拟试卷(经济学类)》一书由两部分组成：一部分是为了检查前一阶段考生复习效果、更好地提高考生的应试能力而设计编制的全真模拟试题共十四份，其中数学三、四各7份；另一部分是历年数学三、四考研试题及解答。

本套书可作为参加硕士研究生入学考试数学一至数学四考生的复习指导书，对于在校的大学生、大专生及自学考试者，本套书也是较好的学习参考用书。

由于编者水平有限，加之时间比较仓促，书中难免有错误和疏漏之处，恳请读者批评指正。

编　者

2004年3月

目　录

第一讲　行　列　式

一、考试要求

1. 理解 n 阶行列式的概念，掌握行列式的性质.
2. 会应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式.

二、复习要点

(一) 重要定义

定义 1.1　由 $1,2,\cdots,n$ 组成的有序数组称为一个 **n 阶排列**. 通常用 $j_1j_2\cdots j_n$ 表示 n 阶排列.

定义 1.2　一个排列中，如果一个大的数排在小的数之前，就称这两个数构成一个**逆序**. 一个排列的逆序总数称为这个排列的**逆序数**. 用 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 表示排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数.

如果一个排列的逆序数是偶数，则称这个排列为**偶排列**，否则称为**奇排列**.

例 1　在 5 阶排列 25134 中，共有逆序 21,51,53,54，即 $\tau(25134)=4$，所以 25134 是偶排列.

例 2　在 6 阶排列 365412 中，共有逆序

$$31,32,65,64,61,62,54,51,52,41,42,$$

即 $\tau(365412)=11$，所以 365412 是奇排列.

例 3　自然排列 $12\cdots n$ 的逆序数 $\tau(12\cdots n)=0$，所以 $12\cdots n$ 是偶排列，而 n 阶排列 $n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数

$$\tau(n(n-1)\cdots 21)=(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\frac{1}{2}n(n-1),$$

所以当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时，$n(n-1)\cdots 21$ 是偶排列，而当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时，$n(n-1)\cdots 21$ 是奇排列.

定义 1.3　**n 阶行列式**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

的代数和，这里 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列. 当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时，该项的前面带正号；当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时，该项的前面带负号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}, \tag{1.1}$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 阶排列求和. 式(1.1)称为 n 阶行列式的**完全展开式**.

例 4 已知 $a_{23}a_{31}a_{42}a_{ij}a_{56}a_{14}$ 是六阶行列式中的一项,试确定该项所带的正负号.

解 根据行列式的定义,它是不同行不同列元素乘积的代数和,因此必有 $i=6, j=5$.

将该项的行按自然顺序排好,有

$$a_{23}a_{31}a_{42}a_{65}a_{56}a_{14} = a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65},$$

此时,列的逆序数

$$\tau(4\ 3\ 1\ 2\ 6\ 5) = 3+2+0+0+1=6$$

是偶数,所以该项所带符号为正号.

说明 可以直接计算行的逆序数与列的逆序数,由于

$$\tau(2\ 3\ 4\ 6\ 5\ 1)+\tau(3\ 1\ 2\ 5\ 6\ 4)=6+4$$

是偶数,所以该项带正号.

例 5 用定义计算左上三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 因为 n 阶行列式的一般项是

$$(-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

在第 n 行中,若 $j_n\neq 1$,必有 $a_{nj_n}=0$,故不为 0 的项中 $j_n=1$. 在第 $n-1$ 行中,若 $j_{n-1}\neq 1$ 或 2,必有 $a_{n-1\,j_{n-1}}=0$,故只需考虑 j_{n-1}取 1 与 2 两种情况,因为 $j_{n-1}\neq j_n$,而 $j_n=1$,从而 $j_{n-1}=2$. 依次类推,行列式中不为 0 的项只有

$$(-1)^{\tau(n(n-1)\cdots 2\ 1)}a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n-1\,2}a_{n1},$$

据例 3,得

$$D=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n-1\,2}a_{n1}.$$

这说明左上三角行列式等于其主对角线元素的乘积,并带有正负号$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

定义 1.4 在行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中划去元素 a_{ij}所在的第 i 行、第 j 列,由剩下的元素按原来的排法,构成一个 $n-1$ 阶的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为元素 a_{ij}的**余子式**,记为 M_{ij}.

令
$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij},$$
A_{ij}称为元素 a_{ij}的**代数余子式**.

例 6 若行列式 $\begin{vmatrix} 1 & a & -2 \\ 0 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ 的代数余子式 $A_{21}=-2$,即 $(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}=-2$,可解出 $a=-1$.

（二）重要定理

定理 1.1 n 阶行列式
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
等于它的任意一行的所有元素与它们各自对应的代数余子式的乘积之和,即
$$D=a_{k1}A_{k1}+a_{k2}A_{k2}+\cdots+a_{kn}A_{kn}\quad(k=1,2,\cdots,n).\tag{1.2}$$

公式(1.2)称为行列式按第 k 行的展开公式.

定理 1.2 n 阶行列式 D 等于它的任意一列的所有元素与它们各自对应的代数余子式的乘积之和,即
$$D=a_{1k}A_{1k}+a_{2k}A_{2k}+\cdots+a_{nk}A_{nk}\quad(k=1,2,\cdots,n).\tag{1.3}$$

公式(1.3)称为行列式按第 k 列的展开公式.

定理 1.3 设 n 阶行列式
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$
元素 a_{ij}的代数余子式为 A_{ij}. 当 $i\neq k$ $(i,k=1,2,\cdots,n)$时,有
$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=0;\tag{1.4}$$
当 $j\neq k$ $(j,k=1,2,\cdots,n)$时,有
$$a_{1j}A_{1k}+a_{2j}A_{2k}+\cdots+a_{nj}A_{nk}=0.\tag{1.5}$$

（三）重要公式

1. 上(下)三角行列式的值等于主对角线元素的乘积
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{11} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.\tag{1.6}$$

2. 两个特殊的拉普拉斯展开式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & \cdots & c_{nm} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}. \tag{1.7}$$

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nm} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ b_{11} & \cdots & b_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ b_{11} & \cdots & b_{1m} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} & c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{mn} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}. \tag{1.8}$$

3. 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n} (x_i - x_j). \tag{1.9}$$

4. 关于副对角线的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}. \tag{1.10}$$

5. 特征多项式

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^n - \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii} \right) \lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^k S_k \lambda^{n-k} + \cdots + (-1)^n |\boldsymbol{A}|, \tag{1.11}$$

其中 S_k 是 $\boldsymbol{A}$ 的全体 k 阶主子式的和.

6. 方阵的行列式

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵,则 $|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|$;

(2) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵,则 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$;

(3) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵,则 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$;

(4) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵,则 $|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^{-1}$;

(5) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵,$\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,则 $|\boldsymbol{A}|=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$;

(6) 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,则 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$.

(四) 行列式的性质

1. 行列互换,行列式的值不变,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

2. 行列式的某一行有公因子可以提出来,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{p1} & ka_{p2} & \cdots & ka_{pn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

特别地,若某行元素全为 0,则行列式的值为 0.

3. 如果行列式中某行的所有元素均为两数的和,则这个行列式等于两个行列式之和,这两个行列式分别以这两组数作为该行,其余各行与原行列式相同,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1}+a'_{p1} & a_{p2}+a'_{p2} & \cdots & a_{pn}+a'_{pn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{p1} & a'_{p2} & \cdots & a'_{pn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

4. 对换行列式中两行的位置,行列式反号.

特别地,如果行列式中有两行相同,则行列式为零;

如果行列式中有两行成比例,则行列式为零.

5. 把行列式某行的 k 倍加至另一行,行列式的值不变.

(五) 计算 n 阶行列式的主要方法

计算行列式的主要方法是降阶,用按行、按列展开公式(1.2)、(1.3)来实现,但在展开之前往往先用性质(特别是性质 5)对行列式做恒等变形,化简之后再展开.数学归纳法、递推法、公式法、三角化法、定义法等也都是常用方法.

把每一行(列)均加至"第"一行(列);把每一行(列)均减去"第"一行(列);逐行相加(减)是一些常用技巧,当零元素多时亦可立即展开.

三、典型例题分析

(一) 填空题

1. 计算 $\begin{vmatrix} 103 & 100 & 204 \\ 199 & 200 & 395 \\ 301 & 300 & 600 \end{vmatrix}=$________.

答案是：2000.

分析 行列式中第 1 列的三个数分别与 100,200,300 较接近，而第 3 列的数与 200,400,600 相近，故可把第 2 列的 -1 倍及 -2 倍分别加至 1 列与 3 列，第 2 列再提取公因数 100，便可化简计算，即

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 100 & 4 \\ -1 & 200 & -5 \\ 1 & 300 & 0 \end{vmatrix}=100\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=100\begin{vmatrix} 3 & -8 & 4 \\ -1 & 5 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=100\begin{vmatrix} -8 & 4 \\ 5 & -5 \end{vmatrix}$$

$$=2000.$$

2. 若 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & x & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{vmatrix}=0$，则 $x=$________.

答案是：$\frac{12}{5}$.

分析 行列式的左下角为 0，可用拉普拉斯展开式(1.7)，从而

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} x & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=0.$$

由此得 $-4(5x-12)=0$，解出

$$x=\frac{12}{5}.$$

3. 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=$________.

答案是：-3.

分析 本题解法较多，例如，由各行元素的和都是 3，可将每列均加至第 1 列，于是第 1 列可提出公因数 3，即

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\xlongequal[\text{倍分别加至各列}]{\text{(将第 1 列的 }-1\text{)}}3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-1)^3 = -3. \quad (公式(1.10))$$

4. 计算 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$ ________.

答案是：6.

分析 本题可以从第一行开始，将第 i 行的倍数加至第 $i+1$ 行，化成上三角行列式，然后用公式(1.6)，即

$$D_5 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & & & \\ & \frac{3}{2} & 1 & & \\ & 1 & 2 & 1 & \\ & & 1 & 2 & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & & & \\ & \frac{3}{2} & 1 & & \\ & & \frac{4}{3} & 1 & \\ & & 1 & 2 & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & & & \\ & \frac{3}{2} & 1 & & \\ & & \frac{4}{3} & 1 & \\ & & & \frac{5}{4} & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & & & \\ & \frac{3}{2} & 1 & & \\ & & \frac{4}{3} & 1 & \\ & & & \frac{5}{4} & 1 \\ & & & & \frac{6}{5} \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} = 6.$$

由于 a_{11} 的代数余子式是 D_4，因而也可直接对原行列式的第一行展开通过建立递推关系来求 D_5，即把 D_5 按第 1 行展开，建立递推关系：

$$D_5 = 2D_4 - \begin{vmatrix} 1 & 1 & & \\ & 2 & 1 & \\ & 1 & 2 & 1 \\ & & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2D_4 - D_3.$$

把上述关系整理成

$$D_5 - D_4 = D_4 - D_3,$$

那么，递推地运用上述关系式就有

$$D_5 - D_4 = D_4 - D_3 = D_3 - D_2$$
$$= D_2 - D_1 = 3 - 2 = 1.$$

因此 $$D_5 = D_4 + 1,$$

再一次递推，得到

$$D_5 = D_4 + 1 = D_3 + 2 = D_2 + 3$$

$$= D_1 + 4 = 6.$$

说明 对于形如

$$\begin{vmatrix} a & b & & & \\ c & a & b & & \\ & c & a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b \\ & & & c & a \end{vmatrix}$$

的行列式均可考虑用递推法.

5. 计算 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix} =$ ________.

答案是：$\prod_{i=1}^{n} a_i + (-1)^{n+1} \prod_{i=1}^{n} b_i$.

分析 本题的行列式中有大量的0，每行仅有两个元素非零，可以直接用公式(1,3)按列展开.例如对第1列

$$D = a_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & & & \\ & a_3 & b_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & b_{n-1} \\ & & & & a_n \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} b_n \begin{vmatrix} b_1 & & & \\ a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} \end{vmatrix}$$

前者是上三角行列式，后者是下三角行列式，用(1.6)即可.

6. 若 $\boldsymbol{A}$ 是3阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=2$，则 $||\boldsymbol{A}^*|\boldsymbol{A}|=$ ________.

答案是：128.

分析 因为行列式 $|\boldsymbol{A}^*|$ 是一个数，故应当用公式 $|k\boldsymbol{A}|$ 把 $||\boldsymbol{A}^*|\boldsymbol{A}|$ 化为 $|\boldsymbol{A}^*|^3|\boldsymbol{A}|$，再利用 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$ 可知 $||\boldsymbol{A}^*|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}|^{3n-2}$.

7. 已知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均是3阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=-3$，则 $\left|\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1}\right|=$ ________.

答案是：$-\frac{1}{6}$.

分析 首先用公式 $|k\boldsymbol{A}|$ 及 $|\boldsymbol{AB}|$ 有

$$\left|\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1}\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^3 |\boldsymbol{A}^*||\boldsymbol{B}^{-1}|.$$

再由 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$，$|\boldsymbol{B}^{-1}|=|\boldsymbol{B}|^{-1}$ 可知

$$\left|\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1}\right| = \frac{1}{8} \cdot |\boldsymbol{A}|^2 \cdot |\boldsymbol{B}|^{-1} = -\frac{1}{6}.$$

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 是3阶矩阵，其特征值是1,2,3，若 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}$，则 $|\boldsymbol{B}|=$ ________.

答案是：0.

分析 根据行列式与特征值之间的关系 $|\boldsymbol{A}|=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$，只要求出 $\boldsymbol{B}$ 的特征值即可计算出

$|\boldsymbol{B}|$.

由于 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 1,2,3,知 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的特征值是 2,3,4,那么$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^2$ 的特征值是 $2^2,3^2,4^2$.所以 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^2-4\boldsymbol{E}$ 的特征值是 $2^2-4,3^2-4,4^2-4$.因此$|\boldsymbol{B}|=0\cdot5\cdot12=0$.

因为 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$,又 1 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,故$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=0$.利用行列式乘法公式亦知$|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}|\cdot|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=0$.

对于特征值还不熟悉的同学可在复习完第五章之后再解本题.

(二) 选择题

1. 设$|\boldsymbol{A}|$是 3 阶行列式,$\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$,则$|\boldsymbol{A}|=$(　　).

(A) $|\alpha_1-\alpha_2\quad\alpha_2-\alpha_3\quad\alpha_3-\alpha_1|$;　　(B) $|\alpha_1+\alpha_2\quad\alpha_2+\alpha_3\quad\alpha_3+\alpha_1|$;

(C) $|\alpha_1+2\alpha_2\quad\alpha_3\quad\alpha_1+\alpha_2|$;　　(D) $|\alpha_1\quad\alpha_2+\alpha_3\quad\alpha_1+\alpha_2|$.

答案是:C.

分析　本题考查行列式的性质,分别对每个行列式作适当的列变换,向$|\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3|$靠拢.

(A) $|\alpha_1-\alpha_2\quad\alpha_2-\alpha_3\quad\alpha_3-\alpha_1|=|\boldsymbol{0}\quad\alpha_2-\alpha_3\quad\alpha_3-\alpha_1|=0$;

(B) $|\alpha_1+\alpha_2\quad\alpha_2+\alpha_3\quad\alpha_3+\alpha_1|=|2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\quad\alpha_2+\alpha_3\quad\alpha_3+\alpha_1|$

$=2|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\quad\alpha_2+\alpha_3\quad\alpha_3+\alpha_1|=2|\alpha_1\quad\alpha_2+\alpha_3\quad\alpha_3+\alpha_1|$

$=2|\alpha_1\quad\alpha_2+\alpha_3\quad\alpha_3|=2|\boldsymbol{A}|$;

(C) $|\alpha_1+2\alpha_2\quad\alpha_3\quad\alpha_1+\alpha_2|=|\alpha_2\quad\alpha_3\quad\alpha_1+\alpha_2|=|\alpha_2\quad\alpha_3\quad\alpha_1|=|\boldsymbol{A}|$;

(D) $|\alpha_1\quad\alpha_2+\alpha_3\quad\alpha_1+\alpha_2|=|\alpha_1\quad\alpha_2+\alpha_3\quad\alpha_2|=|\alpha_1\quad\alpha_3\quad\alpha_2|=-|\boldsymbol{A}|$.

请说出每个等号成立的理由,作的什么变换?用的什么性质?

2. 已知$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=3$.则

$$\begin{vmatrix}a_{11}&2a_{31}-5a_{21}&3a_{21}\\a_{12}&2a_{32}-5a_{22}&3a_{22}\\a_{13}&2a_{33}-5a_{23}&3a_{23}\end{vmatrix}=(\quad).$$

(A) 18;　　(B) -18;　　(C) -9;　　(D) 27.

答案是:B.

分析　对行列式作恒等变形.由于

$$\begin{vmatrix}a_{11}&2a_{31}-5a_{21}&3a_{21}\\a_{12}&2a_{32}-5a_{22}&3a_{22}\\a_{13}&2a_{33}-5a_{23}&3a_{23}\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}a_{11}&2a_{31}-5a_{21}&a_{21}\\a_{12}&2a_{32}-5a_{22}&a_{22}\\a_{13}&2a_{33}-5a_{23}&a_{23}\end{vmatrix}$$

$$=3\begin{vmatrix}a_{11}&2a_{31}&a_{21}\\a_{12}&2a_{32}&a_{22}\\a_{13}&2a_{33}&a_{23}\end{vmatrix}=-6\begin{vmatrix}a_{11}&a_{21}&a_{31}\\a_{12}&a_{22}&a_{32}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{vmatrix}=-6\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}.$$

所以应选 B.

3. 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\gamma$ 都是 3 维列向量,且行列式

$$|\alpha_1\quad\beta_1\quad\gamma|=|\alpha_1\quad\beta_2\quad\gamma|=|\alpha_2\quad\beta_1\quad\gamma|=|\alpha_2\quad\beta_2\quad\gamma|=3,$$

那么$|-2\gamma\quad\alpha_1+\alpha_2\quad\beta_1+2\beta_2|=$(　　).

(A) -18；　(B) -36；　(C) 64；　(D) -96.

答案是：B.

分析　本题考查行列式的性质，利用性质 3 可以有

$$\begin{aligned} |-2\gamma\ \ \alpha_1+\alpha_2\ \ \beta_1+2\beta_2| &= |-2\gamma\ \ \alpha_1\ \ \beta_1+2\beta_2| + |-2\gamma\ \ \alpha_2\ \ \beta_1+2\beta_2| \\ &= |-2\gamma\ \ \alpha_1\ \ \beta_1| + |-2\gamma\ \ \alpha_1\ \ 2\beta_2| + |-2\gamma\ \ \alpha_2\ \ \beta_1| + |-2\gamma\ \ \alpha_2\ \ 2\beta_2| \\ &= -2|\alpha_1\ \ \beta_1\ \ \gamma| - 4|\alpha_1\ \ \beta_2\ \ \gamma| - 2|\alpha_2\ \ \beta_1\ \ \gamma| - 4|\alpha_2\ \ \beta_2\ \ \gamma|, \end{aligned}$$

所以应选(B).

4. $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = (\quad)$.

(A) $a_1a_2a_3a_4-b_1b_2b_3b_4$；　(B) $a_1a_2a_3a_4+b_1b_2b_3b_4$；

(C) $(a_1a_2-b_1b_2)(a_3a_4-b_3b_4)$；　(D) $(a_1a_4-b_1b_4)(a_2a_3-b_2b_3)$.

答案是：D.

分析　本题有较多的零，请读者先直接按第 1 行展开来计算行列式的值，下面用公式(1.7)给出另一种方法. 由行列式性质 4，有

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \end{vmatrix}.$$

所以应选 D.

作为 3 阶行列式，按定义有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

这 6 项可以按图 1.1 所示来记忆.

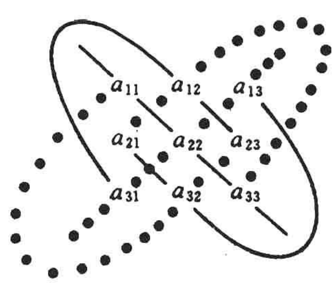

图 1.1

图 1.1 中，由左上至右下的实线上 3 个元素的乘积所构成的 3 项都带正号，由右上至左下的虚线上 3 个元素的乘积所构成的 3 项带负号. 但 4 阶行列式或 4 阶以上的行列式没有这种算法，若选(A)或(B)则是概念的理解上混淆了，要引起注意.