马锐　赵萍

微积分考研强化训练指导

WEIJIFENKAOYAN
QIANGHUAXUNLIAN
ZHIDAO

云南科技出版社

马锐　　赵萍

微积分考研
强化训练指导

WEIJIFEN
KAOYAN
QIANGHUAXUNLIAN
ZHIDAO

云南科技出版社
·昆　明·

图书在版编目(CIP)数据

微积分考研强化训练指导/马锐,赵萍编著.—昆明:
云南科技出版社,2004.6
ISBN 7-5416-1995-7

Ⅰ.微... Ⅱ.①马...②赵... Ⅲ.微积分—研究生
—入学考试—自学参考资料 Ⅳ.0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 056436 号

云南科技出版社出版发行
(昆明市环城西路 609 号云南新闻出版大楼 邮政编码:650034)
云南教育印刷厂印刷 全国新华书店经销
开本:850mm×1 168mm 1/32 印张:12.25 字数:300 千字
2004 年 6 月第 1 版 2004 年 6 月第 1 次印刷
定价:26.50 元

前　　言

《微积分》对于财经院校学生的重要性是不言而喻的。已出版的多种《微积分》复习参考书和习题解答曾给予许多学生极大的帮助。然而，由于近年来教学改革的实施：一方面《微积分》授课时数减少，由于时间的限制，概念的深入探讨，知识点的融会贯通及知识面的拓展势必受到影响，因此相当多的学生反映听不懂考研辅导班的辅导内容。另一方面，进入 21 世纪，大学毕业生报考硕士研究生的人数逐年增加，而经济管理类研究生入学考试《高等数学》被视为考研的"敲门砖"之一，因此在校生参加考研辅导班的人数也在逐年增加。再一方面，高校年年扩招，使得学生水平参差不齐，教师很难用原来的"一刀切"的模式组织教学.

如何解决这一新的矛盾呢？我们通过尝试分层次教学，按照各专业对教学的要求不同进行教学。开办《微积分》同步强化班，开设以考研为目标的数学选修课，尽量区分考研学生和其他学生的教学，本书，就是在这样的形势下产生的.

本书是作者多年的本科教学经验以及研究生入学考试辅导经验的总结，并广泛征求了专家以及我校数学教研室同仁的意见，决定把本书编写成一本大学期间《微积分》的学习与研究生入学考试复习紧密衔接的全新的学习指导用书，帮助那些有志于将来进一步深造的同学扩大并增强对《微积分》内容的掌握和理解，拓宽解题思路和提高解题技巧，使学生在学习《微积分》和考研复习时做到节省复习时间，从而使学生达到大幅度提高数学素质和应试能力的目的.

全书一到五章由马锐老师撰写，六到九章由赵萍老师撰写.

全书参考了许多数学前辈，专家教授的成果，在此一并深表谢意.

作者

2004年2月

目　　录

第一章　预备知识与函数

要求与说明

1. 理解实数与实数绝对值的概念，掌握解简单绝对值不等式的方法.

2. 理解区间与邻域的概念，掌握区间与邻域的解法.

3. 理解函数、函数的定义域和值域等概念，熟悉函数的表示法.

4. 了解函数的几何特性并掌握各几何特性的图形特征.

5. 了解反函数的概念；知道函数与其反函数的几何关系；给定函数会求其反函数.

6. 理解复合函数的概念；了解两个(或多个)函数能构成复合函数的条件；掌握将一个复合函数分解为较简单函数的方法.

7. 理解基本初等函数及其定义域、值域等概念；掌握基本初等函数的基本性质.

8. 理解初等函数的概念；了解分段函数的概念.

9. 会建立简单应用题的函数关系.

§1.1　预备知识

一、实数集与数轴

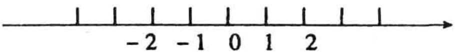
1. 实数集、实数的全体，称为实数集．实数集用 R 表示．

$$R=\{x \mid -\infty<x<+\infty\}$$

$$\text{实数}(R)\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数(自然数)}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数}\end{cases}\\ \text{无理数:无限不循环小数}\end{cases}$$

2. 数轴：一条具有方向、原点、单位长的轴，称为数轴．数轴的主要意义在于把一个实数表示出来．从原点出发，从左向右，越来越大，从右向左，越来越小．

数轴上的点与实数成一一对应关系．



我们的整套《微积分》体系，都是在实数范围内给出的．

二、绝对值

$\forall x \in R$

1：定义：$|x|=\begin{cases}x & x>0\\ 0 & x=0\\ -x & x<0\end{cases}$

2：运算：$|x+y| \leqslant |x|+|y|$

$|x-y| \geqslant |x|-|y|$

$|x||y|=|xy|$、$\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0)$

3：解绝对值不等式：

$|x|<a(a>0) \Longleftrightarrow -a<x<a$

$|x|>b \Longleftrightarrow x>b$ 或者 $x<-b$

三、区间

实数集的一个部分,称为区间．全体实数集是无限的,因此,区间分为有限区间和无限区间．

有限区间:介于两个有限实数之间的所有实数叫有限区间．按照是否包括两个端点的情形,分为开区间、闭区间、半开、半闭区间．

无限区间:不可能介于两个有限实数之间的所有实数,叫无限区间．

区间
- 有限区间
  - 开区间$(a、b) = \{x \mid a < x < b\}$
  - 闭区间$[a、b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$
  - 半开、半闭区间$(a, b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$
  - $[a、b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$
- 无限区间
  - $(-\infty, +\infty) = R = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}$
  - $(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}$
  - $[a, +\infty) = \{x \mid x \geqslant a\}$
  - $(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$
  - $(\infty, b] = \{x \mid x \leqslant b\}$

区间可以用数轴表示,包括的端点,画实心点,不包括的端点,画空心点.

四、邻域:邻近的区间

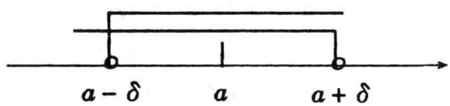
1. 定义:设 $a \in R, \delta \in R$,且 $\delta > 0$.

满足不等式 $|x - a| < \delta$ 的全体实数x,称为以 a 为中心,δ 为半径的邻域．

若附加条件 $0 < |x - a| < \delta$,叫做去心邻域．

用数轴表示为:

用区间表示为:



$|x - a| < \delta \Longleftrightarrow -\delta < x - a < \delta \Longleftrightarrow a - \delta < x < a + \delta$ 即$(a - \delta, a + \delta)$

例 1:满足 $|x+2|<5$ 的全体实数,称为以(　　)为中心,(　　)为半径的邻域,用区间表示,并在数轴上画出图形.

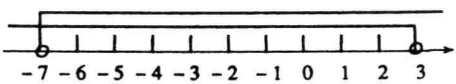
解:$\because$　$|x+2|<5$ 即 $|x-(-2)|<5$

$\therefore$　以 $a=-2$ 为中心,$\delta=5$ 为半径

解绝对值不等式:$-5<x+2<5$

$$-7<x<3$$

用区间表示为$(-7,3)$,画出图形:



例 2:设 $|x|>1$,问$\dfrac{\sin x}{x}$在哪个邻域内?

解:$\because$　$|x|>1$,而 $|\sin x|\leqslant 1$

$\therefore$　$\dfrac{|\sin x|}{|x|}<1$

即 $\left|\dfrac{\sin x}{x}-0\right|<1$

说明$\dfrac{\sin x}{x}$在以 0 为中心,1 为半径的邻域内.

§ 1.2　函数

一、函数定义

设 D 是一个非空实数集,若按照某一确定的对应法则 f,对于每一个 $x\in D$,都有唯一确定的实数 y 与之对应,则称对应法则 f 是定义在 D 上的函数,D 称为函数f的定义域,根据法则 f 与 D 中任一实数 x 相应的y 值,记作 $f(x)$,称为函数 f 在x 的函数值,全体函数值的集合.

$z = \{ \{ y \mid y = f(x), x \in D \} \subset R$ 称为函数的值域 .

二、确定函数的要素

1. 定义域;2. 对应法则

三、定义域

自变量 x 的许可值范围,叫定义域 .

在实数范围内,求函数的定义域有以下几条限制条件:

(1) 分式函数的分母不能为零;

(2) 偶次根的根底式为非负数;

(3) 对数符号下的式子(真数部分) 只能是正的;

(4) 反正弦函数、反余弦函数符号下的式子,只能介于 -1 和 1(包括 -1 和 1) 之间;

(5) 分段函数的定义域是各个部分自变量的取值范围之总和;

(6) 若函数式是由几个函数经过四则运算构成,其定义域是各个函数的定义域的公共部分 .

四、判定两个函数相同

(1) 对应法则一致 .

(2) 定义域相同 .

五、正确运用函数符号,求函数值

按函数值定义,对 D 中的任一 x 根据法则 f 所对应的因变量 y,记作 $f(x)$,称为函数 f 在 x 的函数值,当 x 取定值 x_0 时,所对应的因变量的值自然应记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$.

当函数 $f(x)$ 用一个解析表达式表示时,将表达式中之 x 代以 x_0 便得到 $f(x_0)$,对分段函数求函数 $f(x)$ 时,要根据 x_0 所在的区间,用 $f(x_0)$ 相对应的表达式求 $f(x_0)$.

例 1: 求 $y=(x-2)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ 的定义域．

解: 要使函数有定义，必须 $\begin{cases}\frac{x+1}{x-1}\geqslant 0\\ x-1\neq 0\end{cases}$

即　$x>1$ 或者 $x\leqslant -1$

用区间表示为 $(-\infty,-1]\cup(1、+\infty)$

例 2: $y=\ln\cos x$. 的定义域

解: 由 $\cos x>0$ 可得到函数的定义域是无限多个区间

$(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2})(k=0,\pm1,\pm2\cdots)$

例 3: 若 $f(x-1)=x^2$，求 $f(x+1)$

解: (一) 令 $x-1=t$，则 $x=t+1$　　$x+1=t+2$

$\therefore\ f(x+1)=(x+2)^2$

(二) $\because\ f(x-1)=x^2$

$\therefore\ f(x+1)=f[(x+2)-1]=(x+2)^2$

例 4: 设 $f(x)=\frac{x}{1-x}$，求 $f[f(x)]$ 和 $f\{f[f(x)]\}$

解: $\because f(x)=\frac{x}{1-x}$

$$\therefore f[f(x)]=\frac{f(x)}{1-f(x)}=\frac{\frac{x}{1-x}}{1-\frac{x}{1-x}}$$

$$=\frac{\frac{x}{1-x}}{1-\frac{1-2x}{1-x}}=\frac{x}{1-2x}$$

$$f\{f[f(x)]\}=\frac{f[f(x)]}{1-f[f(x)]}=\frac{\frac{x}{1-2x}}{1-\frac{x}{1-2x}}=\frac{x}{1-3x}$$

例 5:设 $f(x)=\frac{ax}{2x+3}$,且 $f[f(x)]=x$,则 $a=?$

解:将$f(x)=\frac{ax}{2x+3}$ 代入 $f[f(x)]=x$ 中,得

$$f[f(x)]=\frac{af(x)}{2f(x)+3}=\frac{a\frac{ax}{2x+3}}{2\frac{ax}{2x+3}+3}=x$$

解得 $a=-3$

例 6:设 $f(x+y、x-y)=x^2-y^2$. 求 $f(x、y)$

解:$\because\quad f(x+y、x-y)=(x+y)(x-y)$

令 $x+y=u,x-y=v$

$\therefore\quad f(u、v)=uv$

即 $\quad f(x、y)=xy$

§1.3 函数的性质

一、定义

1. 奇偶性:设函数 $f(x)$ 对于 $\forall x\in D$,若 $f(x)=f(-x)$

则 $f(x)$ 称为偶函数.若 $f(-x)=-f(x)$,则 $f(x)$ 称为奇函数.不满足以上两条者,称为非奇非偶函数 . 例如:$\sin x$、x^3 是奇函数,$\cos x$、x^2 是偶函数 .

2. 单调性: 设函数 $f(x)$ 对于定义域 D 中任意两点 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$时,总有

$f(x_1)<f(x_2)$ 或 $f(x_1)>f(x_2)$

则称 $f(x)$ 在 D 上是单调增加"↗" 或单调减少"↘""

3. 有界性:设函数 $f(x)$,对于 $\forall x\in D$,总 $\exists M>0$,使 $|f(x)|\leqslant M$(等号有无均可)

则称 $f(x)$ 在 D 上是有界函数,否则称 $f(x)$ 在 D 上是无界函

数 .

例如: $|\sin x| \leqslant 1$. $|\cos x| \leqslant 1$ 都是有界函数 .

4. 周期性:若存在一个正数 T,使得对 $\forall x \in D$,都有 $f(x \pm T) = f(x)$,则称 $f(x)$ 是周期函数,满足上式的最小正数 T 称为函数 $f(x)$ 的周期 .

例 1: 判定下列函数的奇偶性

1. $f(x) = \dfrac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}$

2. $F(x) = f(x) - f(-x)$

3. $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$

4. $f(x) = F(x)\left(\dfrac{1}{a^x + 1} - \dfrac{1}{2}\right)$,其中 $a > 0$,且 $a \neq 1$.

$F(x)$ 是奇函数

解: (1) $\because$ $f(-x) = \dfrac{a^{-x} - a^x}{a^{-x} + a^x} = \dfrac{-(a^x - a^{-x})}{a^x + a^{-x}} = -f(x)$

$\therefore$ $f(x)$ 为奇函数

(2) $\because$ $F(x) = f(-x) - f(x) = -[f(x) - f(-x)]$

$= -F(x)$

$\therefore F(x)$ 为奇函数

同理 $f(x) + f(-x)$ 为偶函数

(3) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$

$$f(-x) = \ln(-x + \sqrt{1 + x^2}) = \ln(\sqrt{1 + x^2} - x)$$

$$= \ln \frac{\sqrt{1 + x^2} - x)(\sqrt{1 + x^2} + x)}{\sqrt{1 + x^2} + x}$$

$$= \ln \frac{1}{\sqrt{1 + x^2} + x}$$

$$= -\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) = -f(x)$$

$\therefore$ $f(x)$ 为奇函数

(4) 设 $G(x)=\dfrac{1}{a^{x}+1}-\dfrac{1}{2}$

因 $\quad G(-x)=\dfrac{1}{a^{-x}+1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{a^{x}}+1}-\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{a^{x}}{1+a^{x}}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{a^{x}+1-1}{1+a^{x}}-\dfrac{1}{2}=1-\dfrac{1}{1+a^{x}}-\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{a^{x}+1}=-G(x)$ 是奇函数

又 $F(x)$ 也是奇函数

$\therefore \quad f(x)$ 是偶函数

例 2:设 $f(x)=x+\lg x$,证明其在定义域内单调上升 .

解:$\because \quad f(x)=x+\lg x \quad \therefore$ 其定义域 D 为 $(0,+\infty)$

又在 D 内 $\forall x_1 \in D \quad \forall x_2 \in D$

且 $x_1<x_2$ 则 $f(x_2)-f(x_1)=x_2+\lg x_2-(x_1+\lg x_1)$

$$=x_2-x_1+\lg x_2-\lg x_1$$

$$=x_2-x_1+\lg \frac{x_2}{x_1}$$

因 $x_1<x_2 \qquad x_2-x_1>0 \qquad \dfrac{x_2}{x_1}>1$

$\lg \dfrac{x_2}{x_1}>0$

$\therefore \quad f(x_2)-f(x_1)>0$,即 $f(x_2)>f(x_1)$

$f(x)$ 为单调上升的增函数 .

例 3:下列区间中,使 $f(x)=\lg(x-1)$ 有界的区间是(　　)

A:$(1,2)$ B:$(2,3)$ C:$(1,+\infty)$ D:$(2,+\infty)$

解: B 答案

因为 A$(1,2)$ 左端点无界

C$(1,+\infty)$ D$(2,+\infty)$ 都是右端点无界 .