普通高等教育“十二五”规划教材

概率论与数理统计

经管类

陈 灿 主编

科学出版社

普通高等教育"十二五"规划教材

概率论与数理统计

（经管类）

陈　灿　主编

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书是编者在充分考虑了经管类专业对概率论与数理统计课程要求的基础上，结合自身多年的教学经验编写而成的。全书共8章，分别是随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、数理统计的基础知识、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析。其中标星号的章节可根据实际需要选用。

本书可作为开设概率论与数理统计课程的综合大学及师范院校经济类、管理类各专业学生的教材，也可作为相关专业学生的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计：经管类/陈灿主编. —北京：科学出版社，2013
普通高等教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-03-037862-0

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①陈… Ⅲ. ①概率论-高等学校-教材 ②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第130386号

责任编辑：胡云志 任俊红 唐保军 / 责任校对：邹慧卿
责任印制：阎 磊 / 封面设计：华路天然工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京市文林印务有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2013年6月第 一 版 开本：720×1000 B5
2013年6月第一次印刷 印张：12 1/2
字数：242 000

定价：25.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

序　言

当今中国高等教育已从传统的精英教育发展到现代大众教育阶段.高等学校一方面要尽可能满足民众接受高等教育的需求，另一方面要努力培养适应社会和经济发展的合格人才，这就导致大学的人才培养规模与专业类型发生了革命性的变化，教学内容改革势在必行.高等数学课程是大学的重要基础课，是大学生科学修养和专业学习的必修课.编写出具有时代特征的高等数学教材是数学教育工作者的一项光荣使命.

科学出版社普通高等教育“十二五”规划教材出版的指导原则与云南省大部分高校的高等数学课程改革思路不谋而合，因此我们组织了云南省具有代表性的十所高校的数学系骨干教师组成项目专家组，共同策划编写了新的系列教材，并列入科学出版社普通高等教育“十二五”规划教材出版项目.本系列教材以大众化教育为前提，以各专业的发展对数学内容的需要为准则，分别按理工类、经管类和化生地类编写，第一批出版的有高等数学(理工类)、高等数学(经管类)、高等数学(化生地类)、概率论与数理统计(理工类)、概率论与数理统计(经管类)、线性代数(理工类)，以及可供各类专业选用的数学实验教材.教材的特点是，在不失数学课程逻辑严谨的前提下，加强了针对性和实用性.

参加教材编写的教师都是在教学一线有长期教学经验积累的骨干教师.本系列教材的第一稿已通过一届学生的试用，在征求使用本系列教材师生意见和建议的基础上作了进一步的修改，并通过项目专家组的审查，最后由科学出版社统一出版.在此对试用本系列教材的师生、项目专家组及科学出版社表示衷心感谢.

高等教育改革无止境，教学内容改革无禁区，教材编写无终点.让我们共同努力，继续编写出符合科学发展、顺应时代潮流的高质量教材，为高等数学教育作出应有的贡献.

郭　震

2012年8月1日于昆明

前　言

由于概率论与数理统计知识在经济及管理领域有着广泛应用，根据教育部颁布的高等学校经管类专业《概率论与数理统计》教学大纲要求，我们组织编写了这本教材。本书适用于经济类、管理类本科各专业，也可供其他非数学专业的学生作为参考书使用。

本书共8章。第1～4章主要安排了概率论的基础知识及内容，包含了随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征；第5～8章安排了数理统计的基础知识及内容，包含了数理统计的基础知识、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析。书中内容按一学期56学时进行设计与安排。

本书在编写过程中注意到了以下几个方面：

(1) 紧扣经管类专业《概率论与数理统计》教学大纲，理论部分以够用为宜，较多地列举了概率论与数理统计在社会、经济活动中的例子，使得本书更贴近现实生活与经济活动。

(2) 考虑到不同层次学生对课程的需求，在保证基本要求的同时，有针对性地在习题中安排了A、B两组练习，A组习题是为巩固教材中涉及的内容而安排的，B组习题是为学有余力并准备参加研究生考试的学生安排的，涉及内容及难度与相应研究生入学考试中的“高等数学”相联系，学生可通过B组习题训练掌握其需要的内容和常见习题类型。

(3) 在涉及微积分及线性代数的相关内容时，本着清晰、易学的原则进行了处理，以利于学生在学习概率论与数理统计知识时不会感到太困难。

(4) 对于知识内容的应用，本书尽量结合经济、管理中的问题，使学生通过学习进一步明确该课程在现实社会、经济、管理活动中是有用和有趣的，最终能结合教材内容解决一些现实问题，达到学以致用的目的。

本书第1章由陈灿编写，第2章由崔向照编写，第3章由李春编写，第4章由胡钊编写，第5、8章由刘鹏编写，第6、7章由康道坤编写。全书由崔向照进行统稿，李春负责校对，陈灿负责总纂。

本书在编写时参考了大量的相关教材和文献资料，并选用了部分内容和习题，在此一并向相关编著者及作者表示感谢！

由于编者水平有限，书中难免有不当之处，敬请读者批评指正。

编　者

2013年3月30日

目　录

第 1 章　随机事件与概率

人们今天生活在一个既会获得各种成功的可能性，同时又必须承担各种风险的可能性的时代，这种"可能性"的大小就成为人们非常关心的事实，而在数学领域有一个分支来专门研究"可能性"的大小和产生这种可能性的相关规律，这个分支就是概率论与数理统计．概率论与数理统计对研究经济和管理活动中的规律有其重要的意义，本章主要对随机事件及其概率作介绍．

1.1　随机事件及其运算

1.1.1　随机现象

自然界中有两类现象：一类是确定性现象（必然现象），即在一定条件下必然发生的现象；另一类是随机现象，即在一定条件下可能发生也可能不发生的现象，如表 1-1 所示．

表 1-1

必然现象	条件	随机现象	条件
水在 100℃ 沸腾	标准大气压下	射击一次中 8 环	正常状态
太阳从东方升起	明确东方方位下	掷一枚硬币正面向上	两面均匀
人必然会死亡	自然死亡下	学校门口 1 天通过汽车数	24h
水从高处往低处流	自然状态下	生男孩或生女孩	自然状态
……	……	……	……

随机现象有两个特点：①在一定条件下出现的结果不止一个；②这些结果事先不知道哪一个会出现，但随机现象的各种可能结果会表现出一定的规律性，这种规律性称为**统计规律性**．

1.1.2　随机试验与样本空间

在讨论之前先考查下面的试验：

(1) 向一个靶射击，对射击环数进行观察；

(2) 抛一枚硬币，对出现正面和反面进行观察；

(3) 掷一枚骰子一次，考察出现 6 点的情况；

(4) 考查一批炮弹的质量，记录不爆炸的发数；

(5) 观测某一种品牌手机的使用寿命.

从上面5个试验可以发现这类试验具有两个特点:

(1) 试验在相同条件下可以重复进行;

(2) 每次试验的结果不止一个且在试验前不能确定哪个结果会出现.

因此,人们通常把满足可重复性和随机性的试验称为**随机试验**,简称**试验**,记为E,而把随机试验的每一个可能结果称为**样本点**,记为ω.

随机试验的所有样本点构成的集合称为**样本空间**,记为$\Omega=\{\omega\}$,样本空间通常分为两类.若样本空间中样本点的个数为有限个或可列个,则称为**离散样本空间**;若样本空间中样本点的个数为无限不可列个,则称为**连续样本空间**.

例如,在上述试验中,相对应的样本空间分别为$\Omega_1=\{0,1,2,\cdots,10\}$,$\Omega_2=\{正,反\}$,$\Omega_3=\{1,2,3,4,5,6\}$,$\Omega_4=\{0,1,2,3,\cdots,n\}$,$\Omega_5=\{t\mid t\geqslant 0\}$,其中$\Omega_1$、$\Omega_2$、$\Omega_3$、$\Omega_4$是离散样本空间,$\Omega_5$为连续样本空间.

1.1.3 随机事件

若某件事在一次试验中可能发生也可能不发生,则称该件事为**随机事件**,也可以理解为Ω中的某些样本点组成的集合,它是Ω的子集,常用$A,B,C,\cdots$表示.

若某随机事件中的样本点只有一个,则称该事件为**基本事件**;若某随机件事在一次试验中一定发生,则称该件事为**必然事件**,记为Ω;若某随机件事在一次试验中一定不发生,则称该件事为**不可能事件**,记为$\varnothing$.

例如,对一靶位进行一次射击,考查命中的环数,则样本空间为$\Omega=\{0,1,2,\cdots,10\}$,而$A=\{5,6,7,8,9\}$是一个事件,$B=\{9\}$是一个基本事件,$\Omega$是一个必然事件,$\varnothing$是一个不可能事件.

1.1.4 事件的关系及运算

由于事件A是样本空间Ω的一个子集,因此事件的关系及运算可以用集合论中的关系及运算来处理,也就是用集合论中的符号来描述概率论中事件之间的关系及运算.

1. 包含关系

若属于A的样本点必属于B,则称 **A 包含于 B** 中或称 **B 包含 A**,记为$A\subset B$或$B\supset A$,用概率论语言描述为:事件A发生必然导致事件B发生.

例如,掷一颗骰子,$A=\{4\}$,$B=\{2,4,6\}$,则有$A\subset B$,对任意事件A,一定有$\varnothing\subset A\subset\Omega$.

2. 相等关系

若事件A与B相互包含,则称事件A与B **相等**,记为$A=B$.

例如，掷一颗骰子，$A=\{2,4,6\}$，$B=\{$偶数$\}$，则 $A=B$.

3. 互不相容

若 A 与 B 没有相同的样本点，则称 A 与 B **互不相容**. 用概率论语言描述为：事件 A 与 B 不可能同时发生.

例如，掷一颗骰子，$A=\{3,5\}$，$B=\{2,4,6\}$，则 A 与 B 互不相容.

4. 事件的并

由属于 A 或属于 B 的样本点构成的集合，称为事件 A 与 B 的**并**，记为 $A\cup B$. 用概率论语言描述为：事件 A 与 B 至少有一个发生.

例如，掷一颗骰子，$A=\{1,3,5\}$，$B=\{1,2,3\}$，则 $A\cup B=\{1,2,3,5\}$.

类似地，n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生，称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并，记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$；可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 中至少有一个发生，则称为 $A_1,A_2,\cdots$ 的并，记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty}A_i$.

5. 事件的交

由既属于 A 又属于 B 的样本点构成的集合，称为事件 A 与 B 的**交**，记为 AB. 用概率论语言描述为：事件 A 与 B 同时发生.

例如，在掷一颗骰子，$A=\{1,3,5\}$，$B=\{1,2,3\}$，则 $AB=\{1,3\}$.

类似地，n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生，称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的**交**，记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$；可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 同时发生，则称为 $A_1,A_2,\cdots$ 的交，记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty}A_i$.

6. 事件的差

由属于 A 但不属于 B 的样本点构成的集合，称为 A 与 B 的**差**，记为 $A-B$. 用概率论语言描述为：事件 A 发生而 B 不发生.

例如，掷一颗骰子，$A=\{1,2,3\}$，$B=\{2,4,6\}$，则 $A-B=\{1,3\}$.

7. 对立事件

事件 A 不发生称为事件 A 的**对立事件**，记为 $\overline{A}$.

例如，掷一颗骰子，$A=\{6\}$，则 $\overline{A}=\{1,2,3,4,5\}$.

两个事件 A 与 B 互为对立事件的充要条件为 $A\cup B=\Omega$，$AB=\varnothing$.

显然有 $A-B=A\overline{B}$.

概率论描述与集合论描述对照表如表 1-2 所示.

表 1-2

符号	概率论描述	集合论描述
$A\subset B$	事件 A 发生必然导致事件 B 发生	集合 A 是 B 的子集
$A=B$	事件 A 与事件 B 相等	集合 A 与集合 B 相等
$A\cup B$	事件 A 与 B 至少有一个发生	集合 A 与 B 的并集
AB	事件 A 与 B 同时发生	集合 A 与 B 的交集
$A-B$	事件 A 发生而 B 不发生	集合 A 与 B 的差集
$AB=\varnothing$	事件 A 与 B 不可能同时发生	集合 A 与 B 没有公共元素
$\overline{A}$	事件 A 的对立事件	集合 A 的补集

8. 事件的运算性质

(1) 交换律:$A\cup B=B\cup A$,$AB=BA$;

(2) 结合律:$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,$(AB)C=A(BC)$;

(3) 分配律:$(A\cup B)C=(AC)\cup(BC)$,$(AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$;

(4) (De Morgan 公式):$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$,$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$

上式可推广为

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{+\infty}A_i}=\bigcap_{i=1}^{+\infty}\overline{A_i},\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{+\infty}A_i}=\bigcup_{i=1}^{+\infty}\overline{A_i}.$$

例 1.1.1 设 A,B,C 是三个事件,则

(1) A 与 B 发生而 C 不发生可表示为 $AB\overline{C}$;

(2) A 发生而 B 与 C 都不发生可表示为 $A\overline{B}\,\overline{C}$;

(3) 三个事件恰好有一个发生可表示为 $A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$;

(4) 三个事件恰好有两个发生可表示为 $AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$;

(5) 三个事件都发生可表示为 ABC;

(6) 三个事件都不发生可表示为 $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$;

(7) 三个事件中至少有一个不发生可表示为 $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$ 或 $\overline{ABC}$.

1.2 概率的定义及确定方法

概率简单直观地说就是:概率是随机事件发生的可能性大小.由于随机事件的发生是具有偶然性的,但发生的可能性是有大小之分的,而这种大小是可以度量的,人们往往是用百分比来进行度量的.

例如,口袋中有 5 只大小相同的球,其中 4 只红球、1 只黑球,从袋中任取 1 球,这 5 只球每只被取到的机会均等,则抽到红球的可能性大小为$\frac{4}{5}$;抽到黑球的

可能性大小是$\frac{1}{5}$.

在概率论的发展史上，概率的定义有统计定义、古典定义、几何定义和公理化定义，下面分别讨论它们.

1.2.1　概率的统计定义

定义 1.2.1　在相同条件下进行 n 次试验，事件 A 发生的次数 n_A 称为 A 发生的**频数**. 比值$\frac{n_A}{n}$称为 A 发生的**频率**，记为 $f_n(A)$. 易见频率具有以下性质：

(1) 非负性：$0\leqslant f_n(A)$；

(2) 规范性：$f_n(\Omega)=1$；

(3) 有限可加性：若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 两两互不相容，则

$$f_n(\bigcup_{i=1}^{m} A_i)=\sum_{i=1}^{m} f_n(A_i).$$

根据大量的实验表明，随着试验次数 n 的增加，频率 $f_n(A)$会逐步稳定到一个数值. 例如，历史上著名的投硬币试验(表 1-3).

表 1-3

实验者	投硬币次数	出现正面次数	频率
De Morgan	2048	1061	0.5181
Buffon	4040	2048	0.5069
Feller	10000	4979	0.4979
Pearson	12000	6019	0.5016
Pearson	24000	12012	0.5005

随着试验次数的增加，正面出现的频率逐步稳定到一个固定的数值 0.5，在其他试验中的事件也有类似的规律，那么人们就把这个稳定值称为该事件发生的概率，也称频率具有稳定性.

在掷硬币试验中，设事件 $A=\{$正面向上$\}$，则事件 A 发生的概率记为 $p(A)$，由频率的稳定性知，随着试验次数的增加，事件 A 发生的频率 $f_n(A)$逐步稳定到 $p(A)$，这就是概率的统计定义.

1.2.2　概率的古典定义

若随机试验满足：

(1) 试验结果只有有限个；

(2) 每个结果发生的可能性相等，

则称这种试验为**古典概型**.

定义 1.2.2　在古典概型中,若样本空间包含 n 个样本点,事件 A 包含 k 个样本点,则事件 A 发生的概率为

$$p(A)=\frac{k}{n}.$$

上述确定概率的方法称为**古典方法**.在用古典方法确定概率时要用到排列组合知识,同时还需一定的技巧.

例 1.2.1　一部书有四卷,随机地排列在一个书架上,求下列事件的概率:

(1) 各卷从左到右或从右到左恰好排列为 1,2,3,4 的次序;

(2) 第 1,2 卷排在一起;

(3) 第 4 卷排在两端;

(4) 第 1 卷排在第 2 卷的左边.

解　四卷书排成一列一共有 $4!=24$ 种排法,所以 Ω 中所含的样本点总数为 $n=24$.

(1) 记 $A_1=\{$从左到右或从右到左恰好排列为 1,2,3,4$\}$,则 A_1 所含的样本点数为 $k=2$,于是

$$p(A_1)=\frac{k}{n}=\frac{2}{24}=\frac{1}{12}.$$

(2) 记 $A_2=\{$第 1,2 卷相互排在一起$\}$,则 A_2 所含的样本点数为 $k=2\times 3!=12$,于是

$$p(A_2)=\frac{k}{n}=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}.$$

(3) 记 $A_3=\{$第 4 卷排在两端$\}$,则 A_3 所含的样本点数为 $k=2\times 3!=12$,于是

$$p(A_3)=\frac{k}{n}=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}.$$

(4) 记 $A_4=\{$第 1 卷排在第 2 卷左边$\}$,则 A_4 所含的样本点数为 $k=(3+2+1)\times 2!=12$,于是

$$p(A_4)=\frac{k}{n}=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}.$$

例 1.2.2　一个盒子中有 10 个球,其中 4 个黑球、6 个红球,求下列事件的概率:

(1) 从盒中任取一球,这个球是黑球;

(2) 从盒子中任取两球,刚好一黑一红;

(3) 从盒子中任取两球都是红球;

(4) 从盒子中任取 5 球,恰好有两个黑球.

解　(1) 从装有 10 个球的盒子中任取一球,有 $C_{10}^1=10$ 种取法,即 Ω 的样本点总数为 $n=10$,记 $A_1=\{$取到的球是黑球$\}$,则 A_1 所含的样本点数为 $k=4$,于是

$$p(A_1)=\frac{k}{n}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}.$$

(2) 从装有 10 个球的盒子中任取两球,有 $C_{10}^2=45$ 种取法,即 Ω 的样本点总数为 $n=45$,记 $A_2=\{$取到的球刚好一黑一红$\}$,则 A_2 所含的样本点数为 $k=C_4^1C_6^1=24$,于是

$$p(A_2)=\frac{k}{n}=\frac{24}{45}=\frac{8}{15}.$$

(3) 从装有 10 个球的盒子中任取两球,有 $C_{10}^2=45$ 种取法,即 Ω 的样本点总数为 $n=45$,记 $A_3=\{$取到的球都是红球$\}$,则 A_3 所含的样本点数为 $k=C_6^2=15$,于是

$$p(A_3)=\frac{k}{n}=\frac{15}{45}=\frac{1}{3}.$$

(4) 从装有 10 个球的盒子中任取 5 球,有 $C_{10}^5=252$ 种取法,即 Ω 的样本点总数为 $n=252$,记 $A_4=\{$取到的球恰有两个黑球$\}$,则 A_4 所含的样本点数为 $k=C_4^2C_6^3=6\times20=120$,于是

$$p(A_4)=\frac{k}{n}=\frac{120}{252}=\frac{10}{21}.$$

例 1.2.3　现有 5 个人随意住 8 间房子,其中每个人住哪间房是等可能的,求下列事件的概率:

(1) 指定的 5 间房各住 1 人;

(2) 每间房最多只住 1 人;

(3) 某指定的房间不空;

(4) 某指定的房间恰好有两人住.

解　5 个人任意住 8 间房子,一共有 8^5 种住法,即 Ω 的样本点总数为 $n=8^5$.

(1) 记 $A_1=\{$指定的 5 间房各住 1 人$\}$,则 A_1 所含的样本点数为 $k=5!$,于是

$$p(A_1)=\frac{k}{n}=\frac{5!}{8^5}.$$

(2) 记 $A_2=\{$每间房最多只住 1 人$\}$,则 A_2 所含的样本点数为 $k=C_8^5 5!$,于是

$$p(A_2)=\frac{k}{n}=\frac{C_8^5 5!}{8^5}.$$

(3) 记 $A_3=\{$某指定的房间不空$\}$,则 $\overline{A}_3$ 所含的样本点数为 $k=7^5$,于是

$$p(\overline{A}_3)=\frac{k}{n}=\frac{7^5}{8^5},$$

$$p(A_3)=1-p(\overline{A_3})=1-\frac{7^5}{8^5}.$$

(4) 记 $A_4=\{$某指定的房间恰有两人住$\}$,则 A_4 所含的样本点数为 $k=C_5^2 7^3$,于是

$$p(A_4)=\frac{k}{n}=\frac{C_5^2 7^3}{8^5}.$$

例 1.2.4(彩票问题)　在一种福利彩票 35 选 7 中,从 01,02,…,35 中不重复地开出 7 个基本号码和一个特殊号码,中奖规则如表 1-4 所示,求各等奖的中奖概率.

表 1-4

中奖等级	中奖规则
一等奖	7 个基本号码全中
二等奖	中 6 个基本号码及特殊号码
三等奖	中 6 个基本号码
四等奖	中 5 个基本号码及特殊号码
五等奖	中 5 个基本号码
六等奖	中 4 个基本号码及特殊号码
七等奖	中 4 个基本号码或中 3 个基本号码及特殊号码

解　Ω 的样本点总数为 $n=C_{35}^7$,记中第 $i(i=1,2,\cdots,7)$ 等奖的概率为 p_i,则各等奖中奖的概率为

$$p_1=\frac{C_7^7C_1^0C_{27}^0}{C_{35}^7},\quad p_2=\frac{C_7^6C_1^1C_{27}^0}{C_{35}^7},\quad p_3=\frac{C_7^6C_1^0C_{27}^1}{C_{35}^7},\quad p_4=\frac{C_7^5C_1^1C_{27}^1}{C_{35}^7},$$

$$p_5=\frac{C_7^5C_1^0C_{27}^2}{C_{35}^7},\quad p_6=\frac{C_7^4C_1^1C_{27}^2}{C_{35}^7},\quad p_7=\frac{C_7^4C_1^0C_{27}^3+C_7^3C_1^1C_{27}^3}{C_{35}^7}.$$

若记 $A=\{$中奖$\}$,则 $p(A)=\sum_{i=1}^{7}p_i=0.033485$,即一百个人中大约有 3 人中奖,而中一等奖的概率只有 0.149×10^{-6},也就是说两千万个人中大约有 3 人中一等奖,因此对买彩票中一等奖不要期望过高.

1.2.3　概率的几何定义

若随机试验满足:

(1) 试验结果充满某个可度量的区域;

(2) 每个结果发生的可能性相等,

则称这种试验为**几何概型**.

定义 1.2.3　在几何概型中，若样本空间的度量为 S_Ω，事件 A 的度量为 S_A，则事件 A 发生的概率为

$$p(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}.$$

上述确定概率的方法称为**几何方法**. 用几何方法确定概率的关键是将样本空间 Ω 和所求事件 A 对应到一个可度量的区域上.

例 1.2.5　设公共车站每 5min 开过一趟车，而乘客到达车站的时间是任意的，求每个乘客到车站后等车的时间不超过 3min 的概率？

解　记 $A=\{$每个乘客到达车站后等车不超过 3min$\}$. 由于乘客可能在两趟车之间的任一时刻到达，因而其到达时间落在区间 $[0,5]$ 内；要使乘客到车站后等车的时间不超过 3min，其到达时间必须落在区间 $[2,5]$ 内，于是有样本空间的度量 $S_\Omega=5$，事件 A 的度量 $S_A=3$，所以

$$p(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}=\frac{3}{5}.$$

例 1.2.6　甲乙二人相约在 2 点到 3 点之间在某地会面，约定先到者等候另一人 20min，过时即可离去. 如果每个人可在指定的一小时内的任意时刻到达，试求二人能够会面的概率.

解　设 x,y 分别为甲乙二人到达会面地点的时间，在平面上建立直角坐标系，如图 1-1 所示，则样本空间为

$$\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 60, 0\leqslant y\leqslant 60\}.$$

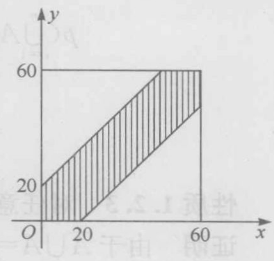

图 1-1

记 $A=\{$两人能会面$\}$，则有

$$A=\{(x,y)\mid (x,y)\in\Omega \text{ 且 } |x-y|\leqslant 20\},$$

则

$$p(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}=\frac{60^2-40^2}{60^2}=\frac{5}{9}.$$

1.2.4　概率的公理化定义

前面讨论的概率的统计定义、古典定义和几何定义都带有一定局限性，为此，人们引进概率的公理化定义，使概率的定义更具有普遍性和严密性.

定义 1.2.4　设 Ω 是随机试验 E 的样本空间，对 E 的每一个事件 A，将其对应于一个实数 $p(A)$，若 $p(A)$ 满足

(1) 非负性：对任意事件 A，有 $p(A)\geqslant 0$；

(2) 规范性：$p(\Omega)=1$；

(3) 可列可加性：若 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 是两两互不相容的事件，则有

$$p(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} p(A_i),$$

则称 $p(A)$ 为事件 A 发生的概率.

由概率的公理化定义出发，可得到概率的以下性质：

性质 1.2.1 $p(\varnothing)=0$.

证明 由于 $\Omega=\Omega\cup\varnothing\cup\varnothing\cup\cdots$ 且 Ω 与 $\varnothing$ 互不相容，因而

$$p(\Omega)=p(\Omega)+p(\varnothing)+p(\varnothing)+\cdots,$$

则

$$p(\varnothing)=0.$$

性质 1.2.2 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的事件，则有

$$p(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i).$$

证明 由于 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\varnothing,\varnothing,\cdots$ 两两互不相容，于是

$$\begin{aligned} p(\bigcup_{i=1}^{n}A_i) &= p(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\varnothing\cup\varnothing\cup\cdots) \\ &= p(A_1)+p(A_2)+\cdots+p(A_n)+p(\varnothing)+p(\varnothing)+\cdots \\ &= \sum_{i=1}^{n} p(A_i). \end{aligned}$$

性质 1.2.3 对任意事件 A，有 $p(\overline{A})=1-p(A)$.

证明 由于 $\overline{A}\cup A=\Omega$、$\overline{A}A=\varnothing$，因而

$$1=p(\Omega)=p(\overline{A}\cup A)=p(\overline{A})+p(A),$$

则

$$p(\overline{A})=1-p(A).$$

性质 1.2.4 对任意两个事件 A、B，有 $p(A-B)=p(A)-p(AB)$.

证明 由于 $A=(A-B)\cup(AB)$ 且 $(A-B)(AB)=\varnothing$，因而

$$p(A)=p((A-B)\cup(AB))=p(A-B)+p(AB),$$

则

$$p(A-B)=p(A)-p(AB).$$

特别地，若 $B\subset A$，则有 $p(A-B)=p(A)-p(B)$ 且 $p(A)\geqslant p(B)$.

性质 1.2.5 对任意事件 A，有 $0\leqslant p(A)\leqslant 1$.

性质 1.2.6 对任意两个事件 A,B，有 $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(AB)$.

证明 由于 $A\cup B=A\cup(B-A)$ 且 $A(B-A)=\varnothing$，因而

$$p(A\cup B)=p(A\cup(B-A))=p(A)+p(B-A)=p(A)+p(B)-p(AB).$$

一般地，对任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，有