大学数学系列丛书

2

概率论与数理统计

GAILULUN YU SHULI TONGJI

主　编　廖　飞
副主编　崔小红　刘海明
主　审　赵宝江

清华大学出版社
http://www.tup.com.cn
北京交通大学出版社
http://www.bjtup.com.cn

大学数学系列丛书

概率论与数理统计

主　编　廖　飞

副主编　崔小红　刘海明

主　审　赵宝江

清华大学出版社

北京交通大学出版社

·北京·

07/20/24

内容简介

本书是作者按照新形势下教材改革的精神，并结合概率论与数理统计课程教学的基本要求，根据多年从事概率论与数理统计的教学实践经验和教学改革成果编写而成的。

本书内容包括随机事件和概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、数理统计初步。章后习题很多来自历年全国研究生入学试题，书末附有习题参考答案。

本书可作为普通高等院校理工、经济管理类各专业的教材，也可供报考硕士研究生的读者参考。

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计/廖飞主编. —北京：北京交通大学出版社：清华大学出版社，2013.8

（大学数学系列丛书）

ISBN 978－7－5121－1531－6

Ⅰ.①概…　Ⅱ.①廖…　Ⅲ.①概率论-高等学校-教材　②数理统计-高等学校-教材　Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 158233 号

责任编辑：黎　丹

出版发行：清 华 大 学 出 版 社　　邮编：100084　　电话：010－62776969

　　　　　北京交通大学出版社　　邮编：100044　　电话：010－51686414

印 刷 者：北京交大印刷厂

经　　销：全国新华书店

开　　本：185×230　　印张：10.75　　字数：241 千字

版　　次：2013 年 8 月第 1 版　　2013 年 8 月第 1 次印刷

书　　号：ISBN 978－7－5121－1531－6/O・120

印　　数：1～3 000 册　　定价：24.00 元

本书如有质量问题，请向北京交通大学出版社质监组反映。对您的意见和批评，我们表示欢迎和感谢。

投诉电话：010－51686043，51686008；传真：010－62225406；E-mail：press@bjtu. edu. cn。

前　言

本书是作者根据教育部关于理工、经济管理类本科概率论与数理统计课程教学的基本要求，以培养学生的专业素质为目的，在汲取了多年从事实践经验和教学改革成果的基础上编写而成的。在编写本书过程中，突出了以下几点。

1. 在内容安排上由浅入深，符合认知规律，既考虑了概率论与数理统计课程的科学性、系统性和逻辑性，对传统的教学内容和结构作了适当的调整，增加了与实际生活密切相关的数学理论和方法。

2. 在教学内容上实现了与专业课程内容的整体化，能够更好地为后续课程服务，并能满足报考硕士研究生和将来从事实际工作的需要。

3. 贯彻问题教学法的基本思想，对重要概念、定理、方法，尽量先从解决生活中的实际问题入手，再引入数学概念，介绍数学定理、方法，最后解决所提出的问题，使学生能够了解实际背景，提高学习兴趣，同时增强应用数学知识解决实际问题的意识和能力。

4. 例题和习题的选配层次分明，难易适度，并恰当选用生活中的应用案例。教材在每节后都配置基本题，尽量使读者在做完本节习题后能够较好地理解和掌握本节的基本内容、基本理论和基本方法；在每章后配置总习题，总习题分为（A）、（B）两组，其中（A）组习题反映了概率论与数理统计课程的基本要求，（B）组习题中大部分题目来自历年全国研究生的入学试题，综合性较强，可供学有余力或有志报考硕士研究生的读者使用。

5. 行文追求简洁流畅，重点、难点阐述详细，逻辑性强，既富有启发性又通俗易懂。针对概率论与数理统计课程教学的目标与特点，有些定理仅给出结论而略去证明过程，突出理论的应用和方法的介绍，内容深广度适当，贴近教学实际，便于教与学。

本书是一本适宜于普通高等院校理工、经济管理类各专业学生学习概率论与数理统计课程的教材，也可供报考硕士研究生的读者参考。

本书共 5 章，分别由廖飞（第 2 章）、崔小红（第 1 章，第 5 章）、刘海明（第 3 章，第 4 章）执笔编写，全书的编写思想、结构安排、统稿定稿由廖飞承担。

赵宝江教授详细审阅了本书，并提出了许多改进的意见，谨在此表示衷心的感谢。

本书的出版得到了牡丹江师范学院本科教学工程项目建设经费的资助，同时还得到了黑龙江省教学改革项目（11－SJC 13007）和牡丹江师范学院教学改革项目（12－XJ14053）经费的资助。本书已经被评为牡丹江师范学院2013年规划教材的重点建设教材。在此，感谢我校领导、老师和同学们的热情关心和合作。本书的出版得到了清华大学出版社和北京交通大学出版社的大力支持，尤其是黎丹编辑为本教材的出版做了大量的工作，在此谨致以诚挚的谢意。

限于编者水平有限，书中疏漏和不足之处在所难免，恳请广大读者和专家批评指正。

编　者

2013年7月

目　录

第 1 章 随机事件及其概率

概率论是研究和揭示随机现象规律性的数学学科，是统计学的重要基础. 目前，概率论中的基本理论和分析方法已得到广泛的应用，比如气象、地震预报、人口控制及预测等，几乎遍及科技领域、社会科学和工农业生产的各个部门.

本章重点介绍概率论中的两个基本概念：随机事件及其概率，主要内容包括随机事件及其关系和运算、随机事件概率的概念和性质及随机事件概率的计算. 本章是学习概率论和数理统计的基础.

1.1 随机现象和随机事件

1.1.1 随机现象及其统计规律性

客观世界中存在着两类现象，一类是在一定的条件下必然出现的现象，称之为**必然现象**. 例如，在标准大气压下，把水加热到 100 ℃，此时水沸腾是必然发生的现象. 另一类是在一定的条件下可能出现也可能不出现的现象，称之为**随机现象**. 概率论是研究随机现象（偶然现象）规律性的科学.

人们在自己的实践活动中，常常会遇到随机现象. 例如，远距离射击较小的目标，可能击中，也可能击不中，每一次射击的结果是随机（偶然）的. 再如，抛掷一枚质地均匀的硬币，其落地后可能是有国徽的一面（正面）朝上，也可能是有数字的一面（反面）朝上，投掷硬币前不能准确地预言，投掷硬币的结果也是随机的.

由以上例子可以看出，随机现象具有两重性：表面上的偶然性与内部蕴含着的必然规律性. 随机现象的偶然性又称为它的随机性. 在一次实验或观测中，结果的不确定性就是随机现象随机性的一面；在相同的条件下进行大量重复实验或观测时呈现出来的规律性是随机现象必然性的一面，称随机现象的必然性为**统计规律性**.

1.1.2 随机试验、样本空间与随机事件

研究随机现象，首先要对研究对象进行观察试验. 为简便起见，我们把对某现象或对某事物的某个特征的观察（测）及各种各样的科学实验统称为**试验**. 这类试验的特征是，在一

定条件下，试验的可能结果不止一个．例如，抛掷硬币试验，一次抛掷，哪一面朝上是随机的，但在大量重复试验下，其试验结果却呈现出某种规律性：当把同一枚硬币进行成千上万次抛掷，人们发现，“正面朝上”与“反面朝上”这两个试验结果出现的次数大致各占一半．所以，试验就是一定的综合条件的实现，我们假定这种综合条件可以任意多次地重复实现．大量现象就是很多次试验的结果．

定义 1-1 一般地，一个试验要具有下列特点：

(1) 试验原则上可在相同条件下重复进行；

(2) 试验结果是可观察的，并且结果有多种可能性，所有可能结果又是事先可知的；

(3) 每次试验将要出现的结果是不确定的，事先无法准确预知．

若试验满足上述特点，则称该试验为**随机试验**，以后简称为**试验**，记作 E．

试验的结果中每一个可能发生的事件叫做试验的**样本点**，通常用字母 ω 表示．

定义 1-2 试验的所有样本点 ω_1，ω_2，…，ω_n，…构成的集合叫做**样本空间**，通常用字母 Ω 表示，记作

$$\Omega=\{\omega_1,\ \omega_2,\ \cdots,\ \omega_n,\ \cdots\}$$

当一定的综合条件实现时，也就是在试验的结果中所发生的现象叫做**事件**．如果在每次试验的结果中，某事件一定发生，则这一事件叫做**必然事件**；相反地，如果某事件一定不发生，则叫做**不可能事件**．由单个样本点组成的集合称为**基本事件**．

在试验的结果中，可能发生也可能不发生的事件，叫做**随机事件（偶然事件）**．例如，任意抛掷硬币时，国徽向上是随机事件；远距离射击时，击中目标是随机事件；自动车床加工机械零件时，加工出来的零件为合格品是随机事件等．

通常我们用字母 A，B，C，…表示随机事件，而字母 Ω 表示必然事件，符号 $\varnothing$ 表示不可能事件．

【例 1-1】 设试验为任意抛掷一枚硬币，则样本点为

ω_1 表示“国徽向上”，ω_2 表示“字向上”

于是样本空间为

$$\Omega_1=\{\omega_1,\ \omega_2\}$$

国徽向上是随机事件 $A=\{\omega_1\}$．

【例 1-2】 设试验为从装有三个白球（记为 1 号、2 号、3 号）与两个黑球（记为 4 号、5 号）的袋中任取两个球．

(1) 如果观察取出的两个球的颜色，则样本点为

ω_{00} 表示“取出两个白球”，ω_{11} 表示“取出两个黑球”

$$\omega_{01}\text{表示“取出一个白球与一个黑球”}$$

于是样本空间为

$$\Omega_2'=\{\omega_{00},\ \omega_{01},\ \omega_{11}\}$$

取出两个球至少有一个白球是随机事件

$$B=\{\omega_{00},\ \omega_{01}\}$$

(2) 如果观察取出的两个球的号码，则样本点为

$$\omega_{ij}\text{，表示“取出第 } i \text{ 号与第 } j \text{ 号球”}(1\leqslant i<j\leqslant 5)$$

于是由 $C_5^2=10$ 个样本点构成的样本空间为

$$\Omega_2''=\{\omega_{12},\ \omega_{13},\ \omega_{14},\ \omega_{15},\ \omega_{23},\ \omega_{24},\ \omega_{25},\ \omega_{34},\ \omega_{35},\ \omega_{45}\}$$

取出两个球至少有一个白球是随机事件

$$C=\{\omega_{12},\ \omega_{13},\ \omega_{14},\ \omega_{15},\ \omega_{23},\ \omega_{24},\ \omega_{25},\ \omega_{34},\ \omega_{35}\}$$

【例 1-3】 设试验为观察放射性物质在一段时间内放射的粒子数，则样本点为

$$\omega_i\text{，表示“放射 } i \text{ 个粒子”}(i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

于是由可数无穷多个样本点构成的样本空间为

$$\Omega_3=\{\omega_0,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \cdots\}$$

【例 1-4】 设试验为测量车床加工的零件的直径，则样本点为

$$\omega_x\text{，表示“测得零件的直径为 } x \text{ 毫米”}(a\leqslant x\leqslant b)$$

于是样本空间为

$$\Omega_4=\{\omega_x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$$

1.1.3 随机事件的关系与运算

在实际问题中，常常需要同时考察多个在相同试验条件下的随机事件及它们之间的联系，详细地分析事件之间的各种关系和运算性质，这不仅有助于我们进一步认识事件的本质，还为计算事件的概率作了必要的准备. 下面讨论事件之间的一些关系和几个基本运算.

如果没有特别的说明，下面问题的讨论都假定是在同一样本空间 Ω 中进行的.

1. 事件的包含关系与等价关系

设 A，B 为两个事件. 如果 A 中的每一个样本点都属于 B，那么称事件 B **包含**事件 A，或称事件 A **包含于**事件 B，记作 $B\supset A$ 或 $A\subset B$. 图 1-1 表示 $A\subset B$.

对任何事件 A 都有 $\Omega\supset A\supset\varnothing$.

如果事件 B 包含事件 A，且事件 A 包含事件 B，即 $B\supset A$ 且 $A\supset B$，则称事件 A 与事件 B **相等**，记作 $A=B$.

2. 事件的并与交

设 A，B 为两个事件. 把至少属于 A 或 B 中一个的所有样本点构成的集合称作事件 A

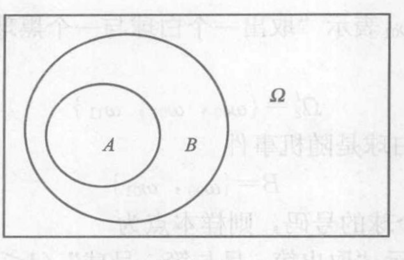

图 1－1

与B的**并**或**和**，记作$A\cup B$. 这就是说，事件$A\cup B$表示在一次试验中，事件A与B至少有一个发生. 图 1－2 中的阴影部分表示$A\cup B$.

n个事件A_1，A_2，…，A_n在一次试验中至少有一个事件发生称作事件A_1，A_2，…，A_n的**并**或**和**，记作$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$（简记为$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$）.

设A，B为两个事件. 我们把同时属于A及B的所有样本点构成的集合称作事件A与B的**交**或**积**，记作$A\cap B$或AB. 这就是说，事件$A\cap B$表示在一次试验中，事件A与B同时发生. 图 1－3 中的阴影部分表示$A\cap B$.

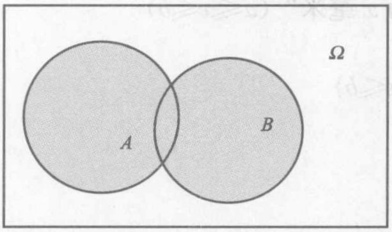

图 1－2

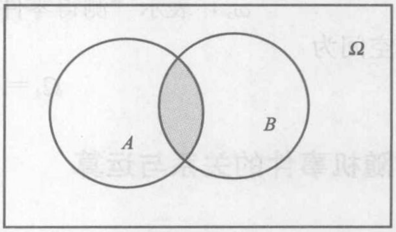

图 1－3

n个事件A_1，A_2，…，A_n在一次试验中同时发生称作事件A_1，A_2，…，A_n的**交**或**积**，记作$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$或$A_1A_2\cdots A_n$（简记为$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$）.

3. 事件的互不相容（互斥）关系与事件的逆

设A，B为两个事件. 如果$AB=\varnothing$，那么称事件A与事件B是**互不相容**的（或**互斥**的）. 这就是说，在一次试验中事件A与事件B不可能同时发生. 图 1－4 表示$AB=\varnothing$. 通常把两个互不相容事件A与B的并记作$A+B$.

如果n个事件A_1，A_2，…，A_n中任意两个事件不可能同时发生，即$A_iA_j=\varnothing(1\leqslant i<j\leqslant n)$，则称这$n$个事件是**互不相容**的（或**互斥**的）.

对于事件A，我们把不包含在A中的所有样本点构成的集合称为事件A的**逆**（或A的**对立事件**）. 这就是说，如果事件A与B是互不相容的，并且它们中必有一事件发生，即事

件中有且仅有一事件发生，即 $AB=\varnothing$ 且 $A\cup B=\Omega$，则称事件 A 与 B 是**对立**的（或**互逆**的），称事件 B 是事件 A 的**对立事件（或逆事件）**；同样事件 A 也是事件 B 的**对立事件（或逆事件）**．记作 $B=\overline{A}$ 或 $A=\overline{B}$（见图 1-5）．

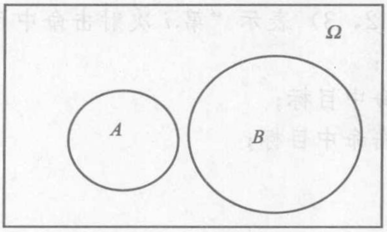

图 1-4

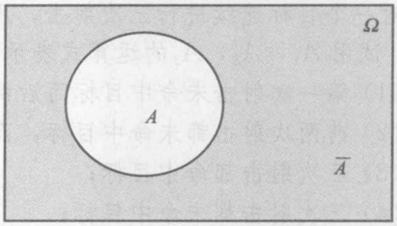

图 1-5

对任意的事件 A，有 $\overline{\overline{A}}=A$，$A\overline{A}=\varnothing$，$A\cup\overline{A}=\Omega$．

4. 完备事件组

如果 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 中至少有一个事件发生，即 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i=\Omega$，则称这 n 个事件构成**完备事件组**．

设 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 满足下面的关系式

$$\begin{cases} A_iA_j=\varnothing \quad (1\leqslant i<j\leqslant n) \\ \sum\limits_{i=1}^{n} A_i=\Omega \end{cases}$$

则称这 n 个事件构成互不相容的完备事件组．

显然，A 与 $\overline{A}$ 构成一个完备事件组；样本空间 Ω 中所有的基本事件构成互不相容的完备事件组．

根据上面的基本运算定义，不难验证事件之间的运算满足以下几个规律．

① 交换律：$A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$．

② 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(AB)C=A(BC)$．

③ 分配律：$A(B\cup C)=AB\cup AC$，$A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C)$．

④ 德·摩根（De Morgen）定律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$，$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$．

习题 1.1

1. 写出下面随机试验的样本空间：

(1) 同时掷两颗骰子，记录两颗骰子分别出现的点数情况；

(2) 同时掷两颗骰子，记录两颗骰子点数之和；

(3) 在单位圆内任意取一点，观察它的坐标；

(4) 生产产品直到 8 件正品为止，记录生产产品的总件数.

2. 对一个目标连续进行三次射击，用 $A_i(i=1, 2, 3)$ 表示“第 i 次射击命中目标”这一事件，试用 A_1，A_2，A_3的运算式表示下列各事件：

(1) 第一次射击未命中目标而后两次射击都命中目标；

(2) 前两次射击都未命中目标，而第三次射击命中目标；

(3) 三次射击都命中目标；

(4) 三次射击都未命中目标；

(5) 三次射击正好有一次命中目标；

(6) 三次射击正好有两次命中目标；

(7) 三次射击至少有一次命中目标.

3. 设 $\Omega=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$，$A=\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{2}<x\leqslant 1\right\}$，$B=\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{4}\leqslant x<\frac{3}{2}\right\}$，具体写出下列各事件：

(1) $\overline{A}B$　　(2) $\overline{A}\cup B$　　(3) $\overline{\overline{A}\overline{B}}$　　(4) $\overline{AB}$

1.2 随机事件的概率

1.2.1 概率的统计定义

1. 频率与概率

对于一般的随机事件来说，虽然在一次试验中是否发生不能预先知道，但是如果独立地多次重复这一试验就会发现，不同的事件发生的可能性是有大小之分的. 这种可能性的大小是事件本身固有的一种属性，它是不以人们的意志为转移的. 为了定量地描述随机事件的这种属性，下面先介绍频率的概念.

定义 1-3 在一组不变的条件 S 下，独立重复 n 次试验 E. 如果随机事件 A 在 n 次试验中发生了 μ 次，则比值$\frac{\mu}{n}$叫做随机事件 A 的相对频率（简称频率），记作 $f_n(A)$. 即

$$f_n(A)=\frac{\mu}{n}$$

其中 μ 称为频数.

例如在抛一枚硬币时规定条件组 S 为：硬币是均匀的，放在手心上，用一定的动作垂直上抛，让硬币落在一个有弹性的平面上．当条件组 S 大量重复试验时，事件 $A=\{$国徽向上$\}$ 发生的次数 μ 能够体现出一定的规律性，如进行 50 次试验出现了 24 次正面．这时

$$n=50,\quad \mu=24,\quad f_{50}(A)=\frac{24}{50}=0.48$$

一般来说，随着试验次数的增加，事件 A 出现的次数 μ 约占总试验次数的一半，换而言之，事件 A 的频率接近于 $\frac{1}{2}$.

历史上，不少统计学家，例如皮尔逊等人做过成千上万次抛掷硬币的试验，其试验记录如表 1-1 所示.

表 1-1

实验者	抛掷次数 n	A 出现的次数 μ	$f_n(A)$
德・摩根（De Morgen）	2 048	1 061	0.518
布丰（Buffon）	4 040	2 048	0.506 9
皮尔逊（Pearson）	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊（Pearson）	24 000	12 012	0.500 5

从表 1-1 可以看出，随着试验次数的增加，事件 A 发生的频率的波动性越来越小，呈现出一种稳定状态，即频率在 0.5 这个定值附近摆动，这就是频率的稳定性，这是随机现象的一个客观规律.

可以证明，当试验次数 n 固定时，事件 A 的频率 $f_n(A)$ 具有下面几个性质：

① $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

② $f_n(\Omega)=1$，$f_n(\varnothing)=0$；

③ 若 $AB=\varnothing$，则 $f_n(A\cup B)=f_n(A)+f_n(B)$.

2. 概率的统计定义

定义 1-4　当试验次数 n 很大时，频率 $f_n(A)$ 常在一个确定的数 $p(0\leqslant p\leqslant 1)$ 的附近摆动，这个刻画随机事件在试验中发生的可能性大小的数 p 叫做随机事件 A 的概率，记作 $P(A)=p$.

概率的统计定义实际上给出了一个近似计算随机事件概率的方法，我们把多次重复试验中随机事件 A 的频率 $f_n(A)$ 作为随机事件 A 的概率 $P(A)$ 的近似值，即

$$P(A)\approx f_n(A)=\frac{\mu}{n}$$

必然事件的概率等于 1，即 $P(\Omega)=1$；不可能事件的概率等于 0，即 $P(\varnothing)=0$；任何事件 A 的概率满足不等式，即 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

CHAPTER 1

随机事件的概率是完全客观存在的，它反映了大量现象中的某种客观属性，所以就个别现象而言概率是没有任何现实意义的.

1.2.2 概率的古典定义

仅在比较特殊的情况下才可以直接计算随机事件的概率，它是以概率的古典定义为基础的.

1. 古典概型

在学习概率的古典定义之前，我们先来介绍一下事件的等可能性，什么是事件的等可能性呢？如果试验时，由于某种对称性条件，使得若干个随机事件中每一事件发生的可能性在客观上是完全相同的，则称这些事件是**等可能**的. 例如，任意抛掷一枚硬币，“国徽向上”与“字向上”这两个事件发生的可能性在客观上是相同的，也就是等可能的；又如，抽样检查产品质量时，一批产品中每一个产品被抽到的可能性在客观上是相同的，因而抽到任一产品是等可能的.

设 Ω 为随机试验 E 的样本空间，若满足下列条件：

(1) Ω 只含有限个样本点；

(2) 每个基本事件出现的可能性相等；

则称随机试验 E 为**古典概型**.

2. 概率的古典定义

定义 1-5 设随机试验 E 的样本空间 Ω 共有 N 个等可能的基本事件，其中有且仅有 M 个基本事件是包含于随机事件 A 的，则随机事件 A 所包含的基本事件数 M 与基本事件的总数 N 的比值叫做随机事件 A 的概率，记作

$$P(A)=\frac{M}{N}=\frac{\text{事件 } A \text{ 包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}$$

所谓古典概型就是利用定义 1-5 中的关系式来讨论事件发生的概率的数学模型. 注意，概率的古典定义与概率的统计定义是一致的. 在古典概型随机试验中，事件的频率是围绕着定义中$\frac{M}{N}$这一数值摆动的. 概率的统计定义具有普遍性，它适用于一切随机现象；而概率的古典定义只适用于试验结果为等可能的有限个的情况，其优点是便于计算.

根据概率的古典定义可以计算古典概型随机试验中的概率. 在古典概型中确定事件 A 的概率时，只需求出基本事件的总数 N 及事件 A 包含的基本事件的个数 M. 为此，弄清随机试验的全部基本事件及所讨论的事件 A 包含哪些基本事件是非常重要的.

【例 1-5】 从 0，1，2，…，9 十个数字中任取一个数字，求取得奇数数字的概率.

解　基本事件的总数 $N=10$. 设事件 A 表示取得奇数数字，则它所包含的基本事件数 $M=5$. 因此，所求的概率为

$$P(A)=\frac{5}{10}=0.5$$

【例 1－6】　袋内有三个白球与两个黑球，从其中任取两个球，求取得的两个球都是白球的概率.

解　基本事件的总数 $N=\mathrm{C}_5^2=10$. 设事件 A 表示取出的两个球都是白球，则它所包含的基本事件数 $M=\mathrm{C}_3^2=3$. 因此，所求的概率为

$$P(A)=\frac{\mathrm{C}_3^2}{\mathrm{C}_5^2}=\frac{3}{10}=0.3$$

【例 1－7】　在一批 N 个产品中有 M 个次品，从这批产品中任取 $n(n\geqslant m)$ 个产品，求其中恰有 m 个次品的概率.

解　基本事件的总数为 C_N^n. 设事件 A 表示取出的 n 个产品中恰有 m 个次品，则它所包含的基本事件数为 $\mathrm{C}_M^m\cdot\mathrm{C}_{N-M}^{n-m}$. 因此，所求的概率为

$$P(A)=\frac{\mathrm{C}_M^m\mathrm{C}_{N-M}^{n-m}}{\mathrm{C}_N^n}$$

【例 1－8】　袋内有 a 个白球与 b 个黑球，每次从袋中任取一个球，取出的球不再放回去，接连取 k 个球（$k\leqslant a+b$），求第 k 次取得白球的概率.

解　由于考虑到取球的顺序，这相当于从 $a+b$ 个球中任取 k 个球的排列，所以基本事件的总数为

$$\mathrm{A}_{a+b}^k=(a+b)(a+b-1)\cdots(a+b-k+1)$$

设事件 B_k 表示第 k 次取得白球，则因为第 k 次取得的白球可以是 a 个白球中的任一个，有 a 种取法，其余 $k-1$ 个球可在前 $k-1$ 次中顺次地从 $a+b-1$ 个球中任意取出，有 A_{a+b-1}^{k-1} 种取法. 所以，事件 B_k 所包含的基本事件数为

$$\mathrm{A}_{a+b-1}^{k-1}\cdot a=(a+b-1)(a+b-2)\cdots(a+b-k+1)a$$

因此，所求的概率为

$$P(B_k)=\frac{(a+b-1)\cdots(a+b-k+1)a}{(a+b)(a+b-1)\cdots(a+b-k+1)}=\frac{a}{a+b}$$

值得注意的是，这个结果与 k 的值无关. 即表明无论哪一次取得白球，其概率都是一样的，或者说，取得白球的概率与先后次序无关.

1.2.3　概率的基本性质

1. 概率的公理化体系

在讨论概率的基本性质之前，首先简单介绍概率的公理化体系.

上面介绍的概率的古典定义有一定的局限性，即它们都是以等可能性（或均匀性）为基础的．但在实际问题中有很多情况是不具有这种性质的；而概率的统计定义虽然比较直观，但在理论上不够严密．因此，我们有必要采用数学抽象的方法，给出概率的一般公理化定义，提出一组关于随机事件概率的公理，使得后面的理论推导有所依据．

定义 1-6 设 E 是一个随机试验，Ω 为它的基本事件空间．以 E 中所有的随机事件组成的集合为定义域，定义一个函数 $P(A)$（其中 A 为任一随机事件），且 $P(A)$ 满足以下三条公理，则称函数 $P(A)$ 为事件 A 的概率．

公理 1 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

公理 2 $P(\Omega)=1$.

公理 3 若 A_1，A_2，…，A_n，…为两两互不相容事件，即 $A_i \cap A_j=\varnothing\ (i \neq j)$，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots) = P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

公理 3 称为概率的**可列可加性或完全可加性**.

2. 概率的基本性质

下面我们给出概率的一些重要性质及应用.

性质 1 不可能事件的概率为零，即

$$P(\varnothing)=0$$

性质 2（有限可加性） 设 A_1，A_2，…，A_n 两两互斥，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

性质 3 设 $\overline{A}$ 为 A 的对立事件，则

$$P(\overline{A})=1-P(A)$$

性质 4（加法定理） 对试验 E 中任意两个事件 A 与 B，均有

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

推广 $P(A \cup B \cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(CA)+P(ABC)$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} P(A_i A_j)+\sum_{1 \leqslant i<j<k \leqslant n} P(A_i A_j A_k)-\cdots+(-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n)$$

性质 5（单调性） 若事件 A 与 B，有 $B \supset A$，则

$$P(B) \geqslant P(A)$$

性质 6（可减性） 若事件 A 与 B，有 $B \supset A$，则