



高等院校成人教育“十二五”规划教材

P_{robability} and Statistics

概率论与数理统计

● 主编 严希文



中南大学出版社
www.csupress.com.cn

高等院校成人教育“十二五”规划教材

概率论与数理统计

主 编 严希文



中南大学出版社
www.csupress.com.cn

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/严希文主编. —长沙: 中南大学出版社, 2013. 8
ISBN 978-7-5487-0861-2

I. 概... II. 严... III. ①概率论②数理统计 IV. O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 094268 号

概率论与数理统计

严希文 主编

☐责任编辑 谭 平

☐责任印制 周 颖

☐出版发行 中南大学出版社

社址: 长沙市麓山南路

邮编: 410083

发行科电话: 0731-88876770

传真: 0731-88710482

☐印 装 湖南地图出版社印刷厂

☐开 本 720 × 1000 B5 ☐印张 11 ☐字数 199 千字

☐版 次 2013 年 8 月第 1 版 ☐2013 年 8 月第 1 次印刷

☐书 号 ISBN 978-7-5487-0861-2

☐定 价 26.00 元

图书出现印装问题, 请与经销商调换



高等院校成人教育“十二五”规划教材
编审委员会

名誉主任

申纪云

主 任

何学飞

委 员

(按姓氏笔画排列)

于普选	王友胜	王莲花	王 彬	尹检龙
叶一进	朱星星	许 彦	杨能山	李汉林
李钰清	肖京武	吴红玲	张 平	张 明
张贵华	张慧春	陈一民	陈立新	陈革新
欧阳峰松	胡大伟	胡建强	贾 平	晏桂华
唐烈琼	涂 昊	黄光荣	曹中一	盛智颖
银德辉	曾小玲	曾湘江	曾德明	廖 耘
熊正南	熊新华	颜鲜明		

总序 FOREWORD.

党的十八大报告中指出：要积极发展继续教育，完善终身教育体系。继续教育是我国高等教育的重要组成部分，是传统学校教育向终身教育发展的一种新型教育制度。大力发展以成人教育为主的继续教育是提高劳动者素质、振兴经济和推进教育现代化的重要环节。国家实行继续教育制度，鼓励发展多种形式的继续教育，建立与完善终身教育体系，培养大批贴近社会、服务社会的各类应用型人才，对于加强社会主义精神文明建设，促进社会进步和经济发展，都将起到十分重要的作用。

按照教育部关于成人高等教育人才的培养目标，构建适用的教材体系，是成人高等教育在新形势下继续发展不可缺少的一环。经过编审委员会、作者和出版社的共同努力，“高等院校成人教育‘十二五’规划教材”将陆续出版，我向他们表示诚挚的祝贺和感谢。

综观这套系列教材，具有以下特点：

一是体例新颖。在每章开篇给出明确的学习目标与重点难点提示，涵盖教学大纲的重点或主要内容。教材中充分考虑到学生学习时可能遇到的问题，给他们以提示和建议。在章后和书后分别设置“同步测练与解析”和“综合测练与解析”栏目，涵盖本章及本书的重要知识点，并给出详尽的参考答案，对难题进行分析点评，列出解题思路与要点，以方便学生自学自测。

二是内容丰富、形式多样。教材内容既有基础知识、基本理论，又有基本技能的展示；既注重基本原理与应用知识的传授，又将纸质教材与多媒体教学资源、网络资源相结合，将与课程内容相关的法律法规、工具模

2 概率论与数理统计

板、操作范例等以多媒体网络资源的形式提供给学生。

三是实用性强。遵循成人高等教育人才培养模式与教学规律，在教材的编写上将理论与实际紧密结合，注重案例的引入，教材中尽可能多地安排案例，并进行详细的分析讲解。旨在通过案例教学，对课程重点难点进行深化分析和实操训练，加强学生对知识点的理解和记忆，强化学生分析问题、解决问题以及动手操作的能力。

在此，我相信“高等院校成人教育‘十二五’规划教材”的出版，对湖南建设教育强省这一目标的实现必将起到积极的推动作用。同时，继续教育教材建设是一项系统工程，尚处在起步阶段，缺乏足够的经验，肯定存在许多问题。各院校在使用教材过程中有什么问题和建议，请及时反馈编委会，以便改进编写工作，真正把我省成人教育的教材建设提高到一个新的水平。

湖南省教育厅副厅长：申纪云

前言 PREFACE.

“概率论与数理统计”是理工农医及经管类成人高等教育各专业的一门重要的基础理论课程,“概率论与数理统计”的教学对于各专业后续专业课程的学习及合格专门人才的培养起着非常重要的作用,而一本好的《概率论与数理统计》教材是促进该课程教学、提高教学质量和实现教学目标的重要保障。

我们在成人教育教学过程中常常感到,由于受教材内容、学生认识能力、教学时数等诸多因素的影响,有些问题在课堂上顾不上讲,有的又暂时不宜讲解,有的虽能讲到,教材上又缺少相应归纳总结而不便学生复习和掌握。因此,编写一本能够紧密结合成人高等教育实际,遵循成人高等教育对“概率论与数理统计”课程的基本要求,在“教”与“学”两方面满足本、专科层次成人高等教育的教学需求,既方便教学,又能帮助学生深入理解基本概念和基本理论,牢固掌握基本运算技能,适应性和针对性较强的成人高等教育“概率论与数理统计”教材,是我们长期以来的一个愿望。

近年来,我们结合自己三十年成人高等教育“概率论与数理统计”课程教学经验,在对课堂教学讲义进行反复修改的基础上,编写了这套适合成人教育的《概率论与数理统计》教材,编排上采取“内容提要与基本要求—基本内容叙述—典型例题解析—本章基本知识体系小结—习题”的章节结构,与之相适应的教学环节是“预习—系统面授—同步练习—每章归纳总结”,并配有大量习题,难易恰当。教材具有科学性、系统性和渐进性,同时做到语言通俗,叙述清楚,为方便学生自学和全面复习考试,特别配有模拟考试试题及解答。

2 概率论与数理统计

全书分为概率论和数理统计两部分：概率论内容为：随机事件及其概率、随机变量及其分布、二维随机变量、随机变量的数字特征、极限定理；数理统计内容为：样本分布、参数估计、假设检验、方差分析*、回归分析*等。

全书为理工类和经管类成人学历教育(成人教育、网络教育、电视大学、自学考试)高升本、专升本、专科通用教材，也可作为高职高专理工类和经管类参考教材。

全书由中南大学严希文任主编，副主编为陈芳霞、黄素平、史舒悦、王芬，参加编写的还有黄帅、肖晶妮。

由于编者水平有限，时间仓促，不足之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

编 者

CONTENTS. 目录

第 1 章 随机事件及其概率	(1)
1.1 随机事件	(1)
1.2 概率	(5)
1.3 概率的加法定理	(7)
1.4 条件概率与乘法定理	(8)
1.5 独立实验概型	(12)
1.6 典型例题分析	(14)
习题一	(20)
本章小结	(21)
第 2 章 随机变量及其分布	(22)
2.1 离散型随机变量	(22)
2.2 分布函数	(24)
2.3 连续型随机变量	(25)
2.4 正态分布	(27)
2.5 随机变量函数的分布	(29)
2.6 典型例题分析	(31)
习题二	(39)
本章小结	(40)
第 3 章 二维随机变量	(41)
3.1 二维随机变量及其分布	(41)
3.2 边缘分布	(45)
3.3 随机变量的独立性	(46)
3.4 二维随机变量函数的分布	(47)

2 概率论与数理统计

3.5 典型例题分析	(48)
习题三	(51)
本章小结	(52)
第 4 章 随机变量的数字特征	(53)
4.1 数学期望	(53)
4.2 随机变量函数的期望	(55)
4.3 方差和标准差	(56)
4.4 协方差与相关系数	(57)
4.5 典型例题分析	(58)
习题四	(62)
本章小结	(63)
第 5 章 极限定理	(64)
5.1 大数定律	(64)
5.2 中心极限定理	(65)
5.3 典型例题分析	(68)
习题五	(70)
本章小结	(71)
第 6 章 样本分布	(72)
6.1 总体和样本	(72)
6.2 样本的数字特征	(76)
6.3 常用统计量的分布	(77)
6.4 典型例题分析	(82)
习题六	(85)
本章小结	(86)
第 7 章 参数估计	(87)
7.1 点估计	(87)
7.2 估计量	(90)
7.3 区间估计	(92)
7.4 典型例题分析	(94)

习题七	(100)
本章小结	(102)
第 8 章 假设检验	(103)
8.1 假设检验的基本概念	(103)
8.2 单个正态总体的假设检验	(106)
8.3 两个正态总体的假设检验	(109)
8.4 总体分布的假设检验	(110)
8.5 典型例题分析	(112)
习题八	(118)
本章小结	(120)
第 9 章 方差分析*	(121)
9.1 单因素方差分析	(121)
9.2 双因素方差分析	(123)
9.3 典型例题分析	(125)
习题九	(127)
本章小结	(128)
第 10 章 回归分析*	(129)
10.1 一元线性回归方程	(129)
10.2 可线性化的回归方程	(135)
10.3 多元线性回归	(137)
10.4 典型例题分析	(139)
习题十	(141)
本章小结	(142)
模拟试题一	(143)
模拟试题二	(147)
习题及模拟试题参考答案	(150)
附录 标准正态分布表	(161)
参考书目	(162)



第 1 章

随机事件及其概率

本章为全书的基础，给出了随机事件的定理以及随机事件概率发生的基本运算。

内容提要	随机事件，概率，概率的加法定理，条件概率与乘法定理，独立实验概型。
基本要求	1. 了解随机事件的概念及相互关系； 2. 掌握概率的概念和基本运算，能运用概率的加法定理以及乘法定理进行概率相关运算。
重点难点	重点：概率的加法定理，条件概率与乘法定理，独立实验概型； 难点：条件概率与乘法定理，独立实验概型。

1.1 随机事件

1.1.1 事件

在自然界和人类社会中，人们观察到的现象可归结为两大类——必然现象和随机现象。

1. 必然现象和随机现象

必然现象是指在给定条件下一定出现的现象，是一种可事前预言的确定性现象。例如，重物在高处总是垂直落在地面；在标准大气压下，纯水加热到 100℃ 时一定沸腾等。

随机现象是指在相同的条件下，可能出现也可能不出现的现象，是一种事前不可预测的偶然现象。例如，射击时命中的环数；新生的婴儿可能是男

孩也可能是女孩等。

概率论与数理统计则是研究随机现象统计规律性的一门数学学科。对随机现象的观察称为随机实验。

2. 随机事件

随机事件是指在随机实验中,可能出现、也可能不出现的结果,简称为事件。一般用字母 $A, B, C \cdots$ 表示事件。

例 1 抛掷一枚骰子,观察出现的点数,可有 6 种不同的结果: $A = \{\text{取得的点数是 1}\} \cdots B = \{\text{取得的点数是 6}\}$ 。

此外,还有其他可能的结果,例如: $C = \{\text{取得的点数是偶数}\}$, $D = \{\text{取得的点数是个大于 3 的数}\}$ 等等。

3. 基本事件和复合事件

不可能再分的事件称为基本事件。如例 1.1 中的 A, B 都是基本事件;

把由若干个基本事件组合而成的事件称为复合事件。如例 1.1 中的 D 是一个复合事件,由 $\{\text{取得的点数是 4}\}$, $\{\text{取得的点数是 5}\}$, $\{\text{取得的点数是 6}\}$ 三个基本事件复合而成。

1.1.2 事件的关系和运算

在一定条件下必然发生的事件称为必然事件(用 Ω 表示);在一定条件下必然不发生的事件称为不可能事件(用 Φ 表示)。

不同的事件之间,有一定的关系。

1. 事件的关系

1) 互不相容

如果两个事件 A 和 B 不可能同时发生,则称事件 A 和 B 互不相容。

例如, Ω 和 Φ 是互不相容的;例 1 中的 A 和 B 是互不相容的。当且仅当 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中任意两个事件互不相容时,才称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是互不相容的。

2) 包含关系

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称事件 A 包含于事件 B ,或事件 B 包含事件 A ,记为 $A \subset B$ 。

例如,在例 1.1 中,事件 $\{\text{取得的点数是 6}\} \subset \{\text{取得的点数是个大于 3 的数}\}$;对于任意给定的事件 A ,皆存在 $\Phi \subset A \subset \Omega$ 。

3) 相等关系

如果存在 $A \subset B$ 且 $B \subset A$,则称事件 A 与事件 B 相等,记为 $A = B$ 。

4) 对立关系

事件 Ω 与 A 的差 $\Omega - A$ 称为 A 的对立事件, 记为 $\bar{A}$, 表示“事件 A 不发生”。

2. 事件的运算

1) 事件的和

如果事件 A 与事件 B 中至少有一个发生, 则称为事件 A 与事件 B 的和(并), 记为 $A \cup B / (A + B)$ 。

例如, 例1中, $\{\text{取得点数是3}\} \cup \{\text{取得点数是2}\} = \{\text{取得点数是3或者2}\}$ 。

2) 事件的积

如果事件 A 与事件 B 同时发生, 则称为事件 A 与事件 B 的积(交), 记为 $A \cap B / (AB)$ 。

例如, 例1中, $\{\text{取得点数是6}\} \cap \{\text{取得点数是个大于3的数}\} = \{\text{取得点数是6}\}$, 对于任意给定的事件 A , 皆存在 $A \cap \Omega = A$, $A \cap \Phi = \Phi$; 对于互不相容的事件 A 和 B , 则 $A \cap B = \Phi$ 。

3) 事件的差

如果事件 A 发生而事件 B 不发生, 则称为事件 A 与事件 B 的差, 记为 $A - B$ 。

例如, 例1中, $\{\text{取得的点数是偶数}\} - \{\text{取得的点数是6}\} = \{\text{取得的点数是2或4}\}$, 对于任意给定的事件 A , 皆存在 $A - A = \Phi$, $A - \Phi = A$ 。

4) 事件的逆

事件 A 的对立事件 $\bar{A}$ 又称为 A 的逆事件。

* 事件的和与积可以推广到无限多个的情况:

$B = \bigcup_{i=1}^n A_i$ —— 表示“ $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中至少有一事件发生”;

$B = \bigcap_{i=1}^n A_i$ —— 表示同时发生”。

事件之间符合如下运算关系式:

(1) 交换律: $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$

(2) 结合律: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(3) 分配律: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(4) $A - B = A \cap \bar{B}$

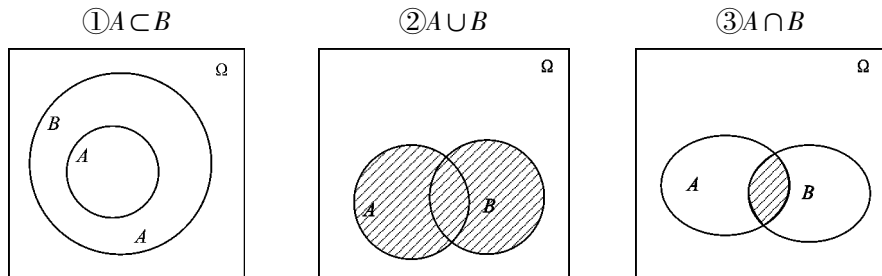
(5) 对偶律: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$; $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

1.1.3 样本空间

样本空间是指一次随机试验中, 由所有基本事件对应的全部元素组成的集合。用符号 Ω 表示, 样本空间中的每一个元素称为样本点。

例2 新生双胞胎的性别, 其基本事件为: $\omega_1 = (\text{男}, \text{女})$ 、 $\omega_2 = (\text{男}, \text{男})$ 、 $\omega_3 = (\text{女}, \text{女})$ 、 $\omega_4 = (\text{女}, \text{男})$; 样本空间为: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ 。

我们以平面上的矩形表示样本空间, 则矩形内的每一点表示样本点, 如下图, 用圆形表示事件 A 和事件 B , 则事件 A 和事件 B 的关系可表示为如下阴影部分所示:



例3 抛掷一颗骰子, 观察出现的点数:

$A = \{\text{取得的点数为偶数}\}$, $B = \{\text{取得的点数小于 } 3\}$, 试用列举法表示 Ω 、 A 、 B 、 $A+B$ 、 $A-B$ 、 AB 、 $\bar{A}$ 。

解 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 2\}$

$A+B = \{1, 2, 4, 6\}$, $AB = \{2\}$, $\bar{A} = \{1, 3, 5\}$

例4 箱子中有红黑两种球, 设 A_k 为第 k 次摸到红球 ($k=1, 2$), 试用符号表示事件: (1) 两次都摸到红球; (2) 两次都没摸到红球; (3) 两次中至少有一次摸到红球。

解 (1) $A_1 A_2 / A_1 \cap A_2$

(2) $\bar{A}_1 \bar{A}_2$

(3) $A_1 \cup A_2$

例5 市场上出售甲乙两种电视机, 事件 $A = \{\text{甲产品畅销}\}$, $B = \{\text{乙产品畅销}\}$ 。试解释下列事件的含义: $\bar{A}$, $\bar{B}$, $A+B$, AB , $\bar{A}+\bar{B}$, $A-B$ 。

解 $\bar{A} = \{\text{甲产品不畅销}\}$, $\bar{B} = \{\text{乙产品不畅销}\}$,

$A+B = \{\text{甲、乙产品至少有一种畅销}\}$, $AB = \{\text{甲、乙产品都畅销}\}$

$$\overline{A+B} = \{\text{甲、乙产品至少有一种不畅销}\}$$

$$A-B = \{\text{甲产品畅销, 但乙产品不畅销}\}$$

例6 若事件表示数轴上质点的位置情况, 且 $A = \{x: x \leq 10\}$, $B = \{x: 3 \leq x \leq 7\}$, $C = \{x: x \geq 15\}$, 试计算: $A+B$, AB , AC 。

解 $A+B = \{x: 3 \leq x \leq 10\}$, $AB = \{x: 3 \leq x \leq 7\}$, $AC = \Phi$

1.2 概率

概率论与数理统计研究随机现象的规律, 包括可能出现的事件, 以及各事件发生的可能性大小, 而概率是事件在试验中发生可能性大小的数量指标。

事件 A 的概率记为 $P(A)$, 并且规定了 $0 \leq P(A) \leq 1$ 。

概率 $P(A)$ 具有如下性质:

- 1) 任何事件的概率不大于 1, 不小于 0, 即: $0 \leq P(A) \leq 1$;
- 2) 必然事件的概率等于 1, 即 $P(\Omega) = 1$; 不可能事件的概率等于 0, 即 $P(\Phi) = 0$;
- 3) 若 $B \subset A$, 则事件 A 与事件 B 积的概率为事件 B 的概率, 即 $P(AB) = P(B)$ 。

通常事件的概率可通过古典概率和统计概率进行计算。

1.2.1 古典概率

对于某一随机实验, 如果其全体基本事件 $E_1, E_2, \dots, E_n$ 为有限个, 且具有等可能性, 则对任意事件 A , 对应的概率 $P(A)$ 计算式为:

$$P(A) = \frac{\text{事件 } A \text{ 包含的基本事件数}(k)}{\text{基本事件总数}(n)}$$

我们称其为古典概率。

例1 箱子中有 5 个红球, 2 个黑球, 现从中任意取出一球, 求取出的球为黑球的概率。

解 令事件 $A = \{\text{取出的球为黑球}\}$, 则 A 包含的基本事件数为 $k=2$, 基本事件总数为 $n=7$, 因此, 取出的球为黑球的概率为 $P(A) = \frac{k}{n} = \frac{2}{7}$ 。

例2 从一批由 10 件正品、5 件次品组成的产品中任取 3 件产品: (1) 求其中恰有 1 件次品的概率; (2) 求三件产品均为正品的概率。

解 (1) 设 $A = \{ \text{取出的 3 件产品中恰有 1 件次品} \}$ ，则 A 包含的基本事件数为：

(从 5 件次品中取出 1 件，即 C_5^1) $\times$ (从 10 件正品中取出另外 2 件，即 C_{10}^2)，即 $k = C_5^1 C_{10}^2$ ，而基本事件总数为 $n = C_{15}^3$ ，因此， $P(A) = \frac{k}{n} = \frac{C_5^1 C_{10}^2}{C_{15}^3} \approx 0.4945$ 。

(2) 设 $A_1 = \{ \text{取出的 3 件产品均为正品} \}$ ，则 A_1 包含的基本事件数为：
 $k = C_{10}^3$ ，因此， $P(A_1) = \frac{k}{n} \approx \frac{C_{10}^3}{C_{15}^3} \approx 0.2637$ 。

例 3 连续两次抛掷一颗完全对称的骰子，求两次抛掷的点数之和等于 11 的概率。

解 设 $A = \{ \text{两次抛掷点数之和为 11} \}$ ，则 A 包含的基本事件包括：(5, 6)、(6, 5) 两个，即 $k = 2$ ，基本事件总数为 $n = 6 \times 6 = 36$ 个，因此， $P(A) = \frac{k}{n} = \frac{1}{18}$ 。

1.2.2 统计概率

考虑抛掷硬币的实验，其结果可列于表 1-1 所示：

表 1-1

抛掷次数	正面出现次数	正面出现频率
2048	1061	0.518
4040	2048	0.5069
12000	6019	0.5016
24000	12012	0.5005
30000	14994	0.4998

从表 1-1 可以看出，硬币正面出现的频率在 0.5 附近摆动。

再看我国人口数据，表 1-2 是我国(香港、澳门及台湾除外) 1950—1990 年人口的统计资料：

表中数据是国家统计局公布的我国每年年底的人口数，可以看出，我国男性比重在 51% 附近摆动，而女性比重在 48% 附近摆动。