高等学校教材

微积分

主编 吴珊 江小勤
副主编 陕勇

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

微　积　分

Weijifen

主　编　吴　珊　江小勤
副主编　陕　勇

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书为全一册，分为八章，内容涵盖函数、极限、连续，导数与微分，中值定理与导数的应用，不定积分，定积分，常微分方程简介，多元函数微积分学，无穷级数等。本书适当降低理论深度，突出微积分的应用和运算方法，着重基本技能的训练而不过分追求解题技巧。

本书结构严谨、知识系统，讲解透彻、深入浅出，通俗易懂、适应面宽，可作为普通高等学校经济管理类专业微积分课程的教材，也可供高职高专院校相关专业选用。

图书在版编目(CIP)数据

微积分/吴珊，江小勤主编. --北京：高等教育出版社，2013.8

ISBN 978-7-04-038151-1

Ⅰ.①微… Ⅱ.①吴… ②江… Ⅲ.①微积分-高等学校-教材 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 169165 号

策划编辑 张彦云　责任编辑 张彦云　封面设计 张申申　版式设计 王艳红
插图绘制 杜晓丹　责任校对 孟 玲　责任印制 刘思涵

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京人卫印刷厂	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×960mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	17.75	版　　次	2013 年 8 月第 1 版
字　　数	320 千字	印　　次	2013 年 8 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	26.20 元

物 料 号 38151-00

前　言

本书根据经济管理类本科数学基础课程教学基本要求编写而成，内容设计简明，而结构体系上又不失完整。全书共分八章，涵盖函数、极限、连续，导数与微分，中值定理与导数的应用，不定积分，定积分，常微分方程简介，多元函数微积分学，无穷级数等。各节后均配有习题，各章后还配有本章小结，书后附全部习题的参考答案与部分习题的提示。

因为面向经管类专业学生，本着"打好基础，够用为度；服务专业，兼顾数学体系"的原则，本书不盲目攀比难度，而是力求做到难易适当，深入浅出，举一反三，融会贯通。在数学思想和方法的讲解过程中，注重数形结合，并与实践应用背景相结合，强调应用能力的培养，同时适当注意知识面的拓宽。在教材体系、内容和例题的选择等方面吸收了国内外优秀教材的优点，也汇集了编者的教学经验。

为了加深对概念的理解，培养逻辑推理能力，比较简单的定理尽量给出证明，这有助于对这些定理的掌握和运用；对于某些证明过程复杂的定理和性质，略去其证明过程。选讲的内容加"*"号，供读者深入学习时使用。

本书在编写过程中，一直受到学校及出版社相关领导的鼓励与支持，并获得了多位相关专家、教授和同事的悉心指导与耐心帮助，在此表示最真挚的感谢！

百密一疏，加之水平有限，书中难免有不足之处，恳请广大读者提出宝贵意见。编者将会根据各位提出的建议，对教材不断改进与完善，更好地为教学服务。

编　者

2013 年 4 月

目　录

第一章　函数　极限　连续

第一节　函　　数

在微积分中，经常要用到区间和函数的一些知识，为此，在学习微积分之前，先复习有关区间和函数的一些基础知识.

一、区间与邻域

1. 区间

两个实数间的全体实数叫做区间，而这两个实数叫做区间的端点.

设 a,b 为实数，且 $a<b$，满足不等式 $a<x<b$ 的所有实数的集合，称为以 a、b 为端点的**开区间**，记作 (a,b)；满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的所有实数的集合，称为以 a,b 为端点的**闭区间**，记作 $[a,b]$；满足不等式 $a<x\leqslant b$（或 $a\leqslant x<b$）的所有实数的集合，称为以 a,b 为端点的**半开半闭区间**，记作 $(a,b]$ 或 $[a,b)$.

此外还有**无限区间**：

$$(a,+\infty)=\{x\,|\,x>a\},\quad (-\infty,b)=\{x\,|\,x<b\},$$

$$[a,+\infty)=\{x\,|\,x\geqslant a\},\quad (-\infty,b]=\{x\,|\,x\leqslant b\}.$$

$(-\infty,+\infty)$ 表示全体实数的集合，也记作 $\mathbf{R}$，它也是无限区间. 另外，我们约定，将全体非负整数，即自然数的集合记作 $\mathbf{N}$，全体整数的集合记作 $\mathbf{Z}$，全体有理数的集合记作 $\mathbf{Q}$. 而用 $\mathbf{R}^+$ 表示全体正实数的集合，$\mathbf{R}^-$ 表示全体负实数的集合，依此还可以得出其他数集类似记号的含义，例如全体正整数集合 $\mathbf{Z}^+$ 等.

2. 邻域

设 a,δ 为实数且 $\delta>0$，将满足不等式 $|x-a|<\delta$ 的全体实数的集合称为以 a 为中心，δ 为半径的**邻域**，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\left\{x\,\middle|\,|x-a|<\delta\right\}=(a-\delta,a+\delta).$$

例如，$(4,6)=U(5,1)=\left\{x\,\middle|\,|x-5|<1\right\}$，邻域可以看成区间的另一个表示形式，它强调的是区间的中心位置与半径.

如果把邻域 $U(a,\delta)$ 的中心点 a 去掉，所得到的集合称为**点 a 的去心邻域**，记作 $U^{\circ}(a,\delta)$，这种邻域也通常表示为 $0<|x-a|<\delta$.

二、函数

函数是微积分中研究的基本对象之一. 本节主要介绍常量与变量及函数的有关概念.

在研究客观事物的数量特征时,我们经常遇到两种不同本质的量. 一种是在研究过程中只取一个固定数值的量,称为**常量**,如两地间的距离、某商品的单价(在某段时间内)等;另一种是在同一研究过程中可以取不同数值的量,称为**变量**,如工厂的月产量、销售某商品的收入、一天内的气温等. 今后我们主要讨论变量,而且是讨论诸多变量之间的变化关系,要用变化的观点来分析和解决问题.

1. 函数的定义

定义 1 设 D 是非空实数集,若有一个对应法则 f,使得任意 $x\in D$,都有唯一确定的实数 y 与之对应,则称这个对应法则 f 为定义在 D 上的**一元函数**,记作 $y=f(x),x\in D$. 其中 x 称为**自变量**,y 称为**因变量**,D 称为**定义域**. 与 x_0 相对应的 y 记为 $y_0=f(x_0)$,称为 $x=x_0$ 时的函数值,于是 $y=f(x)$ 也是 x 的函数值,并称全体函数值构成的集合 $Z(f)=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$ 为函数的**值域**.

应当注意,函数的对应法则和定义域称为函数的两个要素,值域由这两个要素唯一确定. 所以,两个函数相等是指:两个函数的对应法则和定义域完全相同.

习惯上,我们只给出函数的对应法则,而未指明其定义域,例如函数 $y=x^2(-\infty<x<+\infty)$ 简记为 $f(x)=x^2$. 函数的定义域问题通常从以下两个角度去分析:

(1) 在函数的数学表达式的研究中,必须考虑计算是否可行. 例如:

表达式中含分母,要求分母不为零;

表达式中含偶次根式,要求被开方数非负;

表达式中含对数运算,要求真数为正,底数为正且不等于 1;

表达式中含正切 $\tan x$、正割 $\sec x$(见附录Ⅰ),要求角 x 不等于 $\frac{2k+1}{2}\pi(k\in\mathbf{Z})$;表达式中含余切 $\cot x$、余割 $\csc x$(见附录Ⅰ),要求角 x 不等于 $k\pi(k\in\mathbf{Z})$;

表达式中含反正弦 $\arcsin u$、反余弦 $\arccos u$,要求 u 在 $[-1,1]$ 上取值.

(2) 在实际问题中,还必须考虑变量的实际意义.

在数学中,有时不考虑函数的实际意义,而抽象地研究用算式表达的函数. 这时我们约定,函数的定义域就是自变量所能取的使算式有意义的一切实数所组成的集合,这样约定的定义域也称为**自然定义域**.

例 1 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{2x}{x^2-2x-3}$;

(2) $y=\dfrac{1}{\lg(3x-2)}$;

(3) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{5}+\dfrac{1}{\sqrt{25-x^2}}$.

解 (1) 要使$\dfrac{2x}{x^2-2x-3}$有意义,必须满足 $x^2-2x-3\neq 0$,即 $x\neq -1$ 且 $x\neq 3$,故

$$D(f)=(-\infty,-1)\cup(-1,3)\cup(3,+\infty).$$

(2) 要使$\dfrac{1}{\lg(3x-2)}$有意义,必须满足 $3x-2>0$ 且 $3x-2\neq 1$,即 $x>\dfrac{2}{3}$且 $x\neq 1$,故

$$D(f)=\left(\frac{2}{3},1\right)\cup(1,+\infty).$$

(3) 要使 $\arcsin\dfrac{x-1}{5}+\dfrac{1}{\sqrt{25-x^2}}$有意义,必须满足$\left|\dfrac{x-1}{5}\right|\leqslant 1$ 且 $25-x^2>0$,即$-4\leqslant x\leqslant 6$ 且$-5<x<5$,故

$$D(f)=[-4,5).$$

2. 函数的表示法

函数通常可以用三种方法表示:表格法、图示法与解析法.

(1) 表格法:用一个表格来表示变量之间的关系,其优点是可以用来表示还不知道数学表达式的函数.例如,某商品产量和气温的关系如下:

温度/℃	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65
产量/kg	13.2	15.1	16.4	17.1	17.9	18.7	19.6	21.2	22.5	24.3

(2) 图示法(xOy 平面上的曲线):借助坐标系,将变量之间的关系用图形来描绘,其特点是直观,但不够精确.

(3) 解析法:用数学表达式(也叫解析表达式)来表示两个变量之间的关系.这种方法便于应用数学分析的方法加以研究,但抽象且不直观.

例 2 符号函数

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$$

它的定义域是$(-\infty,+\infty)$,值域为$\{-1,0,1\}$.如图 1-1.

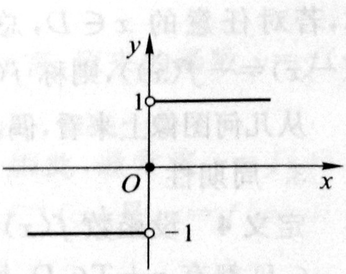


图 1-1

例 3 **取整函数** $f(x)=[x]$.

对任意实数 x,记$[x]$为不超过 x 的最大整数,称 $f(x)=[x]$为取整函数. 例如,$[-6.5]=-7$, $[0.6]=0$, $[1.3]=1$, $[3.5]=3$.

它的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域是由全体整数组成的. 如图 1-2.

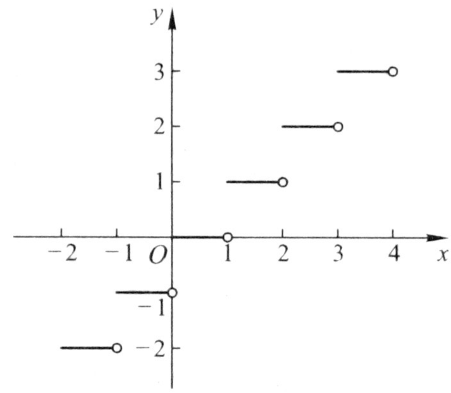


图 1-2

上述两个例子中的函数在定义域的不同范围内具有不同的解析表达式,这样的函数称为**分段函数**.

三、函数的特性

1. 单调性

定义 2 设函数 $f(x)$的定义域是 D,区间 $I\subseteq D$,若对任意的 $x_1,x_2\in I$ 且 $x_1<x_2$总有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$),则称 $f(x)$在区间 I 上为**单调递增(或递减)函数**. 此时区间 I 称为**单调区间**.

单调递增函数和单调递减函数统称为单调函数.

从几何图像上来看,单调递增(递减)函数的图像沿 x 轴正向逐渐上升(下降). 应当注意:单调性与单调区间密切相关.

例如,函数 $y=x^2$ 在区间$(-\infty,0)$上是单调递减的,在区间$(0,+\infty)$上是单调递增的,但在区间$(-\infty,+\infty)$上不是单调的. 如图 1-3.

如果把定义 2 中的 $f(x_1)<f(x_2)$ 改成 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$,那么从广义上来讲,也称 $f(x)$在区间 I 上单调递增,或者称 $f(x)$在区间 I 上单调非减. 但在本书后面的章节中,除特殊说明以外,单调性一律使用定义 2.

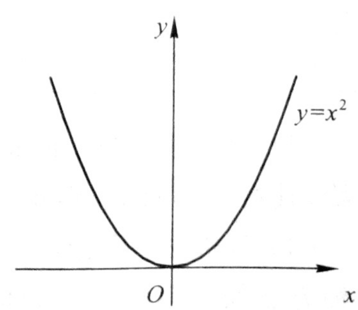


图 1-3

2. 奇偶性

定义 3 设函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称,若对任意的 $x\in D$,总有 $f(-x)=f(x)$(或 $f(-x)=-f(x)$),则称 $f(x)$是**偶函数**(或**奇函数**).

从几何图像上来看,偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于原点对称.

3. 周期性

定义 4 设函数 $f(x)$的定义域为 D,如果存在一个非零常数 T,使得对每一个 $x\in D$ 都有 $x+T\in D$,且总有 $f(x+T)=f(x)$,则称 $f(x)$是**周期函数**,T 称为 $f(x)$的**周期**. 通常我们所说的周期是指最小正周期.

例如,函数 $y=\sin x$,$y=\cos x$ 是周期为 2π 的周期函数,$y=\tan x$ 是周期为 π 的周期函数.

根据周期函数的特点,只要作出函数在长度为周期 T 的一个区间上的图形,就可以通过图形的平移画出整个函数的图形.

4. 有界性

定义 5 设函数 $f(x)$的定义域是 D,数集 $I\subseteq D$,如果存在常数 A,使对任意 $x\in I$,都满足 $f(x)\leqslant A(f(x)\geqslant A)$,则称函数 $f(x)$在 I 上有**上界**(**下界**),其中 A 称为函数 $f(x)$在 I 上的**上界**(**下界**).如果函数 $f(x)$在 I 上既有上界也有下界,则称函数 $f(x)$在 I 上**有界**,有界性也有如下简化定义.

定义 6 设函数 $f(x)$的定义域是 D,数集 $I\subseteq D$,如果存在正数 M,使对任意 $x\in I$,都满足 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$在 I 上**有界**;如果这样的 M 不存在,就称函数 $f(x)$在 I 上无界.

注意 (1) 函数的有界性与所考虑的数集 I 密切相关;

(2) 函数的上界(或下界)不是唯一的.

例如,函数 $y=\sin x$,$y=\cos x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是有界的,因为对任意实数 $x\in\mathbf{R}$,恒有 $|\sin x|\leqslant 1$,$|\cos x|\leqslant 1$;又如,函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在$(0,1)$内无界,在$[1,+\infty)$上有界.

有界函数的几何特征是它的图像介于直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间,如图 1-4.

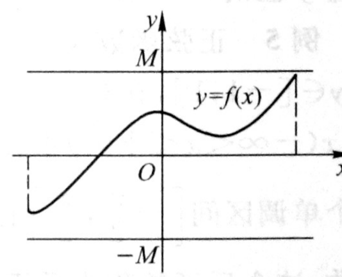


图 1-4

四、反函数与复合函数

1. 反函数

定义 7 设给定函数 $y=f(x)$,定义域为 D,值域为 Z.若对每一个 $y\in Z$,都有唯一的 $x\in D$ 满足关系式 $f(x)=y$,此时视 y 为自变量,其对应的 x 为因变量,从而得到一个定义在 Z 上的新函数,称其为 $y=f(x)$的**反函数**,记作

$$x=f^{-1}(y).$$

这个函数的定义域是 Z,值域为 D.相对于反函数而言,原来的函数 $y=f(x)$称为**直接函数**.

习惯上,我们用 x 表示自变量,用 y 表示因变量.因此,通常将 $y=f(x)$的反函数 $x=f^{-1}(y)$改写为 $y=f^{-1}(x)$,此时称 $y=f^{-1}(x)$是 $y=f(x)$的反函数.

函数 $y=f(x)$与其反函数 $x=f^{-1}(y)$在同一坐标系中有相同图形,但与其

改写后的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 在同一坐标系中的图像关于直线 $y=x$ 对称，如图 1-5.

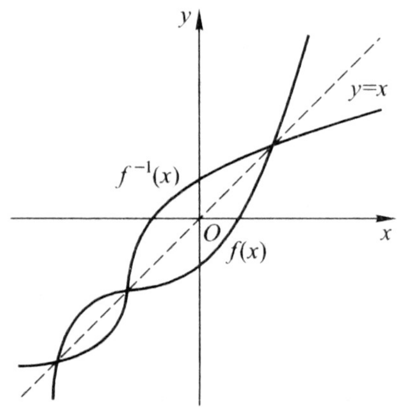


图 1-5

例 4 求 $y=2x-3$ 的反函数.

解 由 $y=2x-3$ 得 $x=\dfrac{y+3}{2}$，将其改写为 $y=\dfrac{x+3}{2}$，此即为所求反函数.

注意 一个函数如果有反函数，则它必定是一一对应的函数关系；单调函数必有同样单调性的反函数.

例如，函数 $y=x^2$，当限制 y 在 $(-\infty,0)$ 内取值时有反函数 $y=-\sqrt{x}$；当限制 y 在 $(0,+\infty)$ 内取值时有反函数 $y=\sqrt{x}$，但 $y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上无反函数，因为对应 y 值的 x 不唯一.

例 5 正弦函数 $y=\sin x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[-1,1]$. 对于任意 $y\in[-1,1]$，在 $(-\infty,+\infty)$ 内有无穷多个 x 值满足 $\sin x=y$，因此 $y=\sin x(-\infty<x<+\infty)$ 不存在反函数. 但如果把正弦函数的定义域限制在它的一个单调区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上，这样得到的函数 $y=\sin x\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$ 就存在反函数. 这个反函数称为**反正弦函数**，记作 $y=\arcsin x$，它的定义域是 $[-1,1]$，值域是 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

类似地，定义在区间 $[0,\pi]$ 上的余弦函数 $y=\cos x$ 的反函数称为**反余弦函数**，记作 $y=\arccos x$，它的定义域是 $[-1,1]$，值域是 $[0,\pi]$；定义在区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上的正切函数 $y=\tan x$ 的反函数称为**反正切函数**，记作 $y=\arctan x$，它的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域是 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$；定义在区间 $[0,\pi]$ 上的余切函数 $y=\cot x$ 的反函数称为**反余切函数**，记作 $y=\operatorname{arccot} x$，它的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域是 $(0,\pi)$.

2. 复合函数

定义 8 设函数 $y=f(u)$ 的定义域是 $D(f)$，函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 $Z(\varphi)$，若 $Z(\varphi)\cap D(f)\neq\varnothing$，则称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 为**复合函数**，其中 x 为自变量，y 为因变量，u 为中间变量.

注意 (1) 关于函数的复合，条件“函数 $u=\varphi(x)$ 的值域 $Z(\varphi)$ 与 $y=f(u)$ 的定义域 $D(f)$ 有非空交集”必须成立.

（2）将 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 复合的过程叫做**复合运算**；反之，由复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 找 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 的过程叫做**分解运算**.

（3）复合函数可以由两个以上的函数复合而成；反过来，一个较复杂的函数，根据需要也可以分解为若干个简单函数.

例 6 将下列函数分解为较简单的函数.

（1）$y=\arcsin(\ln 3x)$；

（2）$y=e^{\sin\frac{1}{x}}$.

解 （1）函数 $y=\arcsin(\ln 3x)$ 由下列函数复合而成：

$$y=\arcsin u,\quad u=\ln v,\quad v=3x.$$

（2）函数 $y=e^{\sin\frac{1}{x}}$ 由下列函数复合而成：

$$y=e^u,\quad u=\sin v,\quad v=\frac{1}{x}.$$

五、初等函数

在中学，我们已经学过一些常用的初等函数：

1. 常数函数：$y=C$（C 为常数）.
2. 幂函数：$y=x^\alpha$（α 为实数）.
3. 指数函数：$y=a^x$（$a>0, a\neq 1$）.
4. 对数函数：$y=\log_a x$（$a>0, a\neq 1$）.
5. 三角函数：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$，$y=\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$，$y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$，$y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$.
6. 反三角函数：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$.

上述六类函数是构成较复杂函数的基本单元，称为**基本初等函数**，具体的图形和性质参见本书附录Ⅰ，而相应的一些运算法则和公式参加附录Ⅱ，这些都是以后要经常使用的函数，应熟练掌握.

定义 9 若函数是由基本初等函数经过有限次的四则运算及有限次的复合运算构成的，且可以用一个数学表达式表示，则称其为**初等函数**.

除此以外的函数称为非初等函数，本节例 2、例 3 中的函数都是非初等函数.

实际上，我们碰到的多数具有唯一表达式的函数都是初等函数，例如，$y=\sqrt{1+x^2}$，$y=\arctan x^2$，$y=2^{\sin x}$，等等.

习题 1-1

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{3x+2}$;

(2) $y=\frac{1}{1-x^2}$;

(3) $y=\frac{1}{x}-\sqrt{4-x^2}$;

(4) $y=\arcsin(x-3)$;

(5) $y=\frac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}$;

(6) $y=\sqrt{\lg\frac{5x-x^2}{4}}$.

2. 讨论下列函数的奇偶性：

(1) $y=\frac{|x|}{x}$;

(2) $y=\cos(\sin x)$;

(3) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$;

(4) $y=f(x)+f(-x)$;

(5) $y=\begin{cases}1 & ,x\geqslant 0,\\ -1 & ,x<0;\end{cases}$

(6) $y=\frac{a^x-1}{a^x+1}$.

3. 指出下列函数中哪些是周期函数，并求出周期函数的周期.

(1) $y=\cos(x-2)$;

(2) $y=\cos 4x$;

(3) $y=1+\sin \pi x$;

(4) $y=x\cos x$;

(5) $y=\sin^2 x$;

(6) $y=|\tan x|$.

4. 求下列函数的反函数：

(1) $y=\sqrt[3]{x+1}$;

(2) $y=\frac{1-x}{1+x}$;

(3) $y=3\sin 2x, x\in\left[\frac{-\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$;

(4) $y=1+\ln(x-2)$.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}x+2, & x\geqslant 1,\\ x^2-2, & x<1,\end{cases}$ 求 $f(0),f(1),f(x-1)$.

6. 将下列函数分解为基本初等函数.

(1) $y=(e^x)^2$;

(2) $y=e^{x^2}$;

(3) $y=(\ln x^2)^3$;

(4) $\ln\tan 2x$;

(5) $y=\sqrt{\ln\sqrt{x}}$;

(6) $y=\lg^2\arccos x^3$.

7. 某商品供给量 Q 对价格 P 的函数关系为

$$Q=Q(P)=a+bc^P\ (c\neq 1),$$

已知当 $P=2$ 时，$Q=30$；当 $P=3$ 时，$Q=50$；当 $P=4$ 时，$Q=90$. 求供给量 Q 对价格 P 的函数关系.

8. 某化肥厂生产某种产品 1 000 吨，每吨定价为 130 元. 销售量在 700 吨以下时，按照原价出售；超过 700 吨时，超过的部分打九折出售，试将销售总收益与总销售量的函数关系用数学表达式表出.

第二节　极　　限

极限概念是微积分中极为重要的基本概念，贯穿于微积分始终. 极限是研究变量的变化趋势的基本工具，微积分中许多基本概念例如连续、导数、微分、积

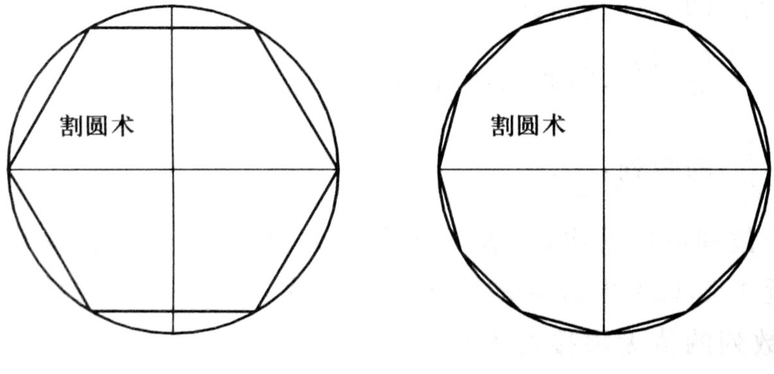
分、级数等，均建立在极限的基础上. 因此，掌握极限的理论和计算方法是学习微积分的基础.

本节先介绍一种特殊形式的函数极限——数列的极限，并在此基础上介绍函数极限的一般概念与性质.

一、数列的极限

极限的思想是由于求某些实际问题的精确解而产生的. 例如，我国魏晋时期的数学家刘徽用来推算圆面积的方法——割圆术，就是极限思想在几何学上的应用.

设有一圆，首先作内接正六边形（如图 1－6(a)），把它的面积记为 A_1；再作正十二边形（如图 1－6(b)），其面积记为 A_2；再作正二十四边形，其面积记为 A_3；依次下去，每次边数加倍，一般地，把内接正 $6\times 2^{n-1}$ 边形的面积记为 $A_n(n=1,2,3,\cdots)$.



(a)　　(b)

图 1－6

这样，就得到一系列内接正多边形的面积：

$$A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n,\cdots,$$

它们构成一列数. n 越大，内接正多边形与圆的差别就越小，从而以 A_n 作为圆面积的近似值也越精确. 设想 n 无限增大时，即内接正多边形的边数无限增加时，在这一过程中，从图形上来看，内接正多边形将无限接近于圆；从数值上看，内接正多边形的面积 A_n 将无限接近于一个确定的数值，这个数值就是所要求的圆的面积. 在数学上，将这个确定的数值称为数列 $A_n(n=1,2,3,\cdots)$ 当 n 趋于无穷时的极限.

下面对数列极限的概念进行一般的说明.

1. 数列的概念

定义 1　按一定的次序排列的无穷多个数：