线性代数

黄兰德 编

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

武汉大学出版社

线 性 代 数

黄兰德　编

武汉大学出版社

1991 年 4 月

线性代数
黄兰德 编
*
武汉大学出版社出版发行
(430072 武昌 珞珈山)
武汉大学出版社印刷总厂印刷
*
850×1168 毫米 1/32 7.5 印张 188 千字
1991 年 6 月第 1 版 1991 年 6 月第 1 次印刷
印数:1—1 000
ISBN 7-307-00753-3/O·65
定价:2.60 元

前　　言

作者曾对物理类、机电类、经济类等不同专业的学生讲授过线性代数课。本书就是根据作者长期讲授本门课程的讲稿整理而成的。内容的选择符合国家教委的“教学基本要求”，有些内容还有所超过，超过部分标有“*”号。目前非数学系的理科线性代数教材还不多，本书为物理类专业的线性代数教材，对于工科及经济类各专业也适用。

本书力求文字叙述深入浅出，便于自学；内容编排由浅入深，难易相间，便于教学；例题较多，突出计算和应用；概念清楚，逻辑推理严密性适当，符合非数学系的理工科各专业的特点。

线性代数是一门基础理论课，它在自然科学和工程技术领域中有着广泛的应用。特别是由于计算机的普及，解大型线性方程组、计算 n 阶行列式、求矩阵的特征值、特征向量、化矩阵为相似对角形等问题，几乎是工程技术人员和科技工作者常常碰到的问题，因此本书把这些内容作为基本内容。线性代数也是一门理论性、逻辑性很强的科学。为了有利于学生对基本理论、基本知识的理解和深化，有利于他们对基本方法的掌握和熟练，本书对线性代数中的一些抽象概念和基础理论，如线性空间、线性变换、欧氏空间、酉空间和酉变换等也给以一定的注意。

在本书的出版过程中，汕头大学有关的领导同志、汕头经济特区图书公司经理李通首先生等给予了大力帮助，武汉大学出版社对本书的问世，也给予了热诚的支持。本人在此向他们表示衷心的感谢，并向一切对本书的出版工作给予关心和支持的专家和

友人，致以深切的谢意。

由于水平所限，书中错误或不妥之处在所难免，谨请读者和教师们指正。

汕头大学

黄兰德

一九九一年一月

目　录

第一章 行 列 式

行列式是一个重要的数学工具，在许多数学分支及应用科学中，都经常要用到它．大家在中学已学过二阶、三阶行列式，并用它们解二元、三元的线性方程组．本章将在此基础上介绍 n 阶行列式的定义、性质及展开定理．最后介绍克莱姆法则．

§1.1 n 阶行列式的定义

（一）排列的逆序数

由 n 个数码 1，2，…，n 组成的任一排列 p_1，p_2，…，p_n，称为一个 **n 级排列**．在 n 级排列 p_1，p_2，…，p_n 中，规定各数的排列次序由小到大为**标准顺序或自然顺序**，亦即排列 1，2，…，n 为标准顺序．当某一对自然数的排列次序与标准顺序不同，也就是较大的数排在较小的数前面时，就说这一对自然数间有一个**逆序**．例如排列 3，2，1 中，因为 $3>2$ 且 3 排在 2 前面，所以数对 3，2 间有一个逆序．同样地，数对 3，1 间有一个逆序．数对 2，1 间也有一个逆序．一个排列中所有数对的逆序的总个数叫做这个排列的**逆序数**．排列 p_1，p_2，…，p_n 的逆序数记作 $N(p_1, p_2, \cdots, p_n)$．例如上述排列 3，2，1 的逆序数是 $N(3, 2, 1)=3$．如何计算排列 p_1，p_2，…，p_n 的逆序数？可先算左边第 1 位数 p_1 后面有几个比 p_1 小的数，因有多少个比 p_1 小的数，p_1 与它后面的数间就有多少

个逆序．类似地再算 p_2 后面有几个比 p_2 小的数，……，p_{n-1}后面有几个比 p_{n-1}小的数，最后把算得的诸数加起来，就是排列 p_1，p_2，…，p_n 的逆序数．例如

$$N(3,2,5,1,4)=2+1+2+0=5,$$

$$N(2,1,5,4,3)=1+0+2+1=4.$$

一个排列的逆序数，如果是奇数，就叫该排列为奇排列，如果是偶数，就叫该排列为偶排列．一个排列的逆序数为零，也称为偶排列．

（二）二、三阶行列式剖析

在中学已知道，二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}, \tag{1}$$

三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}. \tag{2}$$

从这里我们发现若干规律：

(i)　元素 a_{ij}的第一个下标 i 表示它所在的行数，叫行标；第二个下标 j 表示它所在的列数，叫列标．

(ii)　行列式中任一项都是从每行、每列中各抽一个元素所组成的乘积，但任何一行、任何一列都不会有两个元素出现在同一项中．二阶行列式的每一项都是不同行、不同列的二个元素的乘积；三阶行列式的每一项是不同行、不同列的三个元素的乘积．

(iii)　若把每项内各元素以行标为标准顺序的方式排列，则(1)乘积项中的元素的列标排列有二种：

1，2；　2，1；　(3)

而 (2) 中乘积项的元素的列标排列有六种：

1，2，3；2，3，1；3，1，2；3，2，1；2，1，3；1，3，

2. (4)

(3) 表示了 1，2 两个数码的一切可能的排列，共 $2!=2$ 种；(4) 表示了 1，2，3 三个数码的一切可能的排列，共 $3!=6$ 种. 可见二、三阶行列式的项数，分别与 2 个、3 个不同自然数的所有不同种排列的总数一致.

(iv) 行列式中各项的符号如何决定？当每项元素以行标为标准顺序排列时，如果其列标为奇排列就取负号，列标为偶排列的项则取正号. 三阶行列式中，任一项即一般项可表示为：

$$(-1)^{N(p_1,p_2,p_3)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3},$$

其中 p_1，p_2，p_3 为数 1，2，3 的任一排列. 从而可得到

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{(p_1,p_2,p_3)}(-1)^{N(p_1,p_2,p_3)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3},$$

这里 $\sum\limits_{(p_1,p_2,p_3)}$ 表示对数 1，2，3 的一切可能的排列求和.

根据上述对二、三阶行列式的剖析，不难推广到一般的情形，即 n 阶行列式的情形.

（三）n 阶行列式的定义

定义 1.1.1 由 n^2 个元素 a_{ij}（i，$j=1$，2，…，n）组成的运算式，记成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称为 n 阶行列式. 其中横排叫行，纵排叫列. 记这运算式为 D，并规定为

$$D=\sum_{(p_1,p_2,\cdots,p_n)}(-1)^{N(p_1,p_2,\cdots,p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}, \tag{5}$$

其中 p_1，p_2，…，p_n 是数 1，2，…，n 的某一排列，$\sum\limits_{(p_1,p_2,\cdots,p_n)}$ 是对 1，2，…，n 的一切可能的排列求和．由于这样的排列共 $n!$ 个，所以 n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和，实质是一个数．

当 $n=2$ 时，就是二阶行列式．当 $n=3$ 时，就是三阶行列式．一阶行列式 $|a|$ 就是 a．

从定义可见，行列式中若有一行（列）的元素全为零，则此行列式的值为零．

例 1.1.1　计算 n 阶对角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{vmatrix}$$

的值，其中没写出的元素全为零．从行列式的左上角到右下角的对角线称为**主对角线**．

解　由于 D 中除主对角线上元素外全为零，所以由行列式定义，D 中不为零的项只有一项，就是主对角线上各元素的乘积 $a_1a_2\cdots a_n$，而且当这一项的行标排列为标准顺序时，列标排列也为标准顺序，所以取正号，从而得到 $D=a_1a_2\cdots a_n$．特别地，若 $a_1=a_2=\cdots=a_n=1$，则 $D=1$．

例 1.1.2　计算 n 阶行列式 D：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

其中主对角线以上的元素全为零．这种行列式称为**下三角行列式**．

解　D 中不为零的项必是 n 个全不为零的元素的乘积，而且这 n 个元素必取自不同行、不同列．现在第一行只有 $a_{11}\neq 0$，因此第一行中只能取 a_{11}；那么第二行就不能取 a_{21} 而只能取 a_{22} 了；同理

第三行只能取 a_{33}；…；第 n 行只能取 a_{nn}. 也就是说，D 中不为零的项只有一项，就是 n 个对角元素的乘积 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. 又由于该项各元素的行标按标准顺序排列时列标也是标准顺序，所以此项应取正号. 即 $D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

请读者自己计算上三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的值，其中主对角下方的元素全为零.

例 1.1.3 确定四阶行列式

$$D_4=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

中下列各项的符号：

(i) $a_{11}a_{24}a_{33}a_{42}$； (ii) $a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}$；

(iii) $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$.

解 $a_{11}a_{24}a_{33}a_{42}$，$a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}$，$a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$的行标是标准顺序，下面只需考虑其列标的逆序数以判断其符号.

(i) $N(1,4,3,2)=2+1=3$，因此项 $a_{11}a_{24}a_{33}a_{42}$取负号.

(ii) $N(2,4,1,3)=1+2=3$，因此项 $a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}$取负号.

(iii) $N(4,3,2,1)=3+2+1=6$，因此项 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$取正号.

例 1.1.4 计算下列行列式的值：

$$D=\begin{vmatrix} & & & a \\ & & b & \\ & c & & \\ d & & & \end{vmatrix}.$$

解 $D=(-1)^{N(4,3,2,1)}abcd=(-1)^{6}abcd=abcd.$

（四）对换

如果将一个排列中两个元素的位置互换，其余的元素位置不动，就得到一个新的排列，这样的过程，叫做一次对换．例如将排列 2，3，1，4 中的 2 和 1 对换，就得到新排列 1，3，2，4．由于 $N(2,3,1,4)=2$，而 $N(1,3,2,4)=1$，可见对换 2 和 1 就改变了排列的奇偶性．这样的结论具有普遍性，即有

定理 1.1.1 一个排列中任意两个元素的一次对换，必改变排列的奇偶性．

证明 先证调换相邻两元素的情形，这称为相邻对换．设有排列

$$p_1, p_2, \cdots, p_m, r, s, q_1, q_2, \cdots, q_n,$$

对换 r 和 s 的位置后，成为

$$p_1, p_2, \cdots, p_m, s, r, q_1, q_2, \cdots, q_n.$$

显然对换前后数字 r 与 s 和其余数字所成的逆序未变，以及 p_1，p_2，…，p_m，q_1，q_2，…，q_n 本身的逆序数未变，只有 r 和 s 的逆序变了．如果 $r<s$，则对换后排列的逆序数增加了 1 个；如果 $r>s$，则对换后排列的逆序数减少了 1 个．所以相邻对换改变排列的奇偶性．

再证一般情形．设排列

$$p_1, p_2, \cdots, p_m, r, l_1, l_2, \cdots, l_t, s, q_1, q_2, \cdots, q_n \qquad (*)$$

中 r 与 s 的位置对调，成为

$$p_1, p_2, \cdots, p_m, s, l_1, l_2, \cdots, l_t, r, q_1, q_2, \cdots, q_n. \qquad (**)$$

这相当于把 s 向前面作 $t+1$ 次相邻对换，使排列成为

$$p_1, p_2, \cdots, p_m, s, r, l_1, l_2, \cdots, l_t, q_1, q_2, \cdots, q_n;$$

然后再把 r 向后面作 t 次相邻对换，使排列成为

$$p_1, p_2, \cdots, p_m, s, l_1, l_2, \cdots, l_t, r, q_1, q_2, \cdots, q_n.$$

所以，排列（＊＊）是原来排列（＊）作了 $2t+1$ 次相邻对换而得到的．而每次相邻对换都改变了排列的奇偶性，所以作 $2t+1$ 次相

邻对换后排列的奇偶性恰好改变了.

定理 1.1.2 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的一般项可记为

$$(-1)^{N(i_1,i_2,\cdots,i_n)+N(j_1,j_2,\cdots,j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}, \tag{6}$$

其中 i_1, i_2, …, i_n 与 j_1, j_2, …, j_n 都是 1, 2, …, n 的 n 级排列.

证明 由于 i_1, i_2, …, i_n 与 j_1, j_2, …, j_n 都是 1, 2, …, n 的 n 级排列, 所以 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 是 D 中不同行不同列的 n 个元素的乘积, 是 D 中的一项.

如果交换 (6) 中任意两个元素 $a_{i_sj_s}$ 和 $a_{i_tj_t}$ 的位置, 则其行标排列由原来的 i_1, …, i_s, …, i_t, …, i_n 变换为 i_1, …, i_t, …, i_s, …, i_n; 列标排列由 j_1, …, j_s, …, j_t, …, j_n 变换为 j_1, …, j_t, …, j_s, …, j_n. 由定理 1. 1. 1 知, 这两个变换均改变了其逆序数的奇偶性, 即

$$(-1)^{N(i_1,\cdots,i_t,\cdots,i_s,\cdots,i_n)}=-(-1)^{N(i_1,\cdots,i_s,\cdots,i_t,\cdots,i_n)},$$

$$(-1)^{N(j_1,\cdots,j_t,\cdots,j_s,\cdots,j_n)}=-(-1)^{N(j_1,\cdots,j_s,\cdots,j_t,\cdots,j_n)}.$$

所以, 变换后两下标排列逆序数之和奇偶性不变, 即

$$\begin{aligned}&(-1)^{N(i_1,\cdots,i_t,\cdots,i_s,\cdots,i_n)+N(j_1,\cdots,j_t,\cdots,j_s,\cdots,j_n)}\\ &=(-1)^{N(i_1,\cdots,i_s,\cdots,i_t,\cdots,i_n)+N(j_1,\cdots,j_s,\cdots,j_t,\cdots,j_n)}\end{aligned}$$

所以调换 (6) 中元素的位置, (6) 的符号不变. 这样就可把 (6) 中各元素的位置适当交换而不致影响其值. 做适当交换使 (6) 中元素的行标排列是标准顺序, 这时其列标排列假设为 k_1, k_2, …, k_n, 则得到

$$\begin{aligned}&(-1)^{N(i_1,i_2,\cdots,i_n)+N(j_1,j_2,\cdots,j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}\\ &=(-1)^{N(1,2,\cdots,n)+N(k_1,k_2,\cdots,k_n)}a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}\end{aligned}$$

$$= (-1)^{N(k_1,k_2,\cdots,k_n)} a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{nk_n}.$$

这说明行列式的一般项和（6）是一致的，所以行列式的值也可表示为

$$D = \sum_{\substack{(i_1,\cdots,i_n)\\(j_1,\cdots,j_n)}} (-1)^{N(i_1,i_2,\cdots,i_n)+N(j_1,j_2,\cdots,j_n)} a_{i_1j_1} a_{i_2j_2} \cdots a_{i_nj_n}. \tag{7}$$

特别地，当列标排列 j_1，j_2，…，j_n 为标准排列时，我们有

$$D = \sum_{(i_1,\cdots,i_n)} (-1)^{N(i_1,i_2,\cdots,i_n)} a_{i_11} a_{i_22} \cdots a_{i_nn}. \tag{8}$$

用（7）、（8）式定义的行列式的值与（5）式是一致的，或者说是等价的.

§1.2　行列式的性质

用定义计算行列式是很复杂的. 为了有效地计算，需引进行列式的性质. 设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为 D 的转置行列式，并记为 D^{T}.

性质 1.2.1　行列式与它的转置行列式相等.

证明　设行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

其转置行列式记为

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

则 $b_{ij}=a_{ji}$ $(i, j=1, 2, \cdots, n)$. 由行列式定义,

$$\begin{aligned} D^{\mathrm{T}} &= \sum_{(p_1,\cdots,p_n)} (-1)^{N(p_1,p_2,\cdots,p_n)} b_{1p_1} b_{2p_2} \cdots b_{np_n} \\ &= \sum_{(p_1,\cdots,p_n)} (-1)^{N(p_1,p_2,\cdots,p_n)} a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n} = D. \end{aligned}$$

最后一个等号是根据§1之(8)式得到的.

由这性质可知, 对行列式来说, 行与列的地位是同等的, 因此下面对行成立的性质, 对列也成立; 反之亦然.

性质 1.2.2 若将行列式 D 的某一行(列)的元素全乘上数 k, 则所得的新行列式的值为 kD, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明 上式左端

$$\begin{aligned} &= \sum_{(p_1,\cdots,p_n)} (-1)^{N(p_1,p_2,\cdots,p_n)} a_{1p_1} \cdots (ka_{ip_i}) \cdots a_{np_n} \\ &= k\sum_{(p_1,\cdots,p_n)} (-1)^{N(p_1,p_2,\cdots,p_n)} a_{1p_1} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{np_n} \\ &= kD = \text{右端}. \end{aligned}$$