



中小学课程与数学文化研究成果之一

数学的历史文化赏析

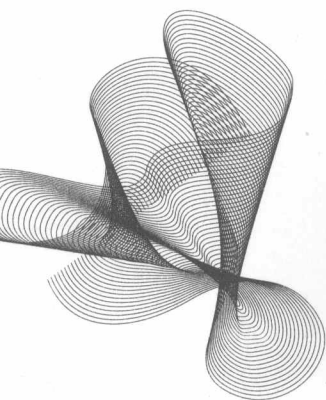
张映姜 陈美英 李晓培 著

湖南师范大学出版社

013970921

011
44

湛江师范学院学术著作出版基金资助项目



中小学课程与数学文化研究成果之一

数学的历史文化赏析

张映姜 陈美英 李晓培 著



011
44



北航

C1680042

湖南师范大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

数学的历史文化赏析 / 张映姜, 陈美英, 李晓培著. —长沙: 湖南师范大学出版社, 2013. 8

ISBN 978 - 7 - 5648 - 1363 - 5

I. ①数… II. ①张… ②陈… ③李… III. ①数学史 IV. ①O11

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 170636 号

数学的历史文化赏析

张映姜 陈美英 李晓培 著

◇组稿编辑: 王艺文 廖小刚

◇责任编辑: 廖小刚 王艺文

◇责任校对: 胡成玲

◇出版发行: 湖南师范大学出版社

地址/长沙市岳麓山 邮编/410081

电话/0731. 88853867 88872751 传真/0731. 88872636

网址/http: //press. hunnu. edu. cn

◇经销: 湖南省新华书店

◇印刷: 长沙市华中印刷厂

◇开本: 787mm × 1092mm 1/16

◇印张: 12. 25

◇字数: 249 千字

◇版次: 2013 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

◇书号: ISBN 978 - 7 - 5648 - 1363 - 5

◇定价: 25. 00 元



序 言

数学的历史文化比数学知识体系本身更具有丰富和深邃的内涵。数学的历史是数学文化发展的见证。数学与社会进步同行；数学与人类文化共生。数学文化的历史，以其独特的思想体系，保留并记录了人类在特定社会的形式和特定历史阶段文化发展的状态。数学文化源远流长；数学文化丰富多彩。

从数到方程、到函数，从几何到微积分、到排列组合，数学的发展历经数千年的沧海桑田，不断的冲突，不断的创新；不断的矛盾，不断的完善。思维的挑战与文化的融合，不断凸显了数学的和谐与文化的魅力。

代数、几何、三角是经典数学文化的三大支柱。

数是数学文化的起点。分数的历史，是数学文化实用性的体现，是中国古代数学辉煌的见证；分数是人类历史上重要的文化成果，是初等数学中内涵丰富的重要概念；分数的内涵和分数的运算规则，体现了人类创新活动的轨迹，分数的历史名题是人类的精神财富；我们不仅要了解分数的概念，而且更要重视分数的历史文化精神。负数也是数学中非常重要同时也是第一个难以理解的概念，人类对历史悠久的负数概念的认识极为曲折坎坷；负数源于现实、来自古老的东方，展现了早期东方数学博大精深文化魅力。无理数是实数集中重要的组成部分；无理数的产生与发展见证了人类数学发展的坎坷历程，体现了数学家对其思考的逐步深化。复数的创立折射出数学创新的规律；数学理论的创建首先是观念上的突破；荒唐的虚数概念的建立是人类数学创造的又一个缩影；虚数起源于代数方程求解，

复数概念的形成源于观念的突破,复数因其几何解释及其广泛应用最终获得确认。

式是构建方程与函数的重要基础。方程不仅在数学领域上起着举足轻重的作用,在我们的日常生活中也有着广泛的应用。数千年方程的历史文化留下来的不仅仅是方程的概念和应用,而更多留下的是数学家对方程的执著追求,以及勇于进取,敢于接受智力挑战,还有处理已知与未知时平等对待、一同满足某一等量关系的态度,以及构建方程解决问题的策略。追溯方程的历史文化,既能领悟人类历史上数学家超常的智慧,又能体验到方程与人们生活的关系,特别是体验到数学家离奇的游戏。既可学习丰富的方程知识,又能经历数学文化发展的过程。对数技术是数学家的创新,正如拉普拉斯所说,一个人的寿命如果不拿他活在世界上的时间的长短来计算,而拿他一生中所做工作多少来衡量,那么可以说,对数的发现不仅避免了冗长的计算与可能性的误差,而且实际上倍延了天文学家的寿命。我们有必要了解对数的文化特性,研究对数的文化历程。数列是中小学数学中一个核心的内容,它的诞生体现出了人类高超的睿智,数列中的历史文化因素推动了数列的不断发展。追寻数列产生的历史,追踪数列发展的轨迹,品味经典数列的名题,必能体验到数列的文化内涵,享受纯厚的数学文化熏陶。函数是微积分学中的重要概念,人们对变量认识的深刻程度影响着函数概念的理解和掌握;函数的本质乃是变量间的对应关系;函数概念为函数性质的研究、微积分的发展都起到了重要的作用;研究函数概念,不仅可以了解人类的社会活动如何促进函数概念的形成,而且还可以发现函数概念是如何形成与发展这一奥秘。

点、线、面、体是几何的重要元素。点的历史悠久;点是构造图形的最小的几何元素;点在几何学中只表明位置但不具备面积和方向。阿基米德曾说:“如果给我一个支点,我可以撑起整个地球”;毕达哥拉斯认为,点是只有位置而没有大小的单位;柏拉图认为,点是直线的开端或点是不可分割的线。毕达哥拉斯学派研究发现了“形数”和“点”的奥秘,形数是使用某种

三角点式来表示,用点排成图形;毕达哥拉斯很会用“点”表示数,如三角形数、正方形数、五边形数;三角形数、正方形数、正五边形数等恰当形象地、具体地、直观地用点阵展现它们的特征.三角形是几何的心脏和奠基石,经历无数春秋的洗礼,经受漫长曲折的历练,沉淀的三角形历史文化极为丰富;从古埃及的金字塔到中国半坡出土文物,从中国的《周髀算经》、《九章算术》到西方欧几里得的《几何原本》,三角形的历史极其悠久,对其认识也极为深刻.

三角是数学中的重要内容,包括三角线、全弦长、正余弦、正余切,还有大量的经典定理.其中三角的弦表经历过漫长的发展历程,由全弦长到半弦长,从弧的半弦再到角的半弦,体现人类思维的巨大飞跃.了解三角的文化、历史,理解三角知识,认识到三角文化发展的继承性、发展性和延续性,意识到三角是人类对宇宙充满好奇与探索的结果;重视三角文化、历史对于了解三角的发展历程具有重要的意义;我们有必要探究三角历史,丰富数学内涵;研究正、余切应用,丰富三角体验;探究三角线形成,理解三角概念;欣赏历史名题,体验三角经典.

概率、统计、微积分是现代数学的经典之作.排列与组合是概率与统计的重要基础;排列与组合是一个古老的数学问题,也是中小学数学中的重要内容,它的思维方式与别的内容迥然不同.生活中最重要的问题,其中绝大多数在实质上只是概率的问题.概率论的诞生,虽然来源于或然游戏,但在今天,概率论却成为人类知识的最重要的组成部分.微积分是数学发展史上的里程碑,是欧氏几何后又一次伟大的创造;微积分的出现,与其说是整个数学史,不如说是整个人类历史的一件大事;数学史家常将数学比作一棵大树,树根是那些最基本的学科如算术、代数、几何、三角、解析几何等,树干的主要部分就是微积分,顶上的树枝是名目繁多的各门数学;微积分堪称是人类智慧最伟大的成就之一.

数学的发展就像精彩的故事一样,波澜起伏,扣人心弦,既在情理之中,又在意料之外,是奇异与和谐的神奇的完美统一.《数学的历史文化赏

析》一书以数学发展的历史为线索,揭示了数学丰富的文化内涵,为我们重新认识数学、欣赏数学提供了一个全新的视觉。该书读后能让人对数学课程内容的历史文化有更深入的理解,尤其可以增强高师院校数学专业学生更生动形象、内涵丰富的数学认知,促进数学教师专业发展,强化与数学相关的职业精神,满足师生对数学文化学习或教学的要求。

全书分五章进行论述,从数与符号、代数、函数、几何与现代数学等方面展示了数学发展的文化轨迹。作者通过大量相关资料,揭示了人类对思维的挑战和对数学文化魅力的体验;让人能体味到数学家的审美眼光;领略数学的理性精神和数学创新的规律;了解数学文化价值;追踪数学产生、发展、繁荣中人类的足迹。读完这本书,我们会有这样的感觉:数学知识尊重历史,内容通俗易懂;既体现了数学的知识性,也体现了数学的趣味性;既能为基础教育中数学教师提供文化素材,又能熏陶学生的文化素养。

书中内容主要针对中小学课程而进行相应的数学历史文化研究,所以该研究成果适合中小学数学教师阅读,有利于促进数学教师的专业成长。书中引用的材料较为通俗,所举案例经典有趣,必为中学生以及关注中小学数学教育的各界人士所喜爱。另外,该书与中小学数学课程内容结合紧密,以及通俗易懂的经典案例,所以此书还是高师院校数学教育专业学生的首选读物。读完全书能迅速丰富高师学生的课程资源,让其体验数学的人文精神,促进良好数学观的形成。我们希望,有更多的专家能够关注中小学数学文化教育的研究,推出更多通俗易懂、生动有趣的数学文化读物,为提高我国基础教育的数学教育水平作出应有的贡献!

全国高师数学教育研究会常务理事

广东高师数学教育研究会副理事长

韶关学院党委书记、教授

曾 峰

2013年7月21

前 言

教育是文化的传承。顾明远先生把教育比做一条“河”，文化则是这条“河”的源头和源源不断注入的“活水”，文化能保持这条“河”永远具有活力。数学文化有助于数学教育这条“河”的激活，能触动我们的灵魂，提升数学创新，培养理性精神。中小学数学中蕴涵的历史文化能提高对数学学习的兴趣，利于数学意义的建构，推动数学教育的发展。不难理解我国《数学课程标准》要求加强数学文化的教学，在数学课程应介绍数学发展的历史、应用和趋势。我们已意识到，中小学数学的历史文化在编制数学课程、体验数学文化、欣赏数学经典、建构数学意义方面对教育的重要作用。

1. 体验数学文化的魅力

简洁的数学知识却蕴含着丰富多彩的历史文化，中西方文化土壤不同，但共同“孕育”了勾股定理，勾股定理被称之为商高定理、或毕达哥拉斯定理、或百牛定理等。几千年来，中西方数学家对勾股定理的研究有着难抑的激情，他们不知疲倦、乐醉其中。几何中，拿破仑三角形、莫莱三角形、黄金三角形、阿基米德三角形等许多精致的三角形，让我们感受到数学文化的瑰宝，让我们津津乐道、回味无穷。这一切为我们带来愉悦的体验和心灵的慰藉。掷骰子、抛硬币等许多数学研究中渗透着许多数学家挚热的情感、不懈的追求，体现数学家对真理的孜孜追求，这一切都深深触动着我们的灵魂。教育是灵魂的教育……只有被灵魂所接受的才能成为精神瑰宝（[德]雅斯贝尔斯）。历史文化的融入展示数学的魅力，弘扬数学精神，促进数学发展。

2. 展示数学经典的奇妙

数学上许多经典名题恰如亮晶晶的宝石,犹如晶莹剔透的明珠,点缀着数学的美丽天空,闪耀着数学家的智慧.概率统计中的棣莫弗的取白、摸球、蒙摩装错信封、生日问题等经典概型让我们终身难忘,回味无穷.法国数学家拉普拉斯曾说:概率论来源于或然性游戏,人类生活中许多现实问题提供了经典概率问题.我们从中可以领略到人类绝妙的思维、精湛的艺术.

3. 文化融入改善数学课程

数学课程的现代化,需要经典历史文化内涵的巧妙还原,达到“数学文化应尽可能有机地结合数学课程的内容”,数学知识是形、历史文化是“神”,只有历史文化巧妙融入知识当中,才能形神兼备.数、点、函数、三角形、多边形、圆锥曲线等中小学数学的核心内容中融入丰富多彩的数学文化,实现数学课程的多元化.数学中的历史文化经典案例,尤其是我国古代数学中不仅蕴涵大量的、极具价值的数学案例,而且还有珍贵的数学名题、底蕴丰厚的数学思想、数学方法等,都是融入课程的重要资源,同时,也能使人类优秀的历史文化通过数学课程得到传承、发扬.

4. 文化融入促进意义的建构

数学历史文化中有许多经典的案例,这些案例能生动地再现数学的建构方式.历史上,数学家把圆等分割为 $2n$ (n 相当大) 个近似小扇形,再拼成宽为 r 长为 πr 的近似矩形.近似矩形的面积即为圆的面积 πr^2 .开普勒把圆面积等分割为无数个近似小三角形的面积和 $\sum \frac{1}{2} \cdot \Delta \cdot r = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot r = \pi r^2$,即得圆的面积公式.历史文化融入数学能提供多种的建构方式,促进对数学的理解和应用.

“任何与初等数学有关的作者都会感谢无数前人的成果”.首先感谢所有被我们所引用文献的作者,他们的成果让我们萌发出点点创意,孕育了书稿的诞生.多年来,我们得到许许多多的鼓励、支持.其次要感谢西北师范大学的王仲春教授,资深的数学教育专家、前辈,本书作者之一的硕士生

导师。几年来,他老人家一直关心我们在数学文化方面的研究进展,并提供许多帮助。然后要感谢我校、院领导对本研究的重视和支持。还要感谢湛江师范学院数学系多届学生,他们对数学教学中所引用的经典案例给予高度关注、极大兴趣为该研究提供推动力,以及为书稿所做的其他文字工作。特别要感谢曾峥教授对我们研究工作的一贯支持,他在百忙中还仔细审阅书稿,抽空作序,我们无论怎样也无法表达出对他的衷心感谢。最后要感谢湖南师范大学出版社廖小刚编辑,由于他的许多具有创意的建议使该书得以提升,书的出版离不开他辛勤的工作。

全书由张映姜副教授拟定、统筹。由张映姜副教授、陈美英副教授、李晓培教授共同编写。陈美英副教授撰写第二章第一节、第三章第二节,并校对书稿、文字修饰。李晓培教授撰写第五章概率名题、微分积分两节。其余各章节由张映姜副教授完成。书稿的最后定稿由张映姜副教授完成。几年来,我们致力于中小学数学的历史文化研究,但由于数学的历史悠久、文化浑厚,经典名题众多,资料浩如烟海,囿于能力,我们对历史文化的认识还是一鳞半爪,难以充分展现出数学的文化魅力、历史的经典,但能有抛砖引玉之用。期待诸位不吝指教,共同探讨,展示数学的魅力,在数学历史文化的体验中促进数学的传播和发展。

作者于广东湛江
(QQ:1819536938)

目 录

第一章 数的文化:文化的创新	(1)
第一节 分数的历史:实用的文化	(1)
第二节 负数的认可:文化的共识	(9)
第三节 无理数概念:文化的困惑	(17)
第四节 复数的历史:创新的文化	(24)
第二章 神奇的代数:思维的挑战	(31)
第一节 方程的历史:符号的游戏	(31)
第二节 对数的技术:数学的创新	(43)
第三节 数列的文化:悠久的历史	(49)
第四节 概念的演变:函数的进化	(58)
第三章 数、形互补:文化的融合	(65)
第一节 点的文化:历史纪念碑	(65)
第二节 经典三角:两千年文化	(70)
第三节 等周原理:文化的传承	(79)
第四节 圆锥曲线:思维的结果	(84)

第四章 多彩的几何:灿烂的文化 (89)

第一节 三角形历史:丰富的文化 (89)

第二节 经典多边形:沉淀的文化 (101)

第三节 圆形的历史:丰厚的文化 (116)

第四节 尺规之作图:思维的挑战 (125)

第五章 数学的发展:文化的传承 (132)

第一节 排列组合:游戏的文化 (132)

第二节 概率名题:经典的数学 (143)

第三节 微分积分:文化的成就 (154)

第四节 精巧符号:数学之巧妙 (162)

第五节 数学之美:文化的魅力 (171)

参考文献 (176)

第一章 数的文化:文化的创新

第一节 分数的历史:实用的文化

7世纪,欧洲有数学家能计算一道8个分数相加的习题,竟被认为干了件很了不起的大事。当时,若某人陷入绝境了,常用“掉进分数里去了”这一古老的谚语来形容。^①

无论过去、现在还是将来,数与形,是人类思维的重要模型,也是人类进行研究的重要对象。分数,数学中极其重要的内容,它见证了人类的历史发展,曾展现了东西方在数认识上的文化差异。分数,体现东方计数的工具、方法的先进,以及对世界数学发展的重大贡献;同时,也承载着西方对分数认识曾经的艰难。分数是数学中内涵丰富的核心概念,是人类重要的文化成果。单分数、连分数、繁分数,分数的奇妙表示、分数的算法等,展现了历史上人类文化的创新,尤其是展现了中国数学曾经的辉煌,卓越的算法遥遥领先于世界;并标志人类思维活动的相关轨迹。分数的历史名题是人类的精神财富,不仅有助于认识分数,而且丰富多彩的数学历史文化,甚至人类高超的数的意识以及数的能力,也揭示了人类与数的紧密联系。分数的历史文化中数的意识、数的观念、分数的思维方式是人类特有的、其他

^① 谢宇. 数学——智慧的源泉[M]. 南昌:百花洲文艺出版社,2010:29-32.

任何的东西都不可能代替.的确,“物质或许可以代替,而精神则无法替代”.

1 人类的遗产展现分数的历史悠久

分数源于实践,来自生活.自从人类有了度量、面临均分的问题后,逐渐产生了除法运算,孕育分数的诞生.东方分数概念的萌芽离不开“均分”的观念.原始社会中,人们集体狩猎、分配猎物,有了分的含义,逐渐产生等分观念,并由此产生分数概念.古希腊“万物皆数”只是产生“整数比”,但分数观念以及分数运算并没有获得与几何同步的发展,古希腊分数体现较多的是数学的理性经验.分数是人类社会生产、生活的产物,是人类特有的社会文化现象.古代中国、古巴比伦、古埃及、古印度等先后产生的分数概念往往源于人类有关均分的实践经验.分数的历史表明,知识源于人类的实践活动,分数是人类思维活动的产物.

在许多民族最古老的文献里,都能找到有关分数的记载.中国古代,由于测量和均分的实践活动,获得并使用分数.史料表明,中国最早使用分数,比其他民族早上千多年时间.在中国,分数的观念历史悠久,分数运用极为普遍,分数的文化内涵极其丰富!春秋时期的《左传》记载:诸侯的城池,最大不能超过周国的 $\frac{1}{3}$,中等的不得超过 $\frac{1}{5}$,小的不得超过 $\frac{1}{9}$.《史记·项羽本纪》中有“汉有天下太半”、“吴韦昭曰:凡数三分有二为太半,有一为少半”.《淮南子》卷六中有“斩艾百姓,殫尽太半”.《后汉书·食货志》(卷二十四)上记载“收泰半之赋”,“师古曰:泰半三分取二”.^①“泰半”即“太半”,则“太半”、“少半”分别表示 $\frac{2}{3}$ 、 $\frac{1}{3}$.

实际问题孕育古埃及分数的产生.3000多年前埃及的纸草书中,记载了10个人分9片面包:每片面包各切下 $\frac{1}{10}$,9人中每个分得 $\frac{9}{10}$ 片面包, $\frac{1}{10}$

^① 王永建.数学的起源与发展[M].南京:江苏人民出版社,1981:14-15.

片面包共 9 块,给某个人,也得 $\frac{9}{10}$ 片面包.

纸草书中还记载另一个分数问题:一个数量,它的 $\frac{2}{3}$,它的 $\frac{1}{2}$,它的 $\frac{1}{7}$,它的全部,加起来总共是 33. 古埃及的分数观念可能是非常普遍的概念,在生活中使用分数可能也是很平常的事.

阿拉伯地区的分数观念也容易获得展示. 历史上,曾记载了如今家喻户晓的阿拉伯分马遗嘱:11 匹马由三个儿子继承. 大儿子、二儿子、小儿子分别继承遗产的 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{6}$. 正为分马犯愁时,邻居牵来了自己的一匹马,对他们说:现在 12 匹,老大得 $\frac{1}{2}$ 即 6 匹,老二得 $\frac{1}{4}$ 即 3 匹,老三得 $\frac{1}{6}$ 即 2 匹,还剩下 1 匹,我牵回家.^①这些史料均表明,世界各地,许多民族早已存在分数观念,分数运算也是极其普遍的现象.

古希腊的著名数学家丢番图,被誉为代数学的鼻祖. 他的生平事迹没有记载下来,但分数观念明白无误、准确生动地得到展示. 叙述他一生的墓志铭披露出分数的重要信息:“丢番图的一生,幼年占 $\frac{1}{6}$,青少年占 $\frac{1}{12}$,又过了 $\frac{1}{7}$ 才结婚,5 年之后生子,子先父 4 年而卒,寿为其父之半.”这也说明,希腊也有分数观念,并在生活中有所运用.

2 各种奇特的表示展示分数的精彩

古代分数的表示十分有趣,展示分数的巧妙表示是一件非常有意思的事. 但我们无法追溯分数的形成过程,只可能寻找到分数形成的东鳞西爪,很难得到分数概念较确切、较完整的形成线索. 史料记载,大约三千多年前,古代埃及有了分数的表示,文献记载有用像嘴巴形状的图形表示分数. 大约两千多年前,中国人已用算筹表示分数,若上面摆 1 根小棒,下面摆 4

^① 谢宇. 数学——智慧的源泉[M]. 北京:百花洲文艺出版社,2010:29-32.

根小棒,这就表示四分之一.到了8世纪,古印度、阿拉伯人发明了十个数字,尤其是人类采用十进位制后大大简化了分数的表示.他们表示四分之一时,与中国古代时类似,只要上一行写1,下一行对齐写4.1175年,阿拉伯数学家阿尔·哈萨用一根横线将分子和分母隔开,出现了现代意义上的分数 $\frac{1}{4}$.这根横线被誉为连接母子的“美丽彩带”.^①

到了13世纪初,意大利数学家斐波那契把阿拉伯人的分数表示方法传入意大利,也用分子、分母、分数线的现代方法表示分数.这样,欧洲使用分数的时代逐渐到来.但要改变欧洲人“害怕分数”的时代,是相当困难的,不是那么容易,要走出“纷繁的运算和忧虑的困境”还需时日.但毕竟已经开始实行了,因为计数的方式得到改变.为了排版、印刷,英国数学家德·摩根,创造性地提出使用斜线,即使用斜分数线的方式 a/b 来表示 $\frac{a}{b}$.经过长时间的磨砺,终于谱写出一段分数产生、发展的摇篮曲.也正是人类的智慧,才有了分数简洁的表示.

3 东方的分数算法,遥遥领先

中国古代的算筹,展示东方的先进算法.使得中国很早有引领类似如今分数运算的算法,这种精致的算法极大地促进了数学的发展,同时数学的实用性推进数学进步,展现人类高超的智慧和奇妙的想象力.中国古代一系列科学的、完整的分数算法在《九章算术》中闪耀着,如合分术、减分术、乘分术、经分术、课分术、平分术等众多算法.

例如,合分术:母互乘子,并以为实,母相乘为法,实如法而一.其中除数称为“法”,被除数称为“实”,被除数为除数所除称为“实如法而一”.用现在的数学符号来表达是:

$$\frac{b}{a} + \frac{d}{c} = \frac{bc}{ac} + \frac{ad}{ac} = \frac{bc+ad}{ac}.$$

^① 徐品方,张红.数学符号史[M].北京:科学出版社,2006:140.

减分术:母互乘子,以少减多,余为实,母相乘为法,实如法而一.其中“以少减多”与我们现在的理解相反,他的意思是用较大的数减去较小的数.用现在的数学符号来表达是:

$$\frac{b}{a} - \frac{d}{c} = \frac{bc}{ac} - \frac{ad}{ac} = \frac{bc-ad}{ac}.$$

乘分术:母相乘为法,子相乘为实,实如法而一.用现在的数学符号来表达是:

$$\frac{b}{a} \times \frac{d}{c} = \frac{bd}{ac}.$$

经分术:法分母乘实(为实),实分母乘法(为法,实为法而一).其中“法分母乘实”的意思是用除式的分母乘以被除式的分子,“实分母乘法”的意思是被除式的分母乘以除式的分子,把前者所得的结果作为分子,后者的结果作为分母,再相除即得.用现在的数学符号来表达是:

$$\frac{b}{a} \div \frac{d}{c} = \frac{b}{a} \times \frac{c}{d} = \frac{bc}{ad}.$$

分数的约分和通分在《九章算术》“方田”章中也有生动的记录.分数的约分和通分能方便分数运算.《九章算术》中所记载的“可半者半之”.《张邱建算经》的序中说:“耦者半之”,前面两句话的意思是说,观察分数,如果分子、分母都是偶数,就各取其半.如《夏侯阳算经》卷(上)中说:“五者倍而折之.”意思是说:如果分子、分母的末位数字都是5,那么就可以对分子、分母分别用2乘以5后再用10除.如:

$$\frac{35}{55} = \frac{35 \times 2}{55 \times 2} = \frac{70}{110} = \frac{7}{11}.$$

《九章算术》中的约分程序是:“不可半者,副置分母、子之数,以少减多,更相减损,求其等也,以等数约之.”意思是说:如果不是偶数,那么用辗转相减的方法,从较大的数减去较小的数,最后得到一个余数和减数相等,这就是所求的最大公约数,再互相约掉.

巴比伦人做整数除以整数的运算,由于除以一个整数就相当于乘以这个数的倒数,这就牵扯到分数.