经济管理类数学基础

概率论与数理统计

学习辅导

李冬红　谢　安　主编

3

清华大学出版社

经济管理类数学基础

概率论与数理统计

学习辅导

李冬红 谢 安 主编

清华大学出版社

北京

内容简介

本书是谢安、李冬红主编的经济管理类数学基础系列教材《概率论与数理统计》的配套辅导书.

为帮助读者系统地学习和掌握概率论与数理统计的主要内容和基本方法，本书针对教材中每章内容，均编配五部分内容，即基本要求、内容提要、例题选讲、习题解答和自测题. 在教材例题的基础上，有针对性地精选了大量的典型例题和习题，帮助读者系统地掌握基本概念、基本解题方法与思路.

本书不仅是教材的配套辅导书，也可便于高等学校本科在校学生或夜大、函授学员独立选作参考辅导书，同时也可作为相关任课教师的辅助工具书.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计学习辅导/李冬红，谢安主编. —北京：清华大学出版社，2013

(经济管理类数学基础)

ISBN 978-7-302-33333-3

Ⅰ. ①概…　Ⅱ. ①李…　②谢…　Ⅲ. ①概率论—高等学校—教学参考资料　②数理统计—高等学校—教学参考资料　Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 173631 号

责任编辑：陈　明
封面设计：傅瑞学
责任校对：王淑云
责任印制：沈　露

出版发行：清华大学出版社
　　网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　　地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编：**100084
　　社 总 机：010-62770175　　**邮　　购：**010-62786544
　　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　　质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市金元印装有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×230mm　　**印　　张：**12　　**字　　数：**262 千字
版　　次：2013 年 9 月第 1 版　　**印　　次：**2013 年 9 月第 1 次印刷
印　　数：1～3000
定　　价：20.00 元

产品编号：052113-01

序

随着我国经济与管理学科的迅速发展，数学作为经济与管理学科的重要基础课受到越来越广泛的关注和重视. 数学课的教学目的在于培养学生的抽象思维能力、逻辑思维能力、科学的定量分析能力等基本数学素质，特别是培养学生在研究经济理论和经济管理的实践中综合运用数学思想方法去分析问题和解决问题的能力. 数学课的教学质量，直接影响后续专业课的教学和相关专业学生的培养质量.

经济管理类数学基础系列课程主要有微积分、线性代数、概率论与数理统计三门课程. 长期以来，中央财经大学应用数学学院一直非常重视这些基础课程的建设与改革. 学院曾于1998年组织骨干教师编写出版了这三门课程的教材. 该教材被评为中央财经大学重点系列教材，自出版发行以来，深受广大教师及学生的好评，还在一定程度上满足了兄弟院校教学的需要.

近年来，随着我校教育教学改革的不断深入，我们进一步对数学课的教学内容、教学手段等方面进行了一系列改革，力求使之更加适应新形势下财经应用型创新人才培养的要求. 依据新的培养目标和培养方案，参考2009年教育部最新颁布的研究生入学数学考试大纲，我们重新修订了这三门课的教学大纲，组织教学小组积极探索提高公共数学课教学质量的途径、方法和有效手段. 经过几年的努力，我们在课程建设方面取得了一定的成绩. 目前，三门经济管理类数学课程均已成为校级精品课，其中微积分于2008年被评为北京市精品课程.

2010年5月，教育部为贯彻落实《国家中长期教育改革和发展规划纲要(2010—2020年)》，扎实有序地推进教育改革，决定在全国范围分区域、有步骤地开展改革试点工作. 中央财经大学的“财经应用型创新人才培养模式改革”成为首批国家教育体制改革试点项目. 基于此，我们在课程建设中进一步突出了学生创新意识和创新能力的培养，成立教学改革课题组，开展“数学课程与教材一体化建设的研究”.

在上述工作的基础上，我们编写了这套“经济管理类数学基础”系列教材，包括《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》，以及配套的习题课教材和电子教案. 教材内容涵盖了教育部非数学类专业数学基础课程教学指导分委员会最新制定的“经济管理类本科数学基础教学基本要求”，并且满足经济类、管理类各专业对数学越来越高的要求. 在我们原有教材的基础上，该系列教材凝聚了作者近年来在大学数学教学改革方面的一些新成果，借鉴了近几年国内外一批优秀教材的有益经验. 教材在内容上注重基本概念、基本理论和基本技

能的讲解，突出理论联系实际，努力体现实用性. 根据经济管理类专业学生的实际情况，尽量以直观的、通俗的方法重点阐述数学方法的思想、应用背景及其在金融、保险、统计等领域应用中应该注意的问题. 选择与当今社会经济生活和现代科技密切相关的实例，避免那种远离实际而只讲数学的抽象定义、定理、证明的模式，尽量突出数学建模的思想和方法. 通过加强对经济学、管理学具体问题的数学表述和数学理论问题的经济学含义解释，使得数学的能力培养功能与应用功能有机结合，培养学生在经济学中的数学思维方式和数学应用能力，实现经济、管理类数学基础教育的"培养素质、提高能力特别是专业素质"的目标. 我们希望系列教材与精品课程互为依托，进一步促进课程与专业建设水平全面提高.

在本系列教材的编写和出版过程中，得到中央财经大学教务处、应用数学学院以及清华大学出版社的大力支持，在此一并致谢.

尽管作者都有良好的愿望和多年的教学经验，但由于受经验和水平的限制，加之时间仓促，书中难免存在作者未发现的错漏，恳请使用本书的读者不吝指正，以便进一步完善.

编　者

2012 年 5 月

前言

本书是谢安、李冬红主编的经济管理类数学基础系列教材《概率论与数理统计》的配套辅导书.

全书以教材内容为主线,围绕教材中基本概念、理论和方法,精心组织典型例题.本书每一章编配的内容有以下特点:

一、基本要求——明确了学生对本章知识的掌握范围和程度,同时也为任课教师提供了授课重点.

二、内容提要——该部分提炼了教材中重要的知识点,并进行了归纳总结,便于学生对教材中的主要内容进行梳理.

三、例题选讲——按知识点归纳重要题型,总结相应的解题方法与技巧.帮助学生开阔解题思路,使所学知识融会贯通,并能综合、灵活地解决问题.该部分内容对教材进行了适度拓展,是教材的有益补充.

四、习题解答——对教材中全部习题给出了详细解答步骤,帮助学生解决在学习课程时遇到的困难,便于学生自学,同时为独立使用该书的学生提供了丰富的习题集.

五、自测题——根据本章重点、难点精选了适量的、典型的题目,并附有参考答案,对学生学习效果进行检验与评估.

为帮助读者系统掌握解题方法与思路,本书概率论部分即第 1～5 章中每章例题选讲中均按内容划分为若干题型,并配以典型例题.

本书由李冬红副教授组织编写(主编并编写第 2、3、4、8 章),参加编写的还有谢安教授(主编并编写第 1、5、9 章)、雷孟京副教授(编写第 6、7 章).

书中疏漏之处,敬请读者和同行不吝指正.

编　者

2013 年 3 月

目录

第 1 章

随机事件与概率

基本要求

1. 了解样本空间的概念，理解随机事件的概念，掌握事件的关系及运算.

2. 理解概率、条件概率的概念，掌握概率的基本性质，会计算古典型概率和几何型概率，掌握概率的加法公式、乘法公式、减法公式、全概率公式以及贝叶斯(Bayes)公式.

3. 理解事件独立性的概念，掌握用事件独立性进行概率计算；理解独立重复试验的概念，掌握计算有关事件概率的方法.

内容提要

一、随机试验与随机事件

1. 随机试验

概率论中将满足下列三个特点：

(1) 试验可以在相同的条件下重复进行；

(2) 试验的所有可能结果在试验之前是明确可知的，并且不止一个；

(3) 每次试验之前不能确定这次试验会出现哪一个结果

的试验称为随机试验，简称为试验，常用字母 E 表示.

2. 样本空间

随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间，记为 Ω. 样本空间 Ω 中的元素，即 E 的每个可能结果称为样本点，用 ω 表示.

3. 随机事件

样本空间 Ω 的子集称为随机事件，简称为事件. 常用字母 $A,B,C,\cdots$表示. 在试验中，称某个事件 A 发生，当且仅当该子集中的某一个样本点在试验中出现.

由一个样本点组成的单点集称为基本事件. 由若干个基本事件所组成的事件称为复合事件.

在随机试验中一定会发生的事件称为必然事件,记为Ω. 在随机试验中一定不会发生的事件称为不可能事件,记为$\varnothing$.

二、事件的关系及运算

1. 事件的包含

若事件A发生必然导致事件B发生,则称事件B包含事件A,或称事件A含于事件B,记为$B\supset A$或$A\subset B$.

2. 事件的相等

若$A\subset B$且$B\subset A$,则称事件A与B相等,记为$A=B$.

3. 事件的并

"事件A与B中至少有一个发生"这一事件,称为事件A与B的并(或和),记为$A\cup B$或$A+B$.

类似地,"事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$中至少有一个发生"这一事件,称为事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$的并(或和),记为$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$(或$\sum\limits_{i=1}^{n}A_i$).

"事件$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$中至少有一个发生"这一事件,称为事件$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$的并(或和),记为$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$(或$\sum\limits_{i=1}^{\infty}A_i$).

4. 事件的交

"事件A与B同时发生"这一事件,称为事件A与B的交(或积),记为$A\cap B$(或AB).

类似地,"事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$同时发生"这一事件,称为事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$的交(或积),记为$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$(或$\prod\limits_{i=1}^{n}A_i$).

"事件$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$同时发生"这一事件,称为事件$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$的交(或积),记为$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$(或$\prod\limits_{i=1}^{\infty}A_i$).

5. 事件的差

"事件A发生而事件B不发生"这一事件,称为事件A与B的差,记为$A-B$.

6. 互不相容事件

若事件A与B不能同时发生,即$AB=\varnothing$,则称事件A与B互不相容(或A与B互斥).

若事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$(或$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$)中任意两个事件都互不相容,即$A_iA_j=\varnothing$

$(i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n$ 或 $i,j=1,2,\cdots,n,\cdots)$，则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$（或 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$）两两互不相容.

7. 对立事件

"事件 A 不发生"（或事件"非 A"）称为 A 的对立事件，也称为 A 的逆事件，记为 $\overline{A}$.

三、事件运算的性质

1. 基本性质

(1) $\varnothing\subset A\subset\Omega$；

(2) $\overline{\overline{A}}=A$；

(3) $A\overline{A}=\varnothing,A\cup\overline{A}=\Omega$；

(4) $A-B=A\overline{B}=A-AB$.

2. 运算律

(1) 交换律　$A\cup B=B\cup A;AB=BA$.

(2) 结合律　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C;A(BC)=(AB)C$.

(3) 分配律　$A(B\cup C)=(AB)\cup(AC);A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C)$.

(4) 对偶律（德摩根律）　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$；$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

对于有限个事件有

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i},\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$$

四、随机事件的概率及其性质

1. 概率的统计定义

在相同条件下，重复进行 n 次试验，在这 n 次试验中，事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的频数，比值 $f_n(A)=\dfrac{n_A}{n}$ 称为事件 A 发生的频率. 当试验次数 n 增大时，事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 在某个常数值 p 附近摆动，而且一般来说，n 越大，摆动的幅度越小，则称频率的稳定值 p 为事件 A 发生的概率，记作 $P(A)$，即 $P(A)=p$.

2. 概率的古典定义

(1) 古典概型的假设条件

① 试验的样本空间只有有限个样本点，不妨设为 n 个，记为 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$.

② 试验中每个基本事件出现的可能性相等，即

$$P(\omega_1)=P(\omega_2)=\cdots=P(\omega_n)$$

(2) 概率的古典定义

在古典概型中，设试验 E 的样本空间为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$，事件 A 由其中 k 个基本事件所组成，即 $A=\{\omega_{i_1},\omega_{i_2},\cdots,\omega_{i_k}\}$，则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 中包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}} \tag{1.1}$$

称由上式所定义的概率为古典概率.

3. 概率的几何定义

(1) 几何概型的假设条件

① 试验的所有可能结果有无穷多个，而且试验的全部结果可以用一个能度量的几何区域(该区域可以是有限线段、平面区域及空间区域等)来表示.

② 试验的每个可能结果出现的可能性相等（等可能性）.

(2) 概率的几何定义

在几何概型中，设随机试验 E 的样本空间可以表示成能度量的几何区域仍记为 Ω，随机事件 A 所对应的几何区域仍记为 $A(A\subset\Omega)$，则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 的度量}}{\Omega\text{ 的度量}} \tag{1.2}$$

称由上式所定义的概率为几何概率.

4. 概率的公理化定义

设随机试验 E 的样本空间为 Ω，对于 E 的任一事件 A 赋予一个实数 $P(A)$，若 $P(A)$ 满足下列三条公理：

公理 1（非负性） 对任一事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$；

公理 2（规范性） $P(\Omega)=1$；

公理 3（可列可加性） 对于两两互不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$，有

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\Big)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i) \tag{1.3}$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

5. 概率的基本性质

(1) 不可能事件的概率等于零，即 $P(\varnothing)=0$.

(2) 有限可加性　若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的事件，则有

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\Big)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

特别地，当事件 A 与 B 互不相容时，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B). \tag{1.4}$$

(3) 对立事件的概率　对任一事件 A，有

$$P(\overline{A})=1-P(A) \tag{1.5}$$

(4) 加法公式　对任意两个事件 A,B,有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB) \tag{1.6}$$

一般地,对于任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n) \tag{1.7}$$

(5) 减法公式　对任意两个事件 A,B,有

$$P(B-A)=P(B)-P(AB) \tag{1.8}$$

特别地,当 $A\subset B$ 时,有

$$P(B-A)=P(B)-P(A) \tag{1.9}$$

从而 $P(B)\geqslant P(A)$.

五、条件概率与乘法公式

1. 条件概率

设 A,B 是两个事件,且 $P(A)>0$,则称

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)} \tag{1.10}$$

为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率.

条件概率满足概率的三条公理,即

(1) 对任一事件 B,有 $P(B|A)\geqslant 0$;

(2) $P(\Omega|A)=1$;

(3) 设 $B_1,B_2,\cdots,B_n,\cdots$是两两互不相容的事件,则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\mid A\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(B_i\mid A)$$

2. 乘法公式

对任意两个事件 A,B,若 $P(A)>0$,则有

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A) \tag{1.11}$$

若 $P(B)>0$,则有

$$P(AB)=P(B)P(A\mid B) \tag{1.12}$$

一般地,对于 $n(n\geqslant 2)$个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,若 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$,则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1}) \tag{1.13}$$

六、全概率公式与贝叶斯公式

完备事件组　若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容,并且 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\Omega$,则称这 n 个事件

$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为一个完备事件组.

1. 全概率公式

设事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为一个完备事件组，且 $P(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，则对任一事件 B，有

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i) \tag{1.14}$$

2. 贝叶斯公式

设事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为一个完备事件组，而且 $P(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，则对任一事件 B，$P(B)>0$，有

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)}, \quad i=1,2,\cdots,n \tag{1.15}$$

七、事件的独立性与伯努利(Bernoulli)概型

1. 事件的独立性

(1) 对于两个事件 A 与 B，若

$$P(AB) = P(A)P(B) \tag{1.16}$$

成立，则称事件 A 与 B 是相互独立的.

(2) 对三个事件 A,B,C，若

$$\begin{cases} P(AB) = P(A)P(B) \\ P(BC) = P(B)P(C) \\ P(AC) = P(A)P(C) \\ P(ABC) = P(A)P(B)P(C) \end{cases} \tag{1.17}$$

四个等式同时成立，则称事件 A,B,C 相互独立

(3) 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 n 个事件，若对于任意正整数 $m(2\leqslant m\leqslant n)$ 和任意的 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_m\leqslant n$，有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_m}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_m}) \tag{1.18}$$

成立，则称事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立.

(4) 对于 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，如果其中任意两个事件都相互独立，即

$$P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j), \quad i \neq j; i,j = 1,2,\cdots,n$$

则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两独立.

2. 事件独立的性质

(1) 若事件 A 与 B 相互独立，则 A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也是相互独立的.

(2) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，则它们中的任意 $m(2\leqslant m\leqslant n)$ 个事件也一定是相互独

立的.

特别地,如果 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立,则 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两独立.

(3) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立,则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=\prod_{i=1}^{n}P(A_i),$$

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=1-P(\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A}_i)=1-\prod_{i=1}^{n}P(\overline{A}_i)$$

3. 伯努利概型

(1) 独立重复试验

① 每次试验条件都相同;

② 每次试验结果与其他各次试验结果相互独立(互不影响),即各次试验相互独立.

(2) 伯努利概型

① 只考虑两种可能结果的试验称为伯努利试验;

② 伯努利概型　设试验 E 只有两种可能结果:A 及 $\overline{A}$,并且 $P(A)=p,P(\overline{A})=1-p=q$ $(0<p<1)$. 将试验 E 独立地重复进行 n 次,作为一个试验,称它为 n 重伯努利试验,它所对应的数学模型称为 n 重伯努利概型,简称为伯努利概型.

设事件 A 在每次试验中发生的概率均为 $p(0<p<1)$,则在 n 重伯努利试验中,事件 A 恰好发生 k 次的概率为

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k},\quad k=0,1,2,\cdots,n \tag{1.19}$$

其中 $q=1-p$.

例题选讲

一、事件的关系及运算

主要题型有:描述随机试验的样本空间;用数学符号表示事件的关系与运算;利用事件的运算律化简或证明事件算式等.

例 1　某个工人生产了 4 个零件,设 A_i 表示他生产的第 i 个零件是正品$(i=1,2,3,4)$,用 A_i 表示下列各事件:

(1) 没有一个是次品;

(2) 至少有一个是次品;

(3) 只有一个是次品;

(4) 至少有三个不是次品;

(5) 恰好有三个是次品.

解　(1) $A_1A_2A_3A_4$;

(2) $\overline{A_1A_2A_3A_4}$；

(3) $\overline{A}_1A_2A_3A_4\cup A_1\overline{A}_2A_3A_4\cup A_1A_2\overline{A}_3A_4\cup A_1A_2A_3\overline{A}_4$；

(4) $A_1A_2A_3\overline{A}_4\cup A_1A_2\overline{A}_3A_4\cup A_1\overline{A}_2A_3A_4\cup\overline{A}_1A_2A_3A_4\cup A_1A_2A_3A_4$；

(5) $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\overline{A}_4\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4\cup A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4$.

例 2 设 A,B 是任意两个事件，化简下列各式：

(1) $(A\cup B)(A\cup\overline{B})(\overline{A}\cup B)$；

(2) $(A\cup B)(A\cup\overline{B})(\overline{A}\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})$.

解 (1) 由事件运算的分配律可得

$$(A\cup B)(A\cup\overline{B})=(A\cup B)A\cup(A\cup B)\overline{B}=A\cup BA\cup A\overline{B}\cup B\overline{B}$$
$$=A\cup A\overline{B}=A$$

于是

$$(A\cup B)(A\cup\overline{B})(\overline{A}\cup B)=A(\overline{A}\cup B)=A\overline{A}\cup AB=AB$$

(2) 利用(1)的结果可得

$$(A\cup B)(A\cup\overline{B})(\overline{A}\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})=AB(\overline{A}\cup\overline{B})=AB\overline{A}\cup AB\overline{B}$$
$$=\varnothing\cup\varnothing=\varnothing$$

二、随机事件的概率与性质

1. 运用概率的基本性质进行计算与证明

例 3 设 A,B 为任意两个事件，且已知 $P(A)=0.5,P(B)=0.6,P(B|\overline{A})=0.4$，求：

(1) $P(A\cup B)$；(2) $P(\overline{A}\overline{B})$；(3) $P(A-B)$；(4) $P(A\cup\overline{B})$；(5) $P(A|\overline{B})$.

解 (1) 由于 $P(B-AB)=P(B)-P(AB)$，而

$$P(B-AB)=P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B\mid\overline{A})=0.5\times0.4=0.2$$

于是

$$P(AB)=P(B)-P(B-AB)=0.6-0.2=0.4$$

故有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.5+0.6-0.4=0.7$$

(2) $P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0.7=0.3$；

(3) $P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.5-0.4=0.1$；

(4) 由于 $P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=0.5-0.4=0.1$，于是

$$P(A\cup\overline{B})=P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})=0.5+0.4-0.1=0.8$$

(5) $P(A|\overline{B})=\dfrac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\dfrac{P(A)-P(AB)}{P(\overline{B})}=\dfrac{0.1}{0.4}=0.25$.

例 4 设 A,B 为任意两个事件，证明：

(1) $P(AB)=1-P(\overline{A})-P(\overline{B})+P(\overline{A}\overline{B})$；

(2) $1-P(\overline{A})-P(\overline{B})\leqslant P(AB)\leqslant P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B)$.

证明 (1) $P(AB)=P(\overline{\overline{A}\cup\overline{B}})=1-P(\overline{A}\cup\overline{B})=1-P(\overline{A})-P(\overline{B})+P(\overline{A}\overline{B})$；

(2) 由 $P(\overline{A}\overline{B})\geqslant 0$ 及(1)可知

$$1-P(\overline{A})-P(\overline{B})\leqslant P(AB)$$

又因为 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，而 $P(AB)\geqslant 0$，则有

$$P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B)$$

由于 $AB\subset A\subset A\cup B$，则有

$$P(AB)\leqslant P(A\cup B)$$

于是

$$1-P(\overline{A})-P(\overline{B})\leqslant P(AB)\leqslant P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B)$$

2. 古典概率的计算

由于古典概型的问题五花八门，解题方法十分灵活，因此这里仅介绍一些具有代表性的问题，如取球问题、排序问题、分配问题等.

例 5 一袋中装有 $n-1$ 只黑球及 1 只白球. 每次从中任取一球，并换入一只黑球，如此继续下去，求第 k 次取出黑球的概率.

分析 此题如果直接求解会很麻烦，而利用对立事件概率公式容易求解.

解 设事件 $A=\{$第 k 次取到黑球$\}$，则 $\overline{A}=\{$第 k 次取到白球$\}$.

由于袋中只有 1 只白球，而每次取出一球后总是换入 1 只黑球，所以当第 k 次取出白球时，前 $k-1$ 次取出的一定都是黑球，故有

$$P(\overline{A})=\frac{(n-1)^{k-1}\cdot 1}{n^k}=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{n}$$

于是，所求概率为

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{n}$$

例 6 将 10 本书随意放在一层书架上，其中一套书有 3 本，另一套书有 4 本，其余 3 本不成套，求下列各事件的概率：

(1) 3 本一套的书恰好放在一起；

(2) 两套书各自放在一起；

(3) 两套书至少有一套放在一起.

解 这是一个分类排序问题. 设事件 $A=\{$3 本一套的书放在一起$\}$，$B=\{$4 本一套的书放在一起$\}$，$C=\{$两套书各自放在一起$\}$. 将 10 本书随意放在一层书架上共有 10!种排法，即基本事件总数为 10!.

(1) 3 本一套的书恰好放在一起，相当于首先把这 3 本书看成一个整体进行排序，有 8!种排法；其次还需确定这套书内部的排序，3 本书共有 3!种排法，由乘法原理知，A 中包含的基本事件数为 $8!\times 3!$，于是

$$P(A)=\frac{8!\times 3!}{10!}=\frac{1}{15}\approx 0.0667$$