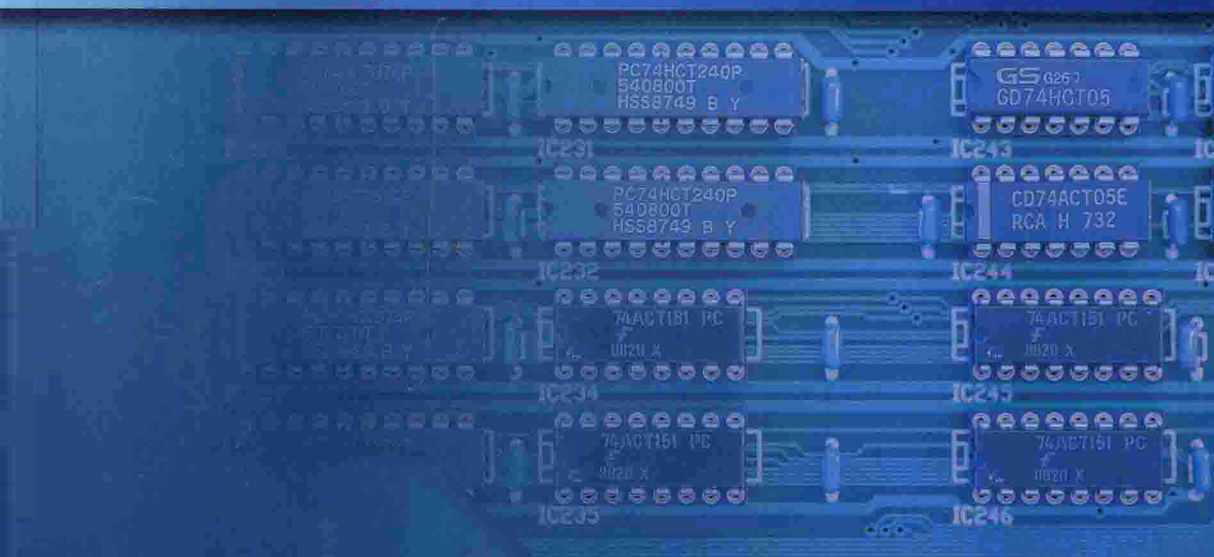


高等学校教材

电路分析 与电子线路基础

下册

■ 陈抗生



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

电路分析与电子线路基础

Dianlu Fenxi yu Dianzi Xianlu Jichu

下册

■ 陈抗生



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容简介

本书将传统的“电路原理”课程、“模拟电子技术基础”课程以及“数字电子技术基础”课程的电路级内容有机整合在一起,内容选择上把最新的集成电路设计知识融入到电路基础课程中,反映了电路技术发展的方向。

本书将模拟集成电路的基本单元电路、反馈放大器电路、差分放大器电路、互连线、运算放大器、电流差分缓冲放大器、电流差分跨导放大器、滤波器、振荡器、正弦交流电路、三相电路、开关电容电路、CMOS 逻辑门电路、脉冲波形的产生与处理电路以及模数转换与数模转换等电路有机融入到直流稳态电路分析、正弦交流稳态电路分析、电路瞬态特性的时域分析以及交流小信号电路的复频域分析等有关章节中,使电路分析方法的阐述以实际电路为载体,而对实际电路的分析又得到规范的电路分析方法的指导。

全书共6章,下册包含后两章的内容。第五章在复频域对电路进行分析,给出电路的频域响应;第六章给出非线性电路分析的基本概念。

本书可供高等学校本科电子信息类、电气类、自动化类专业作为“电路”课程教材使用,也可供工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

电路分析与电子线路基础. 下册 / 陈抗生编著. —
北京:高等教育出版社,2012.11
ISBN 978-7-04-034998-6

I. ①电… II. ①陈… III. ①电路分析-高等学校-
教材 ②电子线路-高等学校-教材 IV. ①TM133
②TN7

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 225275 号

策划编辑 杜 炜 责任编辑 杨 希 封面设计 李卫青 版式设计 范晓红
插图绘制 尹 莉 责任校对 窦丽娜 责任印制 韩 刚

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社 址	北京市西城区德外大街4号	网 址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印 刷	高教社(天津)印务有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开 本	787mm×960mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印 张	17.5	版 次	2012年11月第1版
字 数	320千字	印 次	2012年11月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	25.80元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 34998-00

第五章 交流小信号电路的复频域分析	1
5.1 线性连续系统(电路)的复频域传递函数.....	2
5.1.1 拉普拉斯变换的定义及其基本性质	2
5.1.2 拉普拉斯反变换	8
5.1.3 复频域中的电路定理	11
5.1.4 电路传递函数的一般形式及其基本性质与信号流图.....	18
5.1.5 传递函数的零点和极点以及系统的频率特性	25
5.1.6 零、极点对电路稳定性的影响	32
5.2 z 变换与 z 域中的传递函数	34
5.2.1 从拉普拉斯变换到 z 变换	34
5.2.2 离散系统的系统函数与系统的频率响应	39
5.3 晶体管放大器偏置电路分析	43
5.3.1 电压偏置电路	44
5.3.2 恒流源偏置电路.....	49
5.3.3 带隙基准电压电路	53
5.4 场效应晶体管单级放大器电路分析	55
5.4.1 放大器的主要参数.....	55
5.4.2 简单结构单级共源极放大器的图解分析	58
5.4.3 单级共源极放大器的数值分析	59
5.4.4 单级场效应晶体管共源极放大器特性的简化分析	66
5.4.5 单级场效应晶体管共栅极放大器特性的简化分析	72
5.4.6 单级场效应晶体管共漏极放大器特性的简化分析	75
5.5 单级 NPN 双极型晶体管放大器特性的分析	79
5.5.1 单级 NPN 双极型晶体管共发射极放大器的数值分析	79
5.5.2 单级 NPN 双极型晶体管共发射极放大器特性的简化分析.....	85
5.5.3 单级 NPN 双极型晶体管共基极放大器特性的简化分析	90
5.5.4 单级 NPN 双极型晶体管共集电极放大器特性的简化分析.....	93

5.6	反馈放大器电路分析*	96
5.6.1	反馈放大器的类型及其表示	97
5.6.2	反馈放大器分析	102
5.6.3	串联反馈式稳压电路	108
5.7	差分放大器电路分析*	110
5.7.1	差分放大器的特点	111
5.7.2	基于场效应晶体管差分对的差分放大器	113
5.7.3	基于双极型晶体管差分对的差分放大器	118
5.7.4	吉尔伯特模拟乘法器单元电路	128
5.8	运算放大器、电流差分缓冲放大器与电流差分跨导放大器	130
5.8.1	基于电压反馈的二级 CMOS 运算放大器(VFA)	131
5.8.2	基于电流反馈的运算放大器(CFA OP AMP)	140
5.8.3	电流差分缓冲放大器(CDBA)与电流差分跨导放大器(CDTA)	144
5.9	滤波器	150
5.9.1	无源 LC 滤波器与四相 RC 滤波器	151
5.9.2	基于运算放大器的有源 RC 滤波器	160
5.9.3	基于运放的开关电容滤波器	166
5.9.4	基于电流差分缓冲放大器(CDBA)的滤波器	170
5.9.5	基于电流差分跨导放大器(CDTA)的滤波器	175
5.9.6	数字滤波器简介	181
5.10	小信号情况下振荡器的线性理论分析	185
5.10.1	振荡器达到稳定振荡的条件	185
5.10.2	RC 相移振荡器	190
5.10.3	LC 振荡器	192
5.10.4	基于电流差分缓冲放大器(CDBA)、电流差分跨导放大器(CDTA)的振荡电路	202
5.11	过取样级的数据转换电路	206
	习题五*	212
第六章	非线性电路分析	220
6.1	直流非线性电路分析	220
6.1.1	直流非线性电路方程的一般形式	220
6.1.2	包含 PN 结二极管的直流非线性电路	221
6.1.3	包含晶体管的直流非线性电路	227
6.2	功率放大器电路及谐波平衡分析	233
6.2.1	功率放大器的特性参数及结构类型	234

6.2.2 交流大信号情况下放大器电路的谐波平衡分析	247
6.2.3 振荡电路的修正谐波平衡分析法简介	263
习题六	265
附录1 拉普拉斯(拉氏)变换简表	267
附录2 z 变换对简表	269
部分习题参考答案	270
参考文献	272

交流小信号电路的复频域分析

第一章 1.2 节指出,电压、电流形式的信号 $f(t)$ 既可在时域中以其随时间变化的波形表示,也可在频域中以其相应的频谱 $F(\omega)$ 表示。 $f(t)$ 与 $F(\omega)$ 是傅里叶变换与反变换之间的关系。电压、电流的这两种表示是等价的。第四章对电路的时域瞬态分析,关注的是当电路网络输入端口为信号 $f(t)$ 激励时,如何在时域中,在感兴趣的输出端口得出其时域输出响应 $g(t)$ 。本章对电路的频域分析,当电路网络输入端口的信号 $f(t)$ 用其频谱 $F(\omega)$ 表示时,如何直接在频域中,在感兴趣的输出端口得出其频域输出响应 $G(\omega)$ 。显然, $G(\omega)$ 与 $g(t)$ 也是傅里叶变换与反变换关系。从频域角度看,直流稳态电路处理的是 $F(\omega)$ 中只有 $\omega = 0$ 的直流分量作用于电路并达到稳态的情况,而正弦交流稳态电路处理的是 $F(\omega)$ 中只有一个正弦频率分量作用于电路并达到稳态的情况,它们都是本章分析的特例。

本章对电路的频域分析,首先将实频域(ω)拓展到复频域($s = \sigma + j\omega$),在复频域中对电路进行分析,故称其为电路的复频域分析。

交流小信号电路是指电路中的交变分量比直流分量小得多。在交流小信号假设下,电路中的晶体管,其直流工作点不随交流信号的变化而变动,可用线性电路模型近似。因此本章讨论的交流小信号电路,即使电路中含有晶体管这样的非线性元件,仍然可以当作线性电路处理。

零状态下,复频域中电路输出响应与输入激励之比定义为电路的传递函数(或系统函数,网络函数),它是描述电路特性非常重要的一个物理量。本章对交流小信号情况下放大器、滤波器等电路特性的分析,主要是通过传递函数的分析进行的。

本章首先从连续信号 $f(t)$ 的拉普拉斯变换、离散信号序列 $f[n]$ 的 z 变换,引入复频率的概念,并得出复频域中相应的电路定理。在此基础上又进一步得到复频域中传递函数的一般表达式,并通过传递函数分析电路的性能。

本章随后基于电路的复频域分析,对交流小信号情况下工作的放大器、滤波

器、振荡器,以及 $\Delta-\Sigma$ 调制器等电路进行较为深入的分析。

本章5.1节简要介绍拉普拉斯变换、复频域中的电路定理以及传递函数。5.2节关于 z 变换与 z 域中的传递函数。5.3节讨论晶体管的直流偏置。5.4节到5.7节分析单级放大器,反馈放大器,差分放大器的特性,5.8节讨论运算放大器、电流差分缓冲放大器以及电流差分跨导放大器电路。5.9节关于滤波器,5.10节振荡器,最后5.11节简要讨论 $\Delta-\Sigma$ 调制器。

5.1 线性连续系统(电路)的复频域传递函数

本节先讨论拉普拉斯变换并引入复频率 s 的概念,在此基础上得出复频域 s 中的电路定理,并通过传递函数分析电路的特性。

5.1.1 拉普拉斯变换的定义及其基本性质

第三章讨论正弦稳态交流电路时,引入相量变换的概念,将正弦函数激励下,时域中微分方程的定解问题转化为频域中相量代数方程的定解问题。但正弦交流电路的相量分析仅限于电路的稳态。

拉普拉斯变换是一种对连续函数的积分变换,它是在傅里叶变换的基础上引入衰减指数函数和单位阶跃函数,从而放宽了对变换的限制,并使之更适合实际分析的需要,即不但保留了傅里叶变换中的诸多性质,而且其中有些性质(如微分性质、卷积等)比傅里叶变换更为实用。

拉普拉斯变换可以将求解连续时间电路系统的微分方程的全解问题,转化为在复频域中求解代数方程的问题。基本过程是,首先通过拉普拉斯变换,将已知的时域函数变换为频域函数(也称象函数),将时域函数的微分方程转化为频域函数的代数方程,然后在频域求解代数方程,得到响应的象函数。如果需要将响应的象函数返回到时域,则将得到的象函数进行拉普拉斯反变换,又可得到满足初始条件的原时域微分方程的全解。需要指出的是,拉普拉斯变换将电流和电压的初值自动引入到多项式方程之中,这样在变换处理过程中,初始条件成为变换的一部分。拉普拉斯变换在高等数学课程中会作专题讨论,本节主要给出拉普拉斯变换的定义及其基本定理。

在电路分析中,如果将换路时刻作为时间的起点,那么只要研究 $t \geq 0$ 后的电路变量,这样就可以将函数 $f(t)$ 限定于 $[0, \infty)$ 范围。用数学表示,等价于 $f(t)$ 乘上单位阶跃函数 $u(t)$,即

$$f(t) \cdot u(t) = \begin{cases} f(t) & 0 \leq t < \infty \\ 0 & -\infty < t < 0 \end{cases} \quad (5.1.1)$$

$f(t) \cdot u(t)$ 乘上一个衰减因子 $e^{-\sigma t}$,选择适当的 σ ($\sigma > \sigma_0$, σ_0 为实数),使得 $f(t)e^{-\sigma t}$ 在区间 $[0, \infty)$ 内绝对可积,则它的傅里叶变换为

$$F(j\omega) = \int_{0^-}^{\infty} f(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt = \int_{0^-}^{\infty} f(t) e^{-(\sigma + j\omega)t} dt \quad (5.1.2)$$

上式积分下限取为 0^- , 则把 $t = 0$ 时刻可能出现的冲激函数也包含在被积函数中。令复频率 s 为

$$s = \sigma + j\omega \quad (5.1.3)$$

则积分结果为 s 的函数。引入复频率 s 后, 式(5.1.2)为

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (5.1.4)$$

上式表示的就是 $f(t)$ 的拉普拉斯变换(简称拉氏变换), 称 $f(t)$ 为原函数, $F(s)$ 为象函数, $F(s)$ 即为 $f(t)$ 的拉普拉斯变换, 常用大写花体“ \mathcal{L} ”表示拉普拉斯变换, 即

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} \quad (5.1.5)$$

拉普拉斯变换存在的条件是:

- (1) $t < 0$ 时, $f(t) = 0$;
- (2) $t > 0$ 时, $f(t)$ 和 $df(t)/dt$ (或表示为 $f'(t)$) 均分段连续, 在有限区间内至多存在有限个间断点;
- (3) $f(t)$ 是指数阶函数, 即存在常数 M 和 σ_0 , 使 $|f(t)| < Me^{\sigma_0 t}$, 从而使积分 $\int_0^{\infty} |f(t) e^{-st}| dt$ 有限, 其中 $s = \sigma + j\omega$, $\sigma > \sigma_0$, 则 $f(t)$ 的拉普拉斯变换存在。

拉普拉斯变换的基本性质如表 5.1.1 所示。

表 5.1.1 拉普拉斯变换的基本性质

名称	表示
定义	$f(t) \leftrightarrow F(s)$ $F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$
线性定理	$Af_1(t) + Bf_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} AF_1(s) + BF_2(s)$
时域微分定理	$\frac{df(t)}{dt} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} sF(s) - f(0^-)$
时域积分定理	$\int_{0^-}^t f(\lambda) d\lambda \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s} F(s) + \frac{f^{-1}(0^-)}{s}$
复频域微分(乘时间 t)	$tf(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} -\frac{dF(s)}{ds}$
时域移位定理	$f(t-a)u(t-a) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} e^{-as} F(s)$

名 称	表 示
复频域移位定理	$f(t)e^{-at} \xleftrightarrow{L} F(s+a)$
伸缩定理	$f\left(\frac{t}{a}\right) \xleftrightarrow{L} aF(as)$
时域卷积定理	$f_1(t) * f_2(t) \xleftrightarrow{L} F_1(s)F_2(s)$
复频域卷积定理	$f_1(t) \cdot f_2(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{2\pi j} F_1(s) * F_2(s)$
初值定理	$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$
终值定理	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$

一些常用函数的拉普拉斯变换简表见本书附录 1。实际工作中并不要求用广义积分法按式(5.1.4)求函数 $f(t)$ 的拉普拉斯变换,而可通过查表得出。

【例 5.1.1】 图 5.1.1 所示的是时延为 T 的理想时延电路,如果输入是 $f(t)$,输出 $g(t)$ 就是 $f(t-T)$,即输出比输入延迟了 T 。求输出 $g(t) = f(t-T)$ 的拉氏变换。

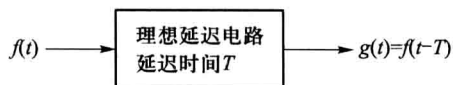


图 5.1.1 理想延迟电路

解: 输出 $g(t) = f(t-T)$ 的拉普拉斯变换 $G(s)$ 为

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t-T)\} \\
 &= \int_{0^-}^{\infty} f(t-T)e^{-st} dt \\
 &= \int_{-T}^{\infty} f(\tau)e^{-s(\tau+T)} d\tau \\
 &= e^{-sT} \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau} d\tau \quad (f(\tau) = 0, \tau < 0) \\
 &= e^{-sT} F(s)
 \end{aligned} \tag{5.1.6}$$

所以对于时延为 T 的理想延迟电路,复频域中输出 $G(s)$ 与输入 $F(s)$ 之比 $H(s)$ 为

$$H(s) = \frac{G(s)}{F(s)} = e^{-sT} \tag{5.1.7}$$

【例 5.1.2】 求 $\sin 2t \sin 3t$ 的拉普拉斯变换。

解：根据附录 1 拉氏变换简表,当 $a=2, b=3$ 时,可以方便地得到

$$\mathcal{L}\{\sin 2t \sin 3t\} = \frac{12s}{(s^2 + 5^2)(s^2 + 1^2)} = \frac{12s}{(s^2 + 25)(s^2 + 1)}$$

【例 5.1.3】 求 $f(t) = \frac{e^{-bt}}{\sqrt{2}}(\cos bt - \sin bt)$ 的拉普拉斯变换 $F(s)$ 。

解：该函数的拉氏变换,在附录 1 拉氏变换简表中没有给出,但可将 $f(t)$ 改写成

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{e^{-bt}}{\sqrt{2}}(\cos bt - \sin bt) \\ &= \frac{e^{-bt}}{\sqrt{2}}\left[\cos bt - \cos\left(\frac{\pi}{2} - bt\right)\right] \\ &= \frac{e^{-bt}}{\sqrt{2}}\left[-2\sin\frac{\pi}{4}\sin\left(bt - \frac{\pi}{4}\right)\right] \\ &= e^{-bt}\sin\left(-bt + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

上式表示的 $f(t)$ 的拉氏变换在附录 1 拉氏变换简表中可以查到,即当 $a = -b$, $c = \pi/4$ 时可以得到

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}\left\{e^{-bt}\sin\left(-bt + \frac{\pi}{4}\right)\right\} \\ &= \frac{(s+b)\sin\frac{\pi}{4} + (-b)\cos\frac{\pi}{4}}{(s+b)^2 + (-b)^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}s}{2(s^2 + 2bs + 2b^2)} \end{aligned}$$

总之,查表求函数的拉氏变换比按定义求简便得多,特别是掌握了拉氏变换的性质,再使用查表的方法,就能更快地找到所求函数的拉氏变换。

第三章 3.9 节基于电路的相量分析,曾提及网络函数(或系统函数)的概念。系统函数的基本定义是指零状态下,复频域中电路输出响应与输入激励之比。如果激励与响应处于不同的端口,激励与响应之比称为传递函数(或转移函数),如果处于同一端口,则称为策动点函数。下面结合锁相环中常用的三个基本单元电路,即以环路滤波器、压控振荡器与鉴相器电路为例说明,怎样利用拉普拉斯变换求得这些电路的传递函数。

【例 5.1.4】 图 5.1.2 所示的反相环路滤波器

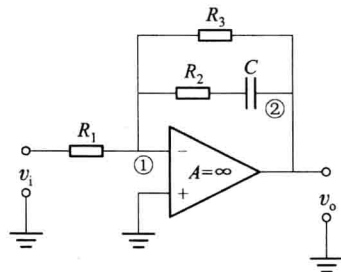


图 5.1.2 反相环路滤波器

方程,通过拉普拉斯变换求复频域中输出 $V_o(s)$ 与输入 $V_i(s)$ 之比,即电路的传递函数 $H(s)$ 。

解:利用理想运放反向端“虚地”以及运放输入端电流为零的特点,选择结点①、②列写 KCL 方程,得到

$$-\frac{v_i(t)}{R_1} - \frac{v_2(t)}{R_2} - \frac{v_o(t)}{R_3} = 0 \quad (5.1.8a)$$

$$\frac{v_2(t)}{R_2} + C \frac{d[v_2(t) - v_o(t)]}{dt} = 0 \quad (5.1.8b)$$

式中 v_2 为结点②的电压。对式(5.1.8)进行拉普拉斯变换

$$-\frac{V_i(s)}{R_1} - \frac{V_2(s)}{R_2} - \frac{V_o(s)}{R_3} = 0 \quad (5.1.9a)$$

$$\frac{V_2(s)}{R_2} + Cs[V_2(s) - V_o(s)] = 0 \quad (5.1.9b)$$

联立解式(5.1.9a)与式(5.1.9b)就得到电路的传递函数

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{R_3(1 + R_2Cs)}{R_1[(R_3 + R_2)Cs + 1]} \quad (5.1.10)$$

上式描述了反相环路滤波器的响应,其输入、输出量都是电压,且有 180° 相位差,这就是在环路滤波器之前冠以“反相”二字的原因。

当 $R_3 \rightarrow \infty$,也就是图 5.1.2 中的 R_3 支路断开,这种情况下的滤波电路称为积分和超前滤波器。此时传递函数为

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{1 + R_2Cs}{R_1Cs} \quad (5.1.11)$$

【例 5.1.5】 图 5.1.3 所示的是压控振荡器(简称 VCO)的输出振荡频率 ω_o 与控制电压 $v_c(t)$ 的关系,其数学表达式是 $\omega_o(t) = \omega_s + g[v_c(t)]$ 。式中 ω_s 为压控振荡器的自由振荡角频率(或固有角频率),即 $v_c(t) = 0$ 时的角频率。 $g[v_c(t)]$ 表示频率随电压变化的函数关系。利用拉普拉斯变换得出 VCO 复频域中输出相位与输入控制电压的关系,即 VCO 的传递函数。

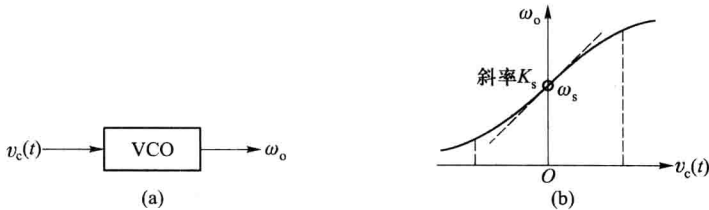


图 5.1.3 压控振荡器及其压控曲线

解:根据图 5.1.3,在 ω_s 附近,压控振荡器的频率与控制电压的关系可用线性关系近似

$$\omega_o(t) = \omega_s + K_s v_c(t) \quad (5.1.12)$$

式中 K_s 是压控曲线在 $\omega_o = \omega_s$, 即 $v_c(t) = 0$ 处的斜率, 称为压控灵敏度, 单位为 $(\text{rad/s})/\text{V}$ 。由于正弦信号的角频率为相位的导数, 故 VCO 输出信号的瞬时相位为

$$\varphi_o(t) = \int_0^t \omega_o(\tau) d\tau = \omega_s t + K_s \int_0^t v_c(\tau) d\tau = \theta_s + \theta_o(t) \quad (5.1.13)$$

式中

$$\begin{aligned} \omega_s t &= \theta_s \\ \theta_o(t) &= K_s \int_0^t v_c(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (5.1.14)$$

上式是一个积分方程, 式中 $\theta_o(t)$ 是以 $\omega_s t$ 为参考的瞬时相位。对上式进行拉普拉斯变换可得

$$\Theta_o(s) = \frac{K_s V_c(s)}{s}$$

由此可得 VCO 的传递函数

$$H(s) = \frac{\Theta_o(s)}{V_c(s)} = \frac{K_s}{s} \quad (5.1.15)$$

上式表示的 VCO 响应, 其输入量是电压, 输出量是相位。

【例 5.1.6】 图 5.1.4(a) 所示的鉴相器输入是相位差 $\Delta\theta$ 、输出是电压 v_{pd} , 其正弦鉴相特性如图 5.1.4(b) 所示, 数学关系可写成

$$v_{pd}(t) = K_{pd} \sin[\Delta\theta(t)] \quad (5.1.16)$$

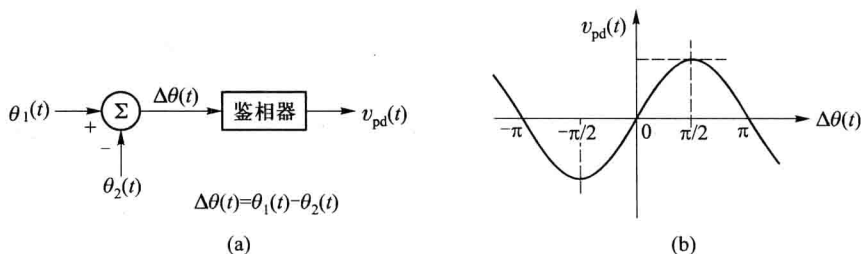


图 5.1.4 鉴相器及其正弦鉴相输出特性

利用拉普拉斯变换求鉴相器传递函数, 即复频域中输出电压与输入相位差之比。

解: 当 $\Delta\theta(t)$ 较小时, $\sin[\Delta\theta(t)]$ 可近似为 $\Delta\theta(t)$, 这样式 (5.1.16) 可近似为

$$v_{pd}(t) \approx K_{pd} \Delta\theta(t) \quad (5.1.17)$$

式中 K_{pd} 是正弦鉴相输出曲线在 $\Delta\theta(t) = 0$ 时的斜率, 对式 (5.1.17) 作拉氏变换

$$V_{pd}(s) \approx K_{pd} \Delta\Theta(s)$$

由上式可得鉴相器复频域中的传递函数

$$H(s) = \frac{V_{pd}(s)}{\Delta\Theta(s)} = K_{pd} \quad (5.1.18)$$

可见鉴相器的响应,其输入量是相位差,输出量是电压。

有关压控振荡器、鉴相器的具体电路本章后面将讨论之。

5.1.2 拉普拉斯反变换

前面讨论的是由已知函数 $f(t)$ 求其拉氏变换(或象函数) $F(s)$,但在实际应用中常会遇到与此相反的问题,即已知象函数 $F(s)$ 求其原函数 $f(t)$ 。为此,对 $F(s)$ 求取其傅里叶反变换,有

$$f(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{j\omega t} d\omega$$

两边同乘 $e^{\sigma t}$,得到

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{(\sigma+j\omega)t} d\omega = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} F(s)e^{st} ds \quad (5.1.19)$$

上式表示的即为拉普拉斯反变换。通过拉普拉斯反变换,可以从象函数 $F(s)$ 得到原函数 $f(t)$ 。拉普拉斯反变换常用 \mathcal{L}^{-1} 表示,故式(5.1.19)可记为

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \quad (5.1.20)$$

由象函数 $F(s)$ 求原函数 $f(t)$ 一般采用部分分式展开和查表的方法。

往后将证明,电路系统的象函数 $F(s)$ 一般取如下形式

$$F(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \cdots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0} \quad (5.1.21)$$

下面介绍怎样用部分分式展开求如式(5.1.21)所示的象函数的拉氏反变换。

对于电路系统,响应的象函数也就表示电路的传递函数。本节对拉普拉斯变换的讨论都是针对电路问题的,故本节后面较少应用象函数这个名称,而更多地采用传递函数这一称谓。

从式(5.1.21)可知,如果得知多项式 $P(s)$ 的系数 b_0, b_1, \cdots, b_n , 以及 $Q(s)$ 的系数 a_0, a_1, \cdots, a_m , 则可确定象函数 $F(s)$ 。

对于电路问题,多数情况下 $n \geq m$, 即 $F(s)$ 为有理真分式。若 $m \geq n$, 则 $F(s)$ 可通过多项式除法得

$$F(s) = c_{m-n} s^{m-n} + \cdots + c_2 s^2 + c_1 s + c_0 + \frac{Q_1(s)}{P(s)} \quad (5.1.22)$$

上式中,整式 $c_{m-n} s^{m-n} + \cdots + c_2 s^2 + c_1 s + c_0$ 的拉普拉斯反变换为

$$c_{m-n} \delta^{(m-n)}(t) + \cdots + c_2 \delta^{(2)}(t) + c_1 \delta^{(1)}(t) + c_0 \delta(t), \text{ 而 } \frac{Q_1(s)}{P(s)} = F_1(s) \text{ 为有理}$$

真分式,可以用部分分式展开。

部分分式展开的方法是,令 $P(s) = 0$, 求出相应的 n 个根,记作 $p_i (i = 1,$

$2, \dots, n$), 通常称 $p_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 为传递函数的极点。根据所求根的类型, 可有如下三种情况:

(1) 当 $P(s) = 0$ 对应的极点为不同的实数根时

$F_1(s)$ 按部分分式展开为

$$F_1(s) = \frac{Q_1(s)}{P(s)} = \frac{k_1}{s-p_1} + \frac{k_2}{s-p_2} + \dots + \frac{k_i}{s-p_i} + \dots + \frac{k_n}{s-p_n} \quad (5.1.23)$$

式中 k_1, k_2, \dots, k_n 是对应于 $F_1(s)$ 极点 p_1, p_2, \dots, p_n 的留数。留数 k_i 可由以下两式求得

$$k_i = [F_1(s) \cdot (s-p_i)] \Big|_{s=p_i} \quad (5.1.24)$$

或

$$k_i = \lim_{s \rightarrow p_i} \frac{Q_1(s)}{P'(s)} = \frac{Q_1(s)}{P'(s)} \Big|_{s=p_i} \quad (5.1.25)$$

于是 $F_1(s)$ 的拉普拉斯反变换为

$$f_1(t) = \sum_{i=1}^n k_i e^{p_i t} u(t) \quad (5.1.26)$$

(2) 当 $P(s) = 0$ 包含有共轭复根时

$$\begin{aligned} \text{设 } F_1(s) &= \frac{Q_1(s)}{P(s)} = \frac{Q_1(s)}{[s + (d - j\omega)][s + (d + j\omega)]P_1(s)} \\ &= \frac{k_1}{s + (d - j\omega)} + \frac{k_2}{s + (d + j\omega)} + \frac{Q_2(s)}{P_1(s)} \end{aligned} \quad (5.1.27)$$

当 $F_1(s)$ 是实系数多项式时, k_1 是复数, k_2 是 k_1 的共轭复数

$$\begin{aligned} k_1 &= F_1(s)[s + (d - j\omega)] \Big|_{s = -d + j\omega} = |K| \angle \theta \\ k_2 &= F_1(s)[s + (d + j\omega)] \Big|_{s = -d - j\omega} = k_1^* = |K| \angle -\theta \end{aligned}$$

$\left[\frac{k_1}{s + (d - j\omega)} + \frac{k_2}{s + (d + j\omega)} \right]$ 的拉氏反变换式为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{k_1}{s + (d - j\omega)} + \frac{k_2}{s + (d + j\omega)} \right] &= [|K| e^{j\theta} e^{-(d-j\omega)t} + |K| e^{-j\theta} e^{-(d+j\omega)t}] u(t) \\ &= |K| e^{-dt} [e^{j(\omega t + \theta)} + e^{-j(\omega t + \theta)}] u(t) \\ &= 2 |K| e^{-dt} \cos(\omega t + \theta) \cdot u(t) \end{aligned} \quad (5.1.28)$$

(3) 当 $P(s) = 0$ 包含有重根时

设 $P(s) = 0$ 包含一个 r 重根 p_1 , 则

$$\begin{aligned} F_1(s) &= \frac{Q_1(s)}{P(s)} = \frac{Q_1(s)}{(s-p_1)^r P_1(s)} \\ &= \frac{k_{11}}{s-p_1} + \frac{k_{12}}{(s-p_1)^2} + \dots + \frac{k_{1r}}{(s-p_1)^r} + \frac{Q_2(s)}{P_1(s)} \end{aligned} \quad (5.1.29)$$

全式乘 $(s-p_1)^r$, 再令 $s=p_1$, 得到

$$k_{1r} = (s - p_1)^r F_1(s) \Big|_{s=p_1} \quad (5.1.30)$$

将 $(s - p_1)^r F_1(s)$ 关于 s 求导, 再令 $s = p_1$, 得

$$k_{1(r-1)} = \frac{d}{ds} [(s - p_1)^r F_1(s)] \Big|_{s=p_1} \quad (5.1.31)$$

同理可依次求得 $k_{1(r-2)}, \dots, k_{12}, k_{11}$, 通式为

$$k_{1j} = \frac{1}{(r-j)!} \frac{d^{r-j}}{ds^{r-j}} [(s - p_1)^r F_1(s)] \Big|_{s=p_1} \quad (5.1.32)$$

下面以图 5.1.5 所示的并联 RLC 电路为例, 说明应用拉普拉斯变换求在直流电流源 I_{DC} 作用下, 该电路的复频域与时域输出响应。设 $R = (50/3) \Omega$, $C = 10^{-2} \text{ F}$, $L = 4 \text{ H}$, $I_{DC} = 1 \text{ A}$, 并假设在开关打开时电路中没有初始储能。

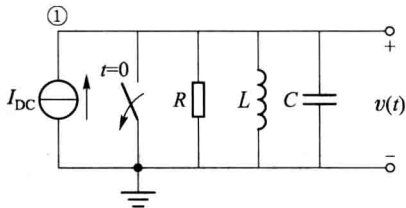


图 5.1.5 并联 RLC 电路

该电路有 2 个结点, 1 个接地, 仅结点①是独立的。欲求电路的输出响应, 首先要列写结点①的电压 $v(t)$ 满足的方程

$$\frac{v(t)}{R} + \frac{1}{L} \int_0^t v(\tau) d\tau + C \frac{dv(t)}{dt} = I_{DC} u(t) \quad (5.1.33)$$

对上式进行拉普拉斯变换, 并注意到电路没有初始储能, 即 $v(0^-) = 0$ 与 $i_L(0^-) = 0$, 故变换后的 s 域方程为

$$\frac{V(s)}{R} + \frac{1}{L} \frac{V(s)}{s} + sCV(s) = I_{DC} \frac{1}{s} \quad (5.1.34)$$

这是关于 $V(s)$ 的代数方程, 解此方程得到

$$V(s) = \frac{\frac{I_{DC}}{C}}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}} \quad (5.1.35)$$

上式就是输出电压 v 在复频域中的响应。将 R, L, C, I_{DC} 给定值代入式(5.1.35), 即得

$$V(s) = \frac{100}{s^2 + 6s + 25} \quad (5.1.36)$$

上式分母可分解为 $(s+3-j4)(s+3+j4)$, 因此上式基于部分分式展开的表达式为

$$V(s) = \frac{100}{(s+3-j4)(s+3+j4)} = \frac{-12.5j}{s+3-j4} + \frac{12.5j}{s+3+j4} \quad (5.1.37)$$

通过查附录 1 拉普拉斯变换简表, 便得 $V(s)$ 的拉普拉斯反变换为

$$v(t) = \mathcal{L}^{-1}\{V(s)\} = 2 \times 12.5 e^{-3t} \cos(4t - 90^\circ) u(t) \quad (5.1.38)$$

上式即是 $v(t)$ 的时域响应。

根据表 5.1.1 给出的初值、终值定理,由式(5.1.36)或式(5.1.38),可得 $v(t \rightarrow 0) = 0, v(t \rightarrow \infty) = 0$ 。这个结果的物理概念是很清楚的。因为初始时刻电容器储能为零,故电容器两端电压为零,电容器电压不能突变,应有 $v(t \rightarrow 0) = 0$ 。当 $t \rightarrow \infty$,电路在直流电流源作用下已达到稳态,流过电感的电流不随时间变化,电感两端电压为零,这就导致 $v(t \rightarrow \infty) = 0$ 。

利用拉普拉斯反变换求电路时域响应,如果基于部分分式展开法,首先要得到象函数 $F(s)$ 的极点 p_i 。对于大型复杂电路,求 $F(s)$ 的极点 p_i 有相当的难度。所以用拉普拉斯变换技术求电路在时域中的响应,工程上应用不多。工程上广泛应用的还是第四章介绍的直接在时域中数值求解电路方程,得到电路的时域瞬态响应。拉氏变换在电路分析中的应用侧重于得出电路的系统函数(或传递函数),并从系统函数分析电路的性能。

5.1.3 复频域中的电路定理

前已指出,应用拉普拉斯变换技术分析电路首先将时域中描述电路的微分方程转变为复频域中的代数方程。利用复频域中的电路定理,可以先将时域中的电路转变为复频域中的运算电路,基于运算电路可以直接列写复频域中描述电路的代数方程。本节进而说明,正弦交流稳态电路中运用过的各种列写电路方程的方法和定理均可引申到复频域中的电路。这是因为复频域中的电路定理与正弦交流稳态电路中相量形式的电路定理十分相似。

那么怎样得到复频域中的电路定理呢?

时域中的电路定理经过拉普拉斯变换即可得到复频域中的电路定理。

基尔霍夫电压、电流定律是电路分析的基础,今在复频域(s 域)中分析电路,首先应确定复频域中基尔霍夫电压、电流定律的表达式。

时域中基尔霍夫定律表达式为

$$\text{KCL: } \sum i(t) = 0 \quad (5.1.39)$$

$$\text{KVL: } \sum v(t) = 0 \quad (5.1.40)$$

对以上两式作拉普拉斯变换,就得到复频域中的基尔霍夫定律表达式

$$\text{KCL: } \sum I(s) = 0 \quad (5.1.41)$$

$$\text{KVL: } \sum V(s) = 0 \quad (5.1.42)$$

式(5.1.41)和式(5.1.42)表示各支路电流的象函数仍遵循 KCL,回路中各支路电压的象函数仍遵循 KVL。

基于式(5.1.41)、式(5.1.42)建立电路方程,还应给出复频域(s 域)中各电路元件的模型。