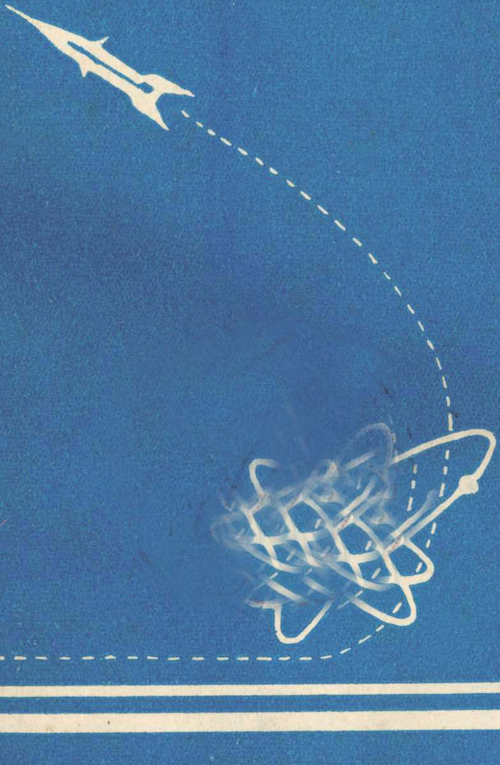
经济数学基础

（下 册）

周兆麟等编



湖北财经学院经济信息系

经济数学基础

（下　册）

周兆麟等编

湖北财经学院经济信息系

一九八二年二月

下　册　目　次

第十章　级　数

级数理论在数学分析中占有重要的地位。因为，它是研究函数的重要工具之一；在近似计算中有突出的作用。

§ 10.1　基本概念

1、无穷级数概念

设已给数列 $\{u_n\} = u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$，则式子

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \qquad (1)$$

叫做无穷级数，或简称为级数，其中第 n 项 u_n 叫做级数的一般项。（1）也常常写成 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$。

把级数的前 n 项逐一相加，得

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n,$$

S_n 称为级数的部分和。

令 n 历取 1，2，3，…时，这些部分和组成另一个数列：

$$\{S_n\} = s_1, s_2, \cdots, s_n, \cdots \qquad (2)$$

当 n 无限增大时，根据这个数列有无极限，可以引进级数（1）的收敛或发散的概念。

定义　当 n 无限增大时，若数列 S_n 趋近于一个极限（有限的）：

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n,$$

就称级数（1）收敛，这时极限值S叫做级数（1）的和，并写成

$$S=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n,$$

若S_n没有极限（即和等于$\pm\infty$或根本没有和时），就称级数（1）发散。

当级数收敛时，其前n项的和S_n是级数和S的近似值，它们之间的差值

$$r_n=s-s_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots$$

叫做级数的n项后的余项。用S_n代替S所产生的误差是这个余项的绝对值，即误差是$|r_n|$。

例1、讨论几何级数

$$a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots \qquad (3)$$

的敛散性，其中r是级数的公比，$a\neq 0$。

解：当$|r|\neq 1$时，它的部分和

$$S_n=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}$$

$$=\frac{a-ar^n}{1-r}=\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r},$$

当$|r|<1$时，由于$\frac{ar^n}{1-r}\to 0$，所以$S_n\to\frac{a}{1-r}$，

这时级数（3）收敛，其和$S=\frac{a}{1-r}$，

当$|r|>1$时，由于$\frac{ar^n}{1-r}\to\infty$，因而级数（3）发散，

当$r=1$时，$S_n=na\to\infty$，所以级数（3）发散，

当$r=-1$时，级数（3）成为$a-a+a-\cdots$，显然S_n随n为奇数或偶数而等于a或零，故极限不存在，从而级数（3）发散。

总之，当几何级数（3）的公比 r 的绝对值$|r|<1$时，此级数收敛；当$|r|\geqslant 1$时，此级数发散。

例2、讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$的敛散性

解：$$S_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$>\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$=n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\infty$$

即级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$的项虽递减，但其第n个部分和则随n而增至无穷，所以级数是发散的。

2、无穷级数的基本性质、收敛的必要条件

1° 若级数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

收敛于和S，则每项乘以一个不为零的常数C所得的级数

$$cu_1+cu_2+\cdots+cu_n+\cdots$$

收敛于和CS。

这是因为后一个级数的前n项的和是

$$\begin{aligned}\sigma_n &= cu_1 + cu_2 + \cdots + cu_n \\ &= c(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) \\ &= cs_n\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = \lim_{n\to\infty} cs_n = c\lim_{n\to\infty} s_n$$

$\lim_{n\to\infty} S_n$存在时有$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = cs$。

当$\lim_{n\to\infty} S_n$不存在时，$\lim_{n\to\infty}\sigma_n$也不存在，所以级数的各项乘以一个不为零的常数后它的敛散性不变。

2° 两个收敛级数

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = s,$$

$$V_1 + V_2 \cdots + V_n + \cdots = \sigma,$$

可逐项施行加、减运算，所得级数

$$(u_1 \pm V_1) + (u_2 \pm V_2) + \cdots + (u_n \pm V_n) + \cdots$$

必收敛于和$s \pm \sigma$。

这是因为最后一个级数的前n项的和

$$\begin{aligned}&(u_1 \pm V_1) + (u_2 \pm V_2) + \cdots + (u_n \pm V_n) \\ &= (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) \pm (V_1 + V_2 + \cdots + V_n) \\ &= s_n \pm \sigma_n \to s \pm \sigma\end{aligned}$$

3° 在级数前面加上有限项或去掉有限项，不会影响级数的敛散性，不过在收敛情形，一般说来级数的和会改变。

为确定起见，考察下面两个级数

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots,$$

$$u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + \cdots.$$

第二个是由第一个去掉前两项得到的。

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots + u_n$$

$$\sigma_n = u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + \cdots + u_n + u_{n+1} + u_{n+2}$$

$$\sigma_{n-2} = s_n - (u_1 + u_2)$$

$$S_n = \sigma_{n-2} + (u_1 + u_2)$$

由此可知，当 $n \to \infty$ 时 σ_{n-2}、S_n 或同时具有极限或同时没有极限；在分别有极限 σ、S 时，其间关系为

$$\sigma = S - (u_1 + u_2)。$$

4° 收敛级数加括弧后所成的新级数仍然收敛于原来的和 S。

若级数 $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \cdots = s$ 按照某一规律加括弧后所组成的新级数设为

$$(u_1 + u_2) + (u_3 + u_4 + u_5) + \cdots,$$

用 σ_m 表示新级数的前 m 项的和，用 s_n 表示相应于 σ_m 的原来级数的前 n 项的和，即

$$\sigma_1 = u_1 + u_2 = s_2,$$

$$\sigma_2 = (u_1 + u_2) + (u_3 + u_4 + u_5) = s_5,$$

……

$$\sigma_m = (u_1 + u_2) + (u_3 + u_4 + u_5) + \cdots + (\cdots + u_n) = s_n,$$

……

由此可知，数列 σ_m 是数列 s_n 的子数列，当 $m \to \infty$ 时，$n \to \infty$，于是

$$\lim_{m \to \infty} \sigma_m = \lim_{n \to \infty} s_n = s$$

从而又得到，若加括弧后所成的新级数发散，则原来级数也必发散，因若收敛，那末根据刚才所证，加括弧后的级数就应收敛了。

但是收敛级数去括弧后所成的级数不一定仍是收敛的，

例如级数

$$(1-1)+(1-1)+\cdots$$

显然收敛于零，而级数

$$1-1+1-1+\cdots$$

却是发散的。

若所论级数是正项级数（即各项$u_n \geqslant 0$），则无论加括弧或去括弧都不会影响它的敛散性。这是因为从单调增加的数列中抽出来的任何子数列必与原来数列同时趋近于无穷大或同时趋近于同一极限的缘故。

5° 级数收敛的必要条件

若级数$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$收敛，则当$n$无限增大时，它的一般项$u_n$必趋近于零：

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

因为 $u_1+u_2+\cdots+u_{n-1}+u_n=s_n$

所以 $u_n=s_n-(u_1+u_2+\cdots+u_{n-1})=s_n-s_{n-1}$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(s_n-s_{n-1})$$

$$=\lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s-s=0$$

换句话说，若级数的一般项不趋近于零，则级数发散。例如级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{n-1}{n}+\cdots$$

因为 $u_n=\dfrac{n-1}{n}=1-\dfrac{1}{n}\to 1$（$n\to\infty$时），即$u_n$不趋于零。故此级数发散。

但一般项趋近于零并不是级数收敛的充分条件，有些级

数虽然$u_n \to 0$，却是发散的。例如级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots$$

它的一般项$u_n \to 0$，但在前面已讨论过它是发散的。

又例如调和级数

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots \qquad (4)$$

其$u_n \to 0$，却是发散的。证明如下：

从第二项起，顺序把级数（4）的一项、两项、四项、八项……括在一起：

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \cdots,$$

这个加括弧的级数的各项除第二项外显然大于级数

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \cdots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots$$

对应的各项，而后一级数前n项的和等于$n \cdot \frac{1}{2}$，发散于$+\infty$，于是加括弧后的级数也发散于$+\infty$，因而调和级数（4）也必发散于$+\infty$。

§ 10.2 正项级数

前一节所讲的都是任意项级数，即级数中各项可以是正数、负数或者零、现在我们只讨论正项级数，即各项$u_n \geqslant 0$

的级数。

1、正项级数收敛性条件

定理 正项级数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \qquad (1)$$

收敛的充分必要条件是它的部分和所构成的数列$\{s_n\}$有界。

证：必要性 若正项级数（1）收敛

即 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$

则 数列$\{s_n\}$有界

充分性 若$\{s_n\}$有界

$s_n = u_1+u_2+\cdots+u_n$

$s_{n+1} = u_1+u_2+\cdots+u_{n+1}$

因为 $u_n \geqslant 0$

所以 $s_n \leqslant s_{n+1}$

数列s_n单调增加

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ （见第三章极限存在准则Ⅰ）

即 正项级数（1）收敛。

例1、判断正项级数$\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}+\cdots$是否收敛

解：
$$s_n=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} < 1$$

所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$收敛。

例2、判断级数$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$是否收敛

解：$s_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$

$$< 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n}$$

$$= 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$

$$= 2 - \frac{1}{n} < 2$$

所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ 收敛

2、比较判别法

设有两个正项级数

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \qquad (2)$$

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots \qquad (3)$$

若级数（3）收敛，且$u_n \leqslant v_n$（$n = 1, 2, \cdots$），则级数（2）也收敛；若级数（3）发散，且$u_n \geqslant v_n$（$n = 1, 2, \cdots$），则级数（2）也发散。

证：若级数（3）收敛于和σ，并且$u_n \leqslant v_n$（$n=1, 2, \cdots$），则

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$
$$\leqslant v_1 + v_2 + \cdots + v_n < \sigma$$

即s_n有界，所以级数（2）收敛。

若级数（3）发散于$+\infty$，并且$u_n \geqslant v_n$($n=1, 2, \cdots$)，则

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$
$$\geqslant v_1 + v_2 + \cdots + v_n = \sigma_n \to \infty \text{（当} n \to \infty \text{时）}$$

即级数（2）也发散。

推论　若级数（3）收敛，并且从某项起（例如从第N项起），$u_n \leqslant kv_n$（k为不等于零的常数），则级数（2）也收敛；若级数（3）发散，并且从某项起，$u_n \geqslant kv_n$（常数$k>0$），则级数（2）也发散。

例3、证明P级数

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots,$$

常数$P>0$　　（4）

当$P \leqslant 1$时发散，$P>1$时收敛。

证：设$P \leqslant 1$，则$n^p \leqslant n$

$$\frac{1}{n^p} \geqslant \frac{1}{n},$$

但调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$发散，

根据比较判别法$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$是发散的（$0<P\leqslant 1$）

设$P>1$

顺序把级数（4）的一项、两项、四项、八项、…括在一起

$$1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{7^p}\right)+\left(\frac{1}{8^p}+\cdots+\frac{1}{15^p}\right)+\cdots \tag{15}$$

它的各项显然小于级数

$$1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{4^p}\right)+\left(\frac{1}{8^p}+\cdots+\frac{1}{8^p}\right)+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2^{p-1}}+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^3+\cdots$$

对应的各项；而后一级数是几何级数，其公比

$r=\frac{1}{2^{p-1}}<1$，是收敛的、故当$P>1$时，级数（5）收敛。

又因为收敛的正项级数去括弧后仍收敛，所以级数（4）收敛。

例如 §10.1 讲过的级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$是发散的（$P=\frac{1}{2}<1$）

§10.2 例2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$是收敛的（$P=2>1$）。

例4、判断级数$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3\cdot2^2}+\frac{1}{5\cdot2^3}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)2^n}$

$+\cdots$的敛散性。

解：因为几何级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots\left(r=\frac{1}{2}<1\right)\text{收敛}$$

$$\text{而}\frac{1}{(2n-1)2^n}\leqslant\frac{1}{2}\quad(n=1,2,\cdots)$$

$$\text{所以级数}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2}\text{收敛。}$$

例5、判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$ （$a>0$）的敛散性。

解：（1）当 $a>1$ 时

$$\frac{1}{1+a^n}<\frac{1}{a^n}=\left(\frac{1}{a}\right)^n$$

$$\text{几何级数}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^n\quad\left(r=\frac{1}{a}<1\right)$$

$$\text{所以}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}\ (a>1)\text{收敛}$$

（ii）当 $a=1$ 时

$$\text{级数即为}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}+\cdots\text{显然发散}$$

$$\text{所以}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}\ (a=1)\text{发散}$$